§3　辐射的频谱分析

学习主要内容

频谱分析的一般公式；

低速运动带电粒子在碰撞过程中的辐射频谱；

高速运动带电粒子在碰撞过程中的辐射频谱。

复习

博里叶积分；

矢势展开。

1. 频谱分析的一般公式

以$f(t)$表示某一时间函数，它可以代表电流、势或电磁场。设 $f(t)$表为博里叶积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega$$

f_{ω}是$f(t)$的角频率为ω的傅里叶分量。逆变换为

$$f_{\omega}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

设$f(t)$是实函数，由上式定义的f_ω一般是复数。由$f(t)$为实数的条件可以得到负频分量与正频分量的关系。取复共轭得

$$f_\omega^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = f_{-\omega}$$

负频分量和正频分量不是独立的，而是互为复共轭。

若某一物理量正比于$f^{2}(t)$，则它对t的积分可以变为$|f_{\omega}|^{2}$对ω的积分：

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f^{2}(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega}\mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega}\cdot 2\pi f_{-\omega}\mathrm{d}\omega \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_{\omega}\right|^{2}\mathrm{d}\omega = 4\pi\int_{0}^{\infty}\left|f_{\omega}\right|^{2}\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

把傅里叶变换应用到电磁场问题上。首先把电流密度$J(x, t)$表为博里叶积分

$$\vec{J}(\vec{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{J}_{\omega}(\vec{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

逆变换式为

$$\vec{J}_{\omega}(\vec{x})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{J}(\vec{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

代入矢势公式得

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\left(\vec{x}',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{r}\mathrm{d}V'\int_{-\infty}^{\infty}\vec{J}_\omega(\vec{x}')e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega\int\frac{\vec{J}_\omega(\vec{x}')e^{i\omega\frac{r}{c}}}{r}\mathrm{d}V'$$

矢势$A(x, t)$的分量为

$$\vec{A}_\omega(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}_\omega(\vec{x}')e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r}\mathrm{d}V'$$

把积分变量写为 t'，将J_ω代入上式得

$$\vec{A}_\omega(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{8\pi^2}\int e^{i\omega\left(t'+\frac{r}{c}\right)}\mathrm{d}t'\int\frac{\vec{J}\left(\vec{x}',t'\right)}{r}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{J}_\omega(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{J}(\vec{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

对于一个电荷为q的带电粒子，设其位矢为$x=x_e(t)$，速度为$v(t)$，则它的电荷密度和电流密度为

$$\rho(\vec{x},t) = q\delta[\vec{x}-\vec{x}_e(t)]$$

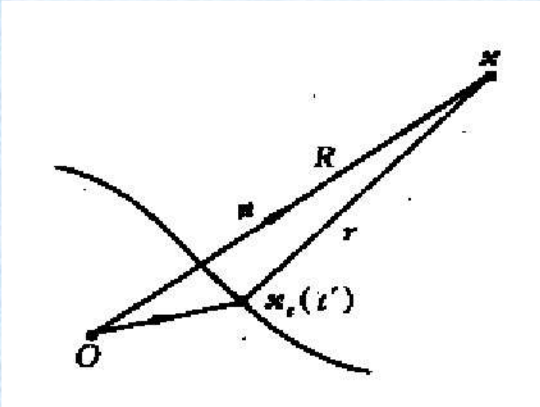
$$\vec{J}(\vec{x},t) = qv(t)\delta[\vec{x}-\vec{x}_e(t)]$$

对粒子体积积分后，相当于把x'换作粒子的坐标$x_e(t')$。因此

$$\vec{A}_\omega(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{8\pi^2}\int \frac{q\vec{v}(t')}{r} e^{i\omega\left(t' + \frac{r}{c}\right)} \mathrm{d}t'$$

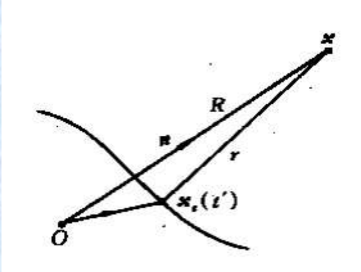
r为带电粒子位置$x_e(t')$到场点x的距离

若粒子在有限区域内运动，而我们在远处观察辐射场，可选区域内某点为坐标系原点，设从原点到场点的距离为 R，由图，有



$$r \approx R - \vec{e}_r \cdot \vec{x}_e\left(t'\right)$$

在势表达式中，相因子内的r用上式代人，而分母的r可以简单地代为R，得



$$\vec{A}_\omega(\vec{x})=\frac{\mu_0}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{v}(t')e^{i\omega\left(t'-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{x}_e}{c}\right)}\mathrm{d}t'$$

