*§7.2 高速运动带电粒子的辐射

在电子加速器和其他高能粒子加速器中，带电粒子的速度都非常接近于光速。在宇宙空间中也存在着大量高速运动的带电粒子。因此，研究$v \sim c$情形下高速运动带电粒子的辐射具有重要的实际意义。

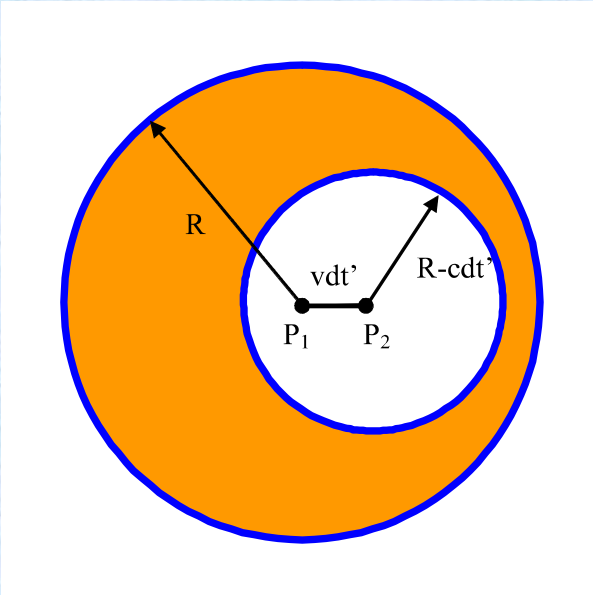
1．高速运动带电粒子的辐射功率和角分布

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\tfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\tfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{E})=\varepsilon_0 cE^2\boldsymbol{e}_r$$

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{\vec{e}_r\times\left[\left(\vec{e}_r-\frac{\vec{v}}{c}\right)\times\dot{\vec{v}}\right]}{\left(1-\frac{v\cdot\vec{e}_r}{c}\right)^3}$$

$$\boldsymbol{S}=\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\boldsymbol{e}_r\times\left[\left(\boldsymbol{e}_r-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]^2}{\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_r}{c}\right)^6}$$

用观察时间时间t计算的单位时间内垂直通过单位截面的电磁能量



观察时间 $t'+R/c$: 以P_1为球心R为半径的球面

观察时间 $t'+dt'$: 以P_2为球心$R-cdt$为半径的球面

$t' \to t'+dt'$: 两球面之间

在t’单位时间内的辐射功率

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{r}{r+\frac{\bar{v}\cdot\bar{r}}{c}}=\frac{1}{1+\frac{\bar{v}\cdot\bar{n}}{c}}$$

$$P(t')=\oint S\cdot e_r r^2 d\Omega\frac{dt}{dt'}$$

$$P(t')=\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\oint\frac{e_r\times\left[\left(e_r-\frac{v}{c}\right)\times\dot{v}\right]^2}{\left(1-\frac{v\cdot e_r}{c}\right)^5}d\Omega$$

辐射功率的角分布为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{e_r\times\left[\left(e_r-\frac{v}{c}\right)\times\dot{v}\right]^2}{\left(1-\frac{v\cdot e_r}{c}\right)^5}$$

高速运动带电粒子辐射角分布的特点:

令θ为n与v的夹角。

当 $v \approx c$时，因子 $1-v\cdot n/c= 1-(v/c)\cos\theta$ 在$\theta\approx 0$方向变得很小，因此辐射能量强烈地集中于朝前方向。

当$v/c \approx 1$和$\theta\approx 0$时因子 $1-(v/c)\cos\theta$可写为

$$1-\frac{v}{c}\cos\theta \approx 1-\frac{v}{c}(1-\frac{\theta^2}{2}) \approx 1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2)$$

$$\gamma=(1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$$

角分布因子为 $$(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^{-5} \approx \frac{32}{(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2)^5}$$

不管加速度方向如何，辐射能量主要集中于沿 v 方向锥角为 $$\Delta\theta \sim \frac{1}{\gamma}$$

2. $\dot{\vec{v}} // \vec{v}$ 情形

$$v \times \dot{v} = 0$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \frac{\vec{e}_r \times \left[\left(\vec{e}_r - \frac{\vec{v}}{c}\right) \times \dot{\vec{v}}\right]}{\left(1 - \frac{v \cdot \vec{e}_r}{c}\right)^3}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} e_r \times E = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \frac{e_r \times \dot{v}}{\left(1 - \frac{v \cdot \vec{e}_r}{c}\right)^3}$$

