第五章　电磁波的辐射

复习：上一章内容---电磁波的传播

电磁波的波动方程、波形方程

电磁波在介质、导体中的传播

谐振腔、波导

本章：电磁波的激发

电磁波的矢势、标势

电磁波的推迟势

电偶辐射

电磁波的动量

§5.1 电磁场的矢势和标势

1.学习目标

重新认识矢势、标势

理解两种规范变换

2.复习和思考

稳恒场的矢势、标势

在经典电动力学中，势A和φ的引入是作为描述电磁场的一种方法，规范不变性是对这种描述方法所加的要求。

在近代物理中，规范变换是由量子力学的基本原理引入的，规范不变性是一条重要的物理原理。

一.用势描述电磁场:

真空情况下：
$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E} \quad \vec{B}=\mu_0\vec{H}$$

麦氏方程：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\bullet\vec{D}=\rho$$

$$\nabla\bullet\vec{B}=0$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

引入 $$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

代入 $$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$$

说明：$\vec{E}$不再无旋！

为什么？

$$\boxed{\vec{E}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi}$$

$$\begin{cases}\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\ \vec{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\end{cases}$$

注意：

1. $\vec{A}$、$\varphi \rightarrow \vec{B}$、$\vec{E}$

2.在交变场，$\vec{E}$ 与 $\vec{A}$、φ 都有关。$\vec{E}=-\nabla\varphi$ 是特例；

3.φ 不代表势能意义；

4.麦氏方程可以合并。

二. 规范变换和规范不变性

$\vec{A}$、 φ 具有不确定性　　　　$\vec{B}$、 $\vec{E}$ 定了$\vec{A}$、 φ 不唯一确定

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\boxed{\varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

$$= -\nabla \varphi + \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$(\vec{A}、\varphi)$ 与 $(\vec{A}'、\varphi')$ 代表同一电磁场，叫做势的规范变换。

规范不变性：当势做规范变换时，所有的物理量和物理规律保持不变，叫规范不变性。

三.库仑变换与洛仑兹变换

1.库仑规范：

$$\boxed{\nabla \bullet \vec{A} = 0}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

优点：物理意义清楚，某些计算方便。

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \bullet \vec{A} = 0$$

矢势方程呢？

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \bullet \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$= \mu_0 (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\nabla^2 \vec{A}$$

不简洁、不对称、不方便。

2.洛仑兹规范:

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0}$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{B}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A} \qquad 右=\mu_0\vec{j}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi-\nabla^2\vec{A}=\mu_0\vec{j}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j}}$$

由 $\nabla\bullet\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\qquad \nabla\bullet(-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t})=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \bullet \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

达朗贝尔方程：

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} \\ \nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ (\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0) \end{array}\right.$$

说明：

1.洛仑兹变换更被接受；

2.物理过程：　　激发 $\longrightarrow$ 传播（平面波）

$$(\rho=0,\vec{j}=0)\quad \begin{cases} \vec{A}=\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \\ \varphi=\varphi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \end{cases}$$

3.$\nabla\cdot\vec{A}=-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ 并不唯一，只指出了二者之间应有一种关系。

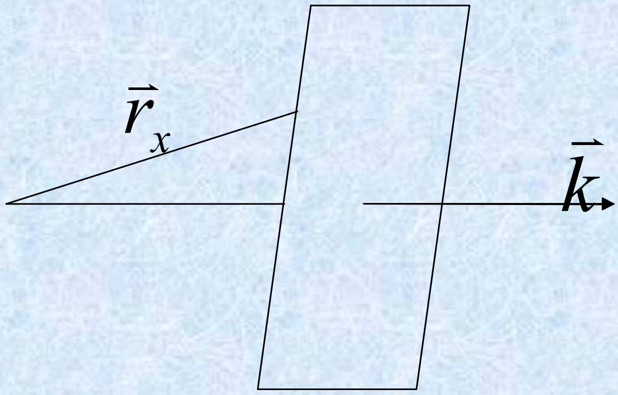
例1.求平面电磁波的势，并由势求$\vec{B}$、$\vec{E}$关系

$$\because \quad \rho = 0, \quad \vec{j} = 0$$

$$\therefore \quad \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0\right)$$



$$\therefore \vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \varphi = \varphi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

代入规范条件： $$i\vec{k} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}(-\varphi i \omega \varphi) = 0$$

$$\boxed{\therefore\ \varphi = \frac{c^2}{\omega}\vec{k}\cdot\vec{A} \text{ 或 } \varphi_0 = \frac{c^2}{\omega}\vec{k}\cdot\vec{A}_0}$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = i\vec{k}\times\vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -i\varphi\vec{k} + i\omega\vec{A} \qquad \varphi = \frac{c^2}{\omega}\vec{k}\cdot\vec{A}\text{代入}$$

$$= -i\vec{k}\frac{c^2}{\omega}(\vec{k}\cdot\vec{A}) + i\omega\vec{A} = -\frac{ic^2}{\omega}[\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{A}) - \frac{\omega^2}{c^2}\vec{A}]$$

$$= -\frac{ic^2}{\omega}[\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{A}) - (\vec{k}\cdot\vec{k})\vec{A}] = -\frac{ic^2}{\omega}[\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{A})]$$

$$= -\frac{c^2}{\omega}(\vec{k}\times\vec{B}) = -c(\vec{n}\times\vec{B}) \qquad \text{代入}\vec{B} = i\vec{k}\times\vec{A}$$

讨论：$\because \vec{B} = i\vec{k} \times \vec{A}, \vec{E} = -\dfrac{ic^2}{\omega}[\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{A})]$

$$\vec{A} = \vec{A}_n + \vec{A}_t,$$

$\because \vec{A}_n // \vec{k}, \vec{A}_t \perp \vec{k}$　　则$\vec{B}$、$\vec{E}$与$\vec{A}_n$无关

$\therefore \vec{A}_n$不影响$\vec{E}$、$\vec{B}$，只有$\vec{A}_t$影响$\vec{E}$、$\vec{B}$，可以令

$\vec{A}_n = 0$,即：$\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$

即在洛仑兹变换下，可　　　$\boldsymbol{\vec{k}} \cdot \boldsymbol{\vec{A}} = 0$

$$\begin{cases} \vec{B} = i\vec{k} \times \vec{A} \\ \vec{E} = i\omega\vec{A} \\ \vec{k} \cdot \vec{A} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{适应库仑变换吗？}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi=0$$

$$\nabla^2\varphi=0,\ \nabla\cdot\vec{A}=0$$

若全空间无电荷， $\varphi=c,$

$$\boxed{\therefore\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0}$$

$$\vec{A}=\vec{A}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\therefore\begin{cases}\vec{B}=i\vec{k}\times\vec{A}\\ \vec{E}=i\omega\vec{A}\end{cases}$$

二者一致！

说明：

(1) 库仑规范的优点：

它的标势φ描述库仑作用，可直接由电荷分布ρ求出；它的矢势只有横向分量，刚好足够描述电磁波的两种独立偏振。

(2)洛伦兹规范的优点：

它使矢势和标势的方程具有对称性，在相对论中显示出协变性，因而对于理论探讨和实际计算都提供很大的方便，本书后面都采用洛伦兹规范，尽管在采用洛伦兹规范时，$\boldsymbol{A}$的纵向部分和标势φ的选择还可以有任意性。

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi$$

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

规范不变性：当势作规范变换时，所有物理量和物理规律都应该保持不变的一种不变性。

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0}$$

$$\boxed{\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}}$$

作业：**1501、2**