§4 切伦柯夫(Cerenkov)辐射

学习主要内容

切伦柯夫辐射机理；

切伦柯夫辐射影响因素。

复习

介质内的标势和矢势方程；

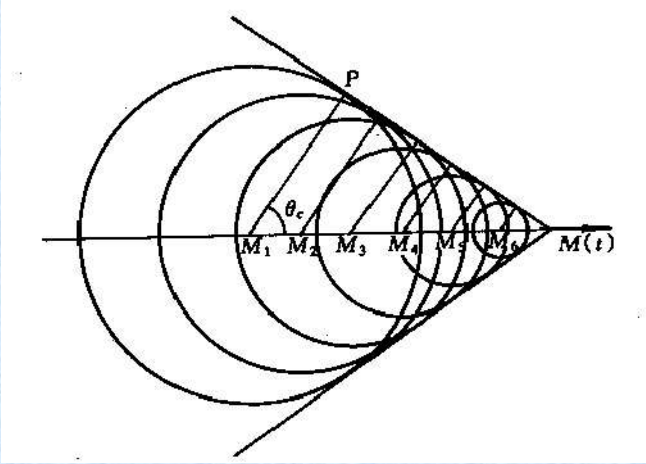
傅里叶变换。

7.4 切伦柯夫(Cerenkov)辐射

真空中：匀速运动带电粒子不产生辐射电磁场。

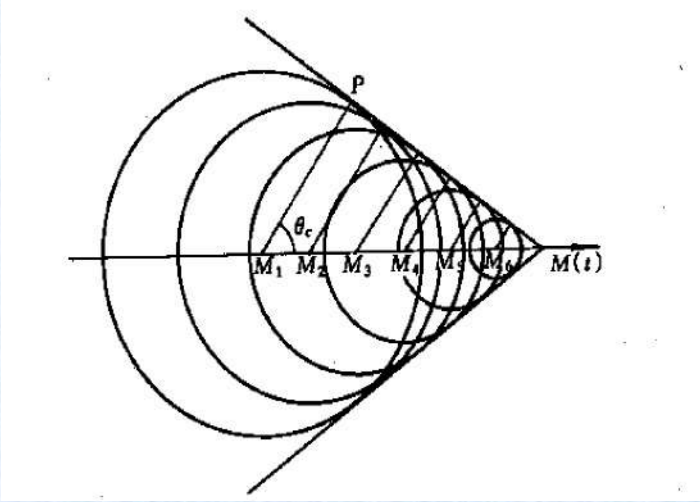
介质中：带电粒子在介质内运动时，介质内产生诱导电流，由这些诱导电流激发次波，当带电粒子的速度超过介质内的光速时，这些次波与原来粒子的电磁场互相干涉，可以形成辐射电磁场。这种辐射称为切伦柯夫辐射。

1、切伦柯夫辐射的物理机制



设在介质内粒子作匀速运动，速度 v超过介质内的光速c/n（n为折射率）。在粒子路径附近，介质的分子电流受到扰动，因而产生次波。

设粒子在时刻t_1，t_2，…依次经过M_1，M_2，…点，在时刻t到达M点。在同一时刻t，M_1处产生的次波已经到达半径为M_1P的球面上



$$M_1P=\frac{c}{n}(t-t_1)\quad,\quad M_1M=v(t-t_1)$$

若$v>c/n$，则粒子路径上各点所产生的次波在时刻t都在一个锥体之内。在锥面上，各次波互相叠加，形成一个波面，因而产生向锥面法线方向传播的辐射电磁波。辐射方向与粒子运动方向的夹角θ_c由下式确定，

$$\cos\theta_c=\frac{c}{nv}$$

切伦柯夫辐射是运动带电粒子与介质内的束缚电荷和诱导电流所产生的集体效应。

在宏观现象中，介质内束缚电荷和诱导电流分布产生的宏观效应可以归结为电容率ε和磁导率μ，因此在研究切伦柯夫辐射时，可以对介质作宏观描述，即用 ε 和 μ 两参量来描述介质。

为简单起见，先假设ε和μ是不依赖于频率的常量，并设$\mu=\mu_0$，因而介质内的光速为$c/n=c(\varepsilon_r)^{-1/2}$，其中$n$为介质的折射率，$\varepsilon_r$为相对电容率。当$n$为常数时，介质内的标势和矢势方程为

$$\nabla^2\varphi-\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\rho/\varepsilon$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}$$

ρ和J是自由电荷密度和自由电流密度，即运动带电粒子的电荷密度和电流密度

设粒子以匀速 v 作直线运动，其位矢为 $x=x_e(t)=vt$，它的电荷密度和电流密度为

$$\rho(\vec{x},t)=q\delta[\vec{x}-\vec{x}_e(t)]$$

$$\vec{J}(\vec{x},t)=q\vec{v}\delta[\vec{x}-\vec{x}_e(t)]$$

由于辐射，带电粒子的能量逐渐损耗，因而速度亦逐渐降低。但是由减速引起的效应是不大的，因此，下面我们假设粒子作匀速运动。

用频谱分析方法求解

$$\vec{A}_{\omega}(\vec{x})=\frac{q}{8\pi^{2}\varepsilon_{0}c^{2}}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\left(t'-\frac{n}{c}\vec{e}_{r}\cdot\vec{x}_{e}\right)}\vec{v}(t')\mathrm{d}t'$$

n为辐射方向单位矢量

设v沿x轴方向，n与v夹角为θ,

则$n\cdot x_e = x_e\cos\theta$,

又$v(t')\mathrm{d}t'=\mathrm{d}x_e$， $t'=x_e/v$，得

$$\vec{A}_{\omega}(\vec{x}) = \frac{e}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{n}{c}\cos\theta\right)x_e}\,\mathrm{d}\vec{x}_{\mathrm{e}}$$

$$\vec{B}_{\omega} = i\vec{k}\times\vec{A}_{\omega} = \frac{i\omega n}{c}\vec{n}\times\vec{A}_{\omega}$$