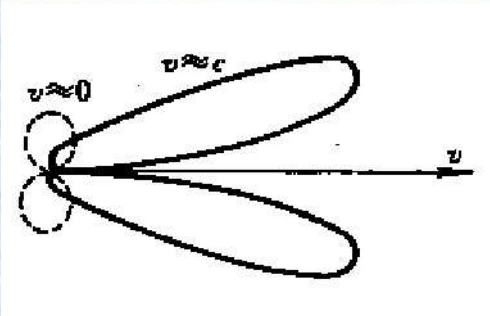
辐射能流为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{q^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \frac{\sin^2\theta}{(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)^6} \boldsymbol{e}_r$$

式中θ为n与v的夹角。辐射角分布为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = r^2 \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{e}_r \frac{dt}{dt'} = \frac{q^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2\theta}{(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)^5}$$

辐射角分布与低速情形相比



辐射功率

$$P(t')=\frac{q^2\dot{v}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\int\frac{\sin^2\theta}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^5}d\Omega=\frac{q^2\dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\gamma^6$$

由于粒子速度不能超过光速，所以当$v\to c$时，在一定作用力下，加速度 $\dot{\vec{v}}$ 的值变得很小。可用粒子所受的力F来表出辐射功率。

在 $\dot{\vec{v}}//\vec{v}$ 情形，由相对论力学方程

$$\boxed{F=\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m\dot{v}}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}=\gamma^3 m\dot{v}}$$

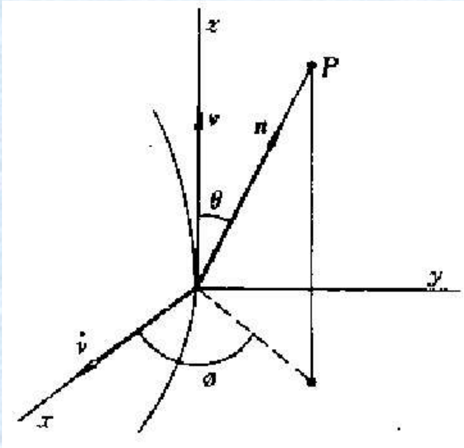
辐射功率

$$P(t')=\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}F^2$$

在一定作用力下，直线运动粒子的辐射功率与粒子能量无关。

3. $\dot{\vec{v}} \perp \vec{v}$ 情形

设在时刻 t' 粒子的瞬时速度 v 沿 z 轴，加速度 $\dot{\vec{v}}$ 沿 x 轴。设 e_r 与 v 的夹角为 θ，有 $e_r \cdot v = v\cos\theta$ ，



$$\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} = 0$$

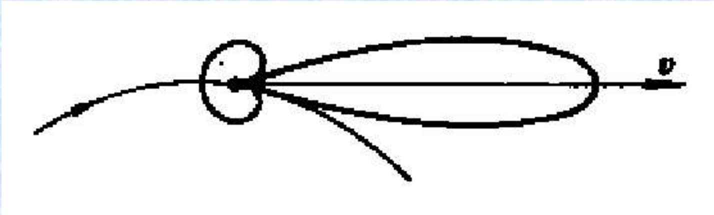
$$\vec{e}_r \times \left[\left(\vec{e}_r - \frac{\vec{v}}{c}\right) \times \dot{\vec{v}}\right] = (\vec{e}_r \times \dot{\vec{v}})(\vec{e}_r - \frac{\vec{v}}{c}) - (1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}}{c})\dot{\vec{v}}$$

$$= |\dot{\vec{v}}| \sin\theta \cos\phi (\vec{e}_r - \frac{\vec{v}}{c}) - (1 - \frac{v\cos\theta}{c})\dot{\vec{v}}$$

$$\left|\vec{e}_r \times \left[\left(\vec{e}_r - \frac{\vec{v}}{c}\right) \times \dot{\vec{v}}\right]\right|^2 = \dot{\vec{v}}^2 \left[\left(1 - \frac{v\cos\theta}{c}\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2\theta \cos^2\phi\right]$$

辐射角分布

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{q^2\dot{v}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\left(1-\frac{v\cos\theta}{c}\right)^2-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\phi}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^5}$$



上式对dΩ积分得辐射功率

$$P(t')=\frac{q^2\dot{v}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\gamma^4$$

在 $\dot{\vec{v}}\perp\vec{v}$ 情形由相对论力学方程得

$$F=\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m\dot{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\gamma m\dot{v}$$

用作用力F表出的粒子辐射功率为

$$P(t')=\frac{q^2F^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2c^3}\gamma^2$$

目前有两种类型的电子加速器，一类是直线型的，另一类是圆周型的。

在后一类电子加速器中，用一定电磁作用力使电子加速时，电子由于受到加速而产生辐射，辐射功率与电子能量平方成正比。电子能量愈高，辐射损耗就愈大。当辐射损耗等于加速器所提供的功率时，电子就不再受到加速。

直线型加速器由于辐射损耗与电子能量无关，因而加速能量不受这限制。因此，目前能量较高的电子加速器一般采用直线型。