式中$k=\omega/c$为该频率分量的波数。辐射电磁场的ω分量

$$\vec{B}_\omega=i\vec{k}\times\vec{A}_\omega=\frac{iq\omega}{8\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{e}_r\times\vec{v}(t')e^{i\omega\left(t'-\frac{\vec{e}_r\cdot x_e}{c}\right)}\mathrm{d}t'$$

$$\vec{E}_\omega = -c\vec{e}_r \times \vec{B}_\omega = -\frac{iq\omega}{8\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{e}_r \times \left(\vec{e}_r \times \vec{v}\right)e^{i\omega\left(t' - \frac{\vec{e}_r\cdot x_e}{c}\right)}\mathrm{d}t'$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}e^{i\omega\left(t' - \frac{\vec{e}_r\cdot\vec{x}_e}{c}\right)} = i\omega\left(1 - \frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}}{c}\right)e^{i\omega\left(t' - \frac{\vec{e}_r\cdot\vec{x}_e}{c}\right)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left[\frac{\vec{e}_r \times \left(\vec{e}_r \times \vec{v}\right)}{1 - \frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}}{c}}\right] = \frac{\vec{e}_r \times \left[\left(\vec{e}_r - \frac{\vec{v}}{c}\right)\times\dot{\vec{v}}\right]}{\left(1 - \frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}$$

分部积分，可以把它变为另一形式

$$\vec{E}_\omega(\vec{x}) = \frac{e}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vec{e}_r\times\left[\left(\vec{e}_r-\frac{\vec{v}}{c}\right)\times\dot{\vec{v}}\right]}{\left(1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}e^{i\omega\left(t'-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{x}_e}{c}\right)}\mathrm{d}t'$$

$$t = t' + \frac{1}{c}\left(R-\vec{e}_r\cdot\vec{x}_e\right),\ \mathrm{d}t' = \left(1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}}{c}\right)^{-1}\mathrm{d}t$$

$$\vec{E}_\omega(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi}\int\vec{E}(\vec{x},t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

用频谱分析方法导出的$E(x,\ t)$和以前用李纳一维谢尔势导出的表示式一致

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{\vec{e}_r\times\left[\left(\vec{e}_r-\frac{\vec{v}}{c}\right)\times\dot{\vec{v}}\right]}{\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_r}{c}\right)^3}$$

辐射能量的角分布：

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{S}\cdot\vec{e}_r R^2\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}=\varepsilon_0 cR^2\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}^2(t)\mathrm{d}t=4\pi\varepsilon_0 cR^2\int_0^{\infty}\left|\vec{E}_\omega\right|^2\mathrm{d}\omega$$

频率为ω的单位频率间隔辐射能量角分布为

$$\frac{\mathrm{d}W_{\omega}}{\mathrm{d}\Omega}=4\pi\varepsilon_0 cR^2\left|\vec{E}_{\omega}\right|^2$$

此式对dΩ积分即得单位频率间隔辐射能量

$$W_{\omega}=4\pi\varepsilon_0 c\oint\left|\vec{E}_{\omega}\right|^2 R^2\mathrm{d}\Omega$$

2．低速运动带电粒子在碰撞过程中的辐射频谱

当带电粒子入射到物质靶上时，它和靶内原子中的电子和原子核碰撞，在碰撞过程中减速，因而产生辐射。这种辐射称为韧致辐射。X射线的连续谱部分属于这种辐射。

计算当入射电子速度$v \ll c$时所产生的辐射频谱：

$x_e(t) \sim vt$，相因子中的$n \cdot x_e/c$可以忽略（即偶极辐射条件），分母中的$n \cdot v/c$亦可忽略

$x_e(t)\sim vt$，相因子中的$n\cdot x_e/c$可以忽略（即偶极辐射条件），分母中的$n\cdot v/c$亦可忽略

$$\vec{E}_\omega(\vec{x})=\frac{e}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{e}_r\times\left(\vec{e}_r\times\dot{\vec{v}}\right)e^{i\omega t'}\mathrm{d}t'$$