因为n与A_ω的夹角为θ，所以B_ω的量值为

$$B_\omega = \frac{i\omega n e}{8\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{e^{ikR}}{R}\sin\theta\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{n}{c}\cos\theta\right)x_e}\mathrm{d}x_{\mathrm{e}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{n}{c}\cos\theta\right)x_e}\mathrm{d}x_{\mathrm{e}} = 2\pi\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{\omega n}{c}\cos\theta\right)$$

$$B_{\omega} = \frac{i\omega ne}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{e^{ikR}}{R} \sin\theta \delta\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega n}{c}\cos\theta\right)$$

$$B_{\omega} = 0 \quad 若 \cos\theta \neq \frac{c}{nv}$$

如果粒子的运动速度$v<c/n$，则对所有θ值，$\cos\theta < c/nv$，因此在这情形下没有辐射。

2、辐射相关因素

上面我们假设折射率n是与ω无关的常数，结果得到有一个确定的辐射角θ_c, 满足$\cos\theta_c = c/nv$，在这单一辐射角下电磁场变为无穷大。

事实上，介质的n是与ω有关的函数，当ω很大时，折射率$n \to 1$，因此辐射频谱在高频下截断，辐射场不会在一个尖锐的辐射角下变为无穷大，而是分布于有一定宽度的辐射角内。

用 $S\cdot n=EH=(\varepsilon\mu)^{-1/2}BH=(c/n\mu)B^2$，可导出

$$\frac{\mathrm{d}W_{\omega}}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{4\pi\varepsilon_0 c^3 R^2}{n}\left|\vec{B}_{\omega}\right|^2$$

代人上式，出现δ函数的平方。可以把它作如下处理。$|B_{\omega}|^2$含有因子

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{n}{c}\cos\theta\right)x_e}\mathrm{d}x_{\mathrm{e}}\right|^2$$

把其中一个因子变为δ函数。由于有这个δ函数因子，$(1/v)-(n/c)\cos\theta$能取=0，因此，另一个因子可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i0}\mathrm{d}x_{\mathrm{e}} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_{\mathrm{e}}$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{n}{c}\cos\theta\right)x_e}\mathrm{d}x_{\mathrm{e}}\right|^2 = 2\pi\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{\omega n}{c}\cos\theta\right)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_{\mathrm{e}}$$

最后一个因子是粒子所走的无穷大路程。当路程L>>辐射波长时，以上的计算仍然近似适用，但$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_e$ 应代为L。粒子走过单位路程时的单位频率间隔辐射能量角分布

$$\frac{\mathrm{d}W_\omega}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}L}=\frac{e^2\omega^2 n}{8\pi^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\theta\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{\omega n}{c}\cos\theta\right)$$

$$=\frac{e^2\omega^2 n}{8\pi^2\varepsilon_0 c^3}\left(1-\frac{c^2}{n^2v^2}\right)\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{\omega n}{c}\cos\theta\right)$$

如果考虑折射率对频率的依赖关系

$$\frac{\mathrm{d}W_{\omega}}{\mathrm{d}L} == \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(1-\frac{c^2}{\varepsilon(\omega)v^2}\right)\omega$$

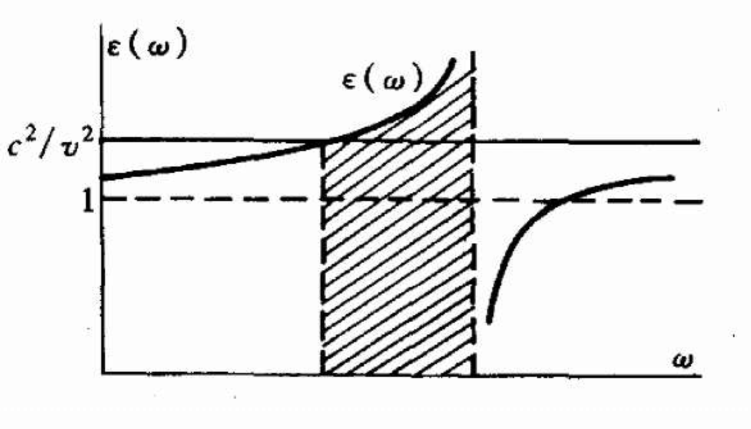
$$\varepsilon(\omega) > c^2 / v^2$$

δ函数因子表示只有在$\cos\theta = c/nv$方向上才有辐射。单位路程单位频率间隔的辐射能量为

$$\frac{\mathrm{d}W_\omega}{\mathrm{d}L} = \frac{e^2\omega^2 n}{8\pi^2\varepsilon_0 c^3}\left(1-\frac{c^2}{n^2v^2}\right)\oint\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{\omega n}{c}\cos\theta\right)\mathrm{d}\Omega$$

$$= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(1-\frac{c^2}{n^2v^2}\right)\omega$$

$$\varepsilon(\omega) > c^2/v^2$$



图示仅在一定的频率范围内满足$\varepsilon(\omega) > c^2/v^2$，因此，切伦柯夫辐射的频谱只包含这一频段。由于$\cos\theta_c = c/v\sqrt{\varepsilon}$。不同频率的电磁波的辐射角亦略有不同。用滤波器选择一定的频带，可以得到确定θ_c的值，因而测定辐射角θ_c就可以定出粒子的速度v。

现在切伦柯夫辐射广泛应用于粒子计数器中，它的优点是只记录大于一定速度的粒子，因而避免了低速粒子的干扰，而且可以准确测量出粒子的运动速度。