# 第七章　　带电粒子和电磁场的相互作用

主要内容：

一、运动带电粒子的势和辐射电磁场

二、高速带电粒子的辐射

三、辐射的频谱分析

四、切连科夫辐射

五、带电粒子的场对粒子本身的反作用

六、电磁波的散射和吸收，介质色散

# §1 运动带电粒子的势和辐射电磁场

学习主要内容

1、运动带电粒子的势和电磁场

2、高速运动带电粒子的辐射

复习

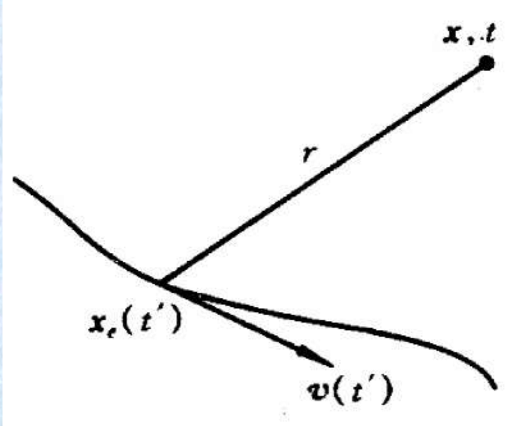
1、推迟势

2、电偶极辐射公式

# §1 运动带电粒子的势和辐射电磁场

## 1. 任意运动带电粒子的势

带电粒子在外力作用下沿某一特定运动。在场点$x$处，在时刻$t$的势是粒子在较早的时刻$t'$激发的，该时刻粒子处于$x_e(t')$点上，其运动速度为$v(t')$，粒子与场点的距离为




$$r=\left|\vec{x}-\vec{x}_e(t')\right|=c(t-t')$$

为了计算带电粒子激发的势，我们把粒子看作在小体积内电荷连续分布的极限。
由推迟势的一般公式为

$$\varphi(\vec{x},t)=\int\frac{\rho(\vec{x}',t-\frac{t}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\int\frac{\mu_0\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{t}{c})}{4\pi r}\mathrm{d}V'$$

对带电粒子来说，$J=\rho v$，$v$为粒子在辐射时刻$t'=t-r/c$的速度。由上式看出，势依赖于粒子运动的速度，但不依赖于加速度。

选择一个在粒子辐射时刻相对静止的参考系

$$\tilde{\varphi}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\tilde{r}},\quad \tilde{\mathbf{A}}=0$$

在其上观察，($x$, $t$)点上势的瞬时值与静止点电荷的势相同

$$\tilde{r}=c\left(\tilde{t}-\tilde{t}'\right)$$

## 变回原参考系∑上

在∑上观察，粒子在时刻 $t$ 的运动速度为 $v$，因此 $v$ 也就是参考系 $\tilde{\Sigma}$ 相对于∑的运动速度。对上述势应用洛伦兹变换式

$$\vec{A} = \frac{\vec{v}\tilde{\varphi}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{q\vec{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \tilde{r}}$$

$$\varphi = \frac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{r}}$$

式中 $\tilde{r}$ 可以把它改用∑系上的距离表示

$$\tilde{r}=c(\tilde{t}-\tilde{t}')=\frac{c(t-t')-\frac{\vec{v}}{c}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{r-\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

李纳—维谢尔（Lienard—Wiechert)势

$$\vec{A}=\frac{q\vec{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2(r-\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r})},\quad \varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r})}$$

注意上式右边各量都是在时刻 $t'=t-r/c$ 上所取的值，例如 $v=v(t')$，$r=x-x_e(t')$ 等.

把势对场点空时坐标$x$和$t$求导数可得电磁场强。注意右边是$t'$的函数，而求电磁场时要对$x$和$t$求导数。

$$t' = t - \frac{r}{c} = t - \frac{\sqrt{[x - x_e(t')]^2}}{c}$$

给出$t'$为$x$和$t$的隐函数。必须先求$\partial t'/\partial t$和$\nabla t'$。

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial r(t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$= 1 + \frac{1}{cr}\vec{r}\cdot\frac{\partial x_e(t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$t' = t - \frac{r}{c} = t - \frac{\sqrt{[x - x_e(t')]^2}}{c}$$

$$= 1 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

其中$v=\partial x_e(t')/\partial t'$是粒子在时刻$t'$的速度。

由上式解得

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{r}{r - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c}} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_r}{c}}$$

$e_r$为$r$方向单位矢量

再求$t'$式对$x$的梯度。由于$r=|x-e(t')|$为$x$和$t'$的函数，而$t'$又隐含$x$，因此

$$\nabla t' = -\frac{1}{c}\nabla r = -\frac{1}{c}\nabla r\Big|_{t'=C} - \frac{1}{c}\frac{\partial r(t')}{\partial t'}\nabla t'$$
$$= -\frac{\vec{r}}{cr} + \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}\nabla t'$$

解出

$$\nabla t' = -\frac{\vec{r}}{c(r-\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c})} = -\frac{\vec{e}_r}{c(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_r}{c})}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{r}{r + \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c}} = \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_r}{c}}$$

$$\nabla t' = -\frac{\vec{r}}{c(r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{cr})} = -\frac{\vec{e}_r}{c(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_r}{cr})}$$