设粒子在很短的时间τ内减速，上式的积分区为$\Delta t'\sim\tau$。若$\omega\ll 1/\tau$，则相因子$e^{i\omega t'}\approx 1$

$$\vec{E}_\omega(\vec{x})=\frac{e}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{e}_r\times(\vec{e}_r\times\dot{\vec{v}})\mathrm{d}t'$$

$$=\frac{e}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikR}}{R}\vec{e}_r\times(\vec{e}_r\times\Delta\vec{v})\qquad(\omega\tau\ll 1)$$

$\Delta v=v_2-v_1$为粒子在时间τ内的速度改变量

设n与Δv 的夹角为Θ，频率为ω的单位频率间隔辐射能量角分布

$$\frac{\mathrm{d}W_{\omega}}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^{2}}{16\pi^{3}\varepsilon_{0}c^{3}}\left|\Delta\vec{v}\right|^{2}\sin^{2}\Theta \qquad (\omega\tau<<1)$$

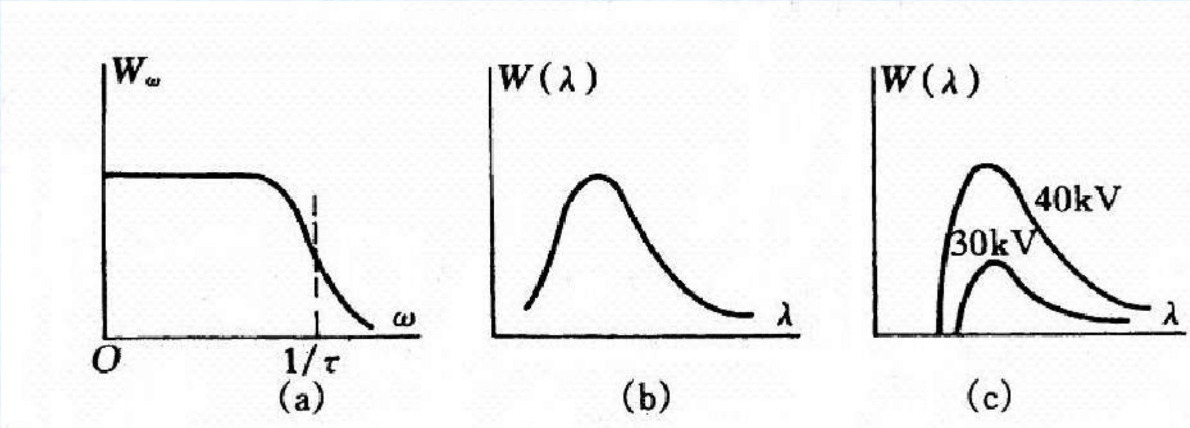
$$W_{\omega}=\frac{e^{2}}{6\pi^{2}\varepsilon_{0}c}\left(\frac{\Delta\vec{v}}{c}\right)^{2} \qquad (\omega\tau<<1)$$

注意当$\Omega<<1/\tau$ 时，W_{ω}与ω无关

当$\omega>>1/\tau$ 时，电场分量中相因子 $e^{i\omega t}$迅速振荡，积分值趋于零

$$W_{\omega}\approx 0 \qquad (\omega\tau<<1)$$

$$W_\omega \approx 0$$



$$W(\lambda) \approx 0$$

由ω=2$\pi c/\lambda$，可得辐射能量按波长的分布

$$W(\lambda) = W_\omega \left|\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\lambda}\right| \approx \frac{e^2}{3\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2 \frac{1}{\lambda^2} \qquad (\lambda >> c\tau)$$

$$W(\lambda) \approx 0 \qquad (\lambda << c\tau)$$

以上结果可以应用于X射线的连续谱分析。实验测量出的连续谱分布

当λ较大时，辐射能量按波长的分布和经典公式相符。但是在短波长范围，实验结果最显著的特点是有一个尖锐的截止波长，相应的截止频率ω_c与电子入射动能E_e成正比，有关系式

$$\hbar\omega_c = E_e$$

$$\hbar = 1.05457266(63)\times 10^{-34}\, J\cdot s$$

h=2πħ--Plank常数

这关系只有用量子理论才能解释，它表示电磁能量是量子化的，频率为ω的光子具有能量ħω当ω小时，光子数目很多，经典电磁理论近似成立。当ω大时，在过程中只涉及小量光子，电磁场的量子化性质显著地表现出来，因而经典理论在这情形下不能适用。

$$W(\lambda)=W_{\omega}\left|\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\lambda}\right|\approx\frac{e^{2}}{3\pi\varepsilon_{0}}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^{2}\frac{1}{\lambda^{2}}\qquad(\lambda>>c\tau)$$