利用这两个公式可由势的公式求出电磁场

## 2. 偶极辐射

$v << c$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1$$

$$\nabla t' = -\frac{\vec{r}}{cr} = -\frac{\vec{e}_r}{c}$$

把势$A$和$\varphi$ 的公式对时空坐标微分后
再令$v \to 0$，得

$$B = \nabla \times A = \nabla \times A\Big|_{t'=C} + \nabla t' \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'}$$

$$\vec{B}=\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}-\frac{\vec{r}}{cr}\times\frac{q\dot{\vec{v}}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}&=-\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla\varphi=-\frac{q\dot{\vec{v}}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}+\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 r^3}-\nabla t'\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\\&=\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 r^3}-\frac{q\dot{\vec{v}}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}+\frac{\vec{r}}{cr}\frac{q\dot{\vec{v}}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 cr}\\&=\boxed{\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}\boxed{-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{v}})}\end{aligned}$$

库仑场　　　　辐射场

库仑场与$r^2$成反比，它存在于粒子附近，当$r$大时可以略去。略去库仑场后，得低速运动粒子当有加速度 $\dot{\vec{v}}$ 时激发的辐射电磁场

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \dot{\vec{v}})$$

$$\vec{B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\dot{\vec{v}} \times \vec{e}_r = \frac{1}{c}\vec{e}_r \times \vec{E}$$

令$p=ex_e$为带电粒子的电偶极矩，则 $\ddot{\vec{p}} = e\dot{\vec{v}}$

与电偶极辐射公式一致。低速运动带电粒子当加速时激发电偶极辐射。

辐射能流、方向性和辐射功率的计算和电偶极辐射相同。以$\Theta$代表$r$和 $\dot{\vec{v}}$⊕ 的夹角，辐射能流为

$$S=\frac{q^2\dot{v}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\Theta\vec{e}_r$$

因子$\sin^2\Theta$表示辐射的方向性。在与$\dot{\vec{v}}$垂直的方向上辐射最强。

## 总辐射功率

$$P=\int \vec{S}\cdot\vec{n}r^{2}\mathrm{d}\Omega=\frac{q^{2}\dot{\vec{v}}^{2}}{6\pi\varepsilon_{0}c^{3}}$$

可以近似地应用于X射线辐射问题上，X射线连续谱部分是由入射电子碰到靶上受到减速而产生的。当电子突然变速时，产生一脉冲电磁波，形成X射线的连续谱部分。

# *3. 任意运动带电粒子的电磁场

小结：$v \to 0$情形下加速运动带电粒子的电磁场，一部分是库仑场，另一部分是和加速度有关的辐射场。

任意运动速度：作洛伦兹变换，可以得到下带电粒子激发的电磁场。这电磁场同样分为两部分。一部分是由库仑场作洛伦兹变换而得的；另一部分是和加速度 $\dot{\vec{v}}$ 有关的辐射场。

下面用李纳---维谢尔势直接计算运动带电粒子的辐射电磁场。

求辐射场时，注意凡是对含$r$或$r$的因子求微商时，结果都使分母的$r$幂次增加，但通过$v(t')$对变量$t'$求微商时不会增加分母的$r$幂次。因此，在只保留$1/r$最低次项时，只需通过$v$对$t'$求导数。

令 $$S = r - \frac{\dot{\vec{v}} \cdot \vec{r}}{c}$$

得 $$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t'}\nabla t' = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 s^3}\left(\dot{\vec{v}}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}$$

$\nabla\varphi$ 沿$r$方向

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = \left[\frac{q\dot{\vec{v}}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 s} + \frac{q\vec{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 s^2}(\dot{\vec{v}}\cdot\vec{r})\vec{r}\right]\frac{r}{s}$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 s^3}\left[\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{v}}\right)\vec{r}-rs\dot{\vec{v}}-\frac{r\vec{v}}{c}\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{v}}\right)\right]$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 s^3}\vec{r}\times\left[\left(\vec{r}-\frac{\vec{v}}{c}r\right)\times\dot{\vec{v}}\right]$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{\vec{e}_r\times\left[\left(\vec{e}_r-\frac{\vec{v}}{c}\right)\times\dot{\vec{v}}\right]}{\left(1-\frac{v\cdot\vec{e}_r}{c}\right)^3}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\nabla t'\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}=-\frac{r}{cs}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}=-\frac{\vec{r}}{cr}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

由于$\nabla\varphi$ 沿$r$方向，$r\times\nabla\varphi=0$，因此由上式得

$$\vec{B}=\frac{\vec{r}}{cr}\times\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\right)=\frac{1}{c}\vec{e}_r\times\vec{E}$$

辐射场与加速度 $\dot{\vec{v}}$ 成正比。当带电粒子受到加速时，就有电磁波辐射。辐射场是横向的，即$E$和$B$都与$n$垂直，并且$B$和$E$互相垂直。此外，辐射场与$r$成反比，能流与 $r^2$ 成反比，因而总辐射能量可以传播到任意远处。

作业：272页1题