以$N(\omega)$表示光子数分布，由辐射能量得

$$N(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{e^{2}}{6\pi^{2}\varepsilon_{0}c}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^{2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\hbar\omega}=\frac{2\alpha}{3\pi}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^{2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}\qquad(\omega\tau<<1)$$

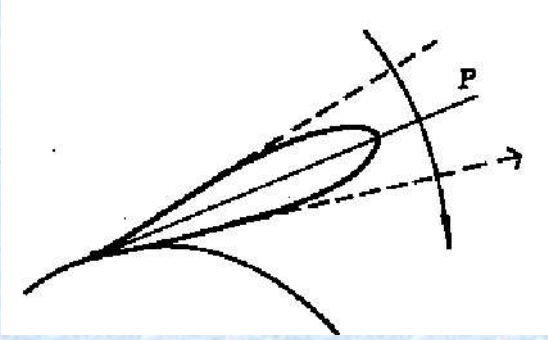
$$\alpha\equiv\frac{e^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}\hbar c}=\frac{1}{137.0359845(61)}$$

3．高速圆周运动带电粒子的辐射频谱

设有一高速运动（$v \approx c$）的带电粒子作圆周运动。在每一瞬间粒子产生的辐射都集中于沿v方向的狭窄射束内，射束的张角为

$$\Delta\theta \sim \frac{1}{\gamma}$$

当粒子作圆周运动时，它产生的辐射好象一个旋转的探射灯一样。在远处的P 点上观察，粒子每转一周时射束只在很短的时间Δt内扫过，因而在P点上观察到的辐射是周期性的脉冲波形。



设轨道半径为ρ，粒子走过路程 ρΔθ 的时间为

$$\Delta t' = \frac{\rho \Delta \theta}{v} \sim \frac{\rho}{c\gamma}$$

在P点上观察到脉冲的持续时间为

$$\Delta t = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)\Delta t'$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{r}{r + \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c}} = \frac{1}{1 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_r}{c}}$$

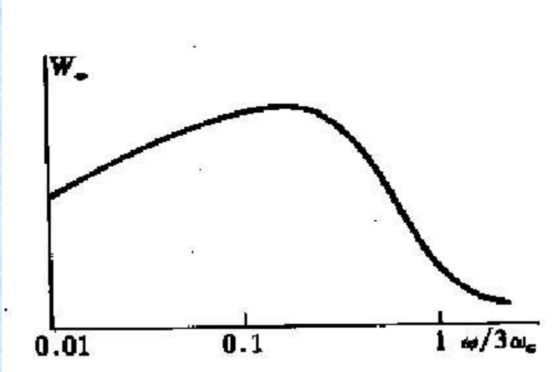
$$1 - \frac{v}{c}\cos\theta \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = 1 - \frac{v}{c}\cos\theta \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)$$

由于 $\langle\theta^2\rangle \sim 1/\gamma^2$ ，

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right) \sim \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\Delta t \sim \frac{\rho}{c\gamma^3}$$

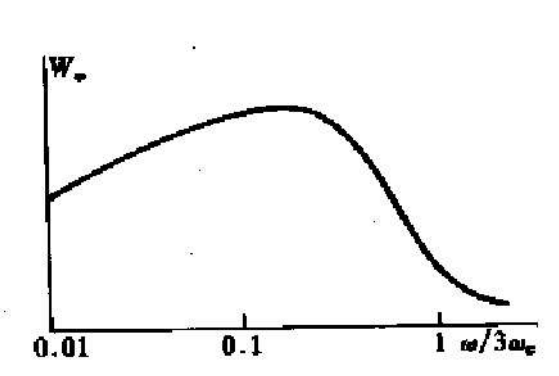


当脉冲时间为Δt时，
频谱主要分布区域

$$\omega \le \omega_c \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \frac{c}{\rho}\gamma^3 = \omega_0 \gamma^3$$

圆周运动是周期性的，辐射可展为博里叶级数，频谱是基频ω_0的整数倍，包括从ω_0到~ω_c的各分量。精确计算出的辐射频谱如图 所示

例如当电子能量为100MeV，ρ =0.4m时， ω_0 ~$8\times10^8 s^{-1}$，γ ~ 200， ω_c ~ 6×10^{15}，λ_c ~ 3000Å



这种辐射在电子同步加速器中观察到，实验结果与理论计算相符。

在天文观测中也看到这种同步辐射，它是由高速运动带电粒子在天体的磁场中作圆周运动而辐射出来的。

作业：**272**页**4**、**5**