§ 6.6 相对论力学

1.学习目标

能量----动量的关系

质能关系

相对论力学方程

2.复习和思考

四维矢量的特点

电磁张量

引言------粒子：在相对论力学中的一个重要概念是粒子。
它的概念表现在：

（1）相对论力学中不再存在刚体的概念（模型）

牛顿力学：刚体的概念：一质点组在内力外力作用下不发生形变，则该质点组为一刚体。

相对论力学：

相对论认为光速是一切相互作用传递的极限，因而力的作用是有限的，受力点对其它质点的力作用传递是逐步传递的，即不是同时到达各点，具有推迟效应，这样质点组必定发生形变，这样质点组必定发生形变 --------- 刚体概念不复存在

/粒子的质点性/相对论质点力学。

一. 四维动量

1. 牛顿力学（非相对论力学）中的动量:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

三维矢量，它不是四维矢量，不满足洛仑兹变换，是一个非相对论物理量。

2. 四维动量:

（1）定义: m_0：质点在与其保持静止的坐标系中测得质量称为静止质量，它是一个不变量，记作 m_0

（b）由$u_\mu = \dfrac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \dfrac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t}$仿牛顿力学可以定义：

$$\boxed{p_\mu = m_0 u_\mu}$$

（2）p_μ 的分量及其物理意义：

$p_\mu = (p_i, p_4)$　其中$p_i = p_1, p_2, p_3$ 为空间分量

p_4 为时间分量

（a）空间分量：

$$p_i = m_0 u_i = m_0 \gamma v_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

物理意义：

当 i 取 $1, 2, 3$ 即 x，y，z 时，p_i 可以写成：

$$\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

当 $v \ll c$ 时，它应过渡到非相对论牛顿结论上，有

$$\vec{p} = m_0 \vec{v}$$

这正是粒子（质点）的动量。

（b）时间分量：

$$\boxed{p_4 = m_0 \gamma i c = \frac{i}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\boxed{p_4 = m_0\gamma ic = \frac{i}{c}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

令： $E = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 则 $p_4 = \dfrac{iE}{c}$

物理意义： 当 $v << c$ 时，将 $\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 展开，有：

$$E = m_0c^2(1+\frac{v^2}{2c^2}+\frac{3v^4}{8c^4}+\cdots) = m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2+\cdots$$

第二项$\frac{1}{2}m_0v^2$显然是牛顿力学中的动能，记作T

$$T=\frac{1}{2}m_0v^2$$

$$\boxed{E=m_0c^2+T+\cdots}$$

$\because T$ 为动能，故 E 也是能量量纲，我们称 E 为粒子的总能量。

当粒子静止，则 $v=0$ 这时，$E=m_0c^2$ 称为粒子的静止能量。

可见，$E=m_0c^2+T$ 即粒子总能量由粒子的静止能量和粒子运动能量两部分构成。

正因E为总能量，而$p_4 = \dfrac{iE}{c} \propto E$，故$p_4$称为四维动量的能量分量。

（c）p_μ的分量表达式可写成 $p_\mu = (\vec{p}, \dfrac{i}{c}E)$

正因为包含动量和能量分量，故p_μ通常被称为能量——动量四维矢量。

（d）变换：

$$p_\mu^{'} = a_{\mu\gamma} p_\gamma$$

若$a_{\mu\gamma}$为洛仑兹变换矩阵，则有：

$$\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \\ p_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1' = \gamma(p_1 - \dfrac{v}{c^2}E) \\ p_2' = p_2 \\ p_3' = p_3 \\ p_4' = \gamma(\dfrac{i}{c}E - i\beta p_1) \Rightarrow E' = \gamma(E - vp_1) \end{cases}$$

二. 相对论运动方程：

1. 牛顿力学运动方程： 牛顿第二定律定义为：

$$\vec{f} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

它在伽利略变换下协变，但在洛仑兹变换下不协变，不满足相对论要求，故加以改造。

2. 相对论运动方程：

（1）四维力：

（a）定义： $\because\ p_\mu = m_0 u_\mu$ 为四维矢

$$\therefore \mathrm{d}p_\mu = m_0 \mathrm{d}u_\mu$$ 也为四维矢

定义 $$\boxed{F_\mu = \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}}$$ $\because \mathrm{d}\tau$ 为不变量

F_μ 也为四维矢，亦称闵可夫斯基力。

$$F_\mu = \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0 u_\mu) = m_0 \frac{\mathrm{d}^2 x_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

$$\because F_\mu' = m_0 \frac{\mathrm{d}^2 x_\mu'}{\mathrm{d}\tau^2} = m_0 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}(a_{\mu\gamma} x_\gamma') = a_{\mu\gamma} m_0 \frac{\mathrm{d}^2 x_\gamma}{\mathrm{d}\tau^2}$$

$$\therefore F_\mu' = a_{\mu\gamma} F_\gamma$$

即它在洛仑兹变换下协变，为一个相对论物理量。

（b）F_μ 的分量及其物理意义：

$$F_\mu = (F_i, F_4) = (\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}p_4}{\mathrm{d}\tau}) \qquad (i = 1,2,3)$$

其分量：

（ i ）空间分量 F_i ：

$$F_i = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0 u_i) = \frac{\mathrm{d}(m_0\gamma v_i)}{\mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{(m_0 v_i)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}$$

设 $\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = f_i$ 当 $v << c$ 时，即为牛顿力，

现在讨论相对论情况下的 f_i ：

f_i 表达式可写成：

$$\vec{f} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) \qquad \text{（A）}$$

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

称为粒子的运动质量。

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

称为粒子的动量。

（ii）时间分量 F_4 ：

$$\boxed{F_4 = \frac{\mathrm{d}p_4}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\,\frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\,\frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}$$

可见四维力的时间分量正比与粒子的能量时间变化率。

$$p_\mu p_\mu = p_\mu{}^2 = m_0{}^2 u_\mu{}^2 = m_0 \frac{v^2 - c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -m_0{}^2 c^2$$

上式微分有：
$$2 p_\mu \frac{\mathrm{d} p_\mu}{\mathrm{d} \tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} \tau}(-m_0 c^2) = 0$$

$$\therefore\ p_\mu \frac{\mathrm{d} p_\mu}{\mathrm{d} \tau} = 0 \qquad \because\ \frac{\mathrm{d} p_\mu}{\mathrm{d} \tau} = F_\mu$$

$\therefore\quad p_\mu F_\mu = 0$（标积为零，所以矢量 p_μ 与矢量 F_μ 相互垂直）

即 $p_1 F_1 + p_2 F_2 + p_3 F_3 + p_4 F_4 = 0$

$$\therefore\ p_4 F_4 = -p_i F_i = -\vec{p}\cdot\vec{F} \quad (i = 1,2,3)$$

$$\because\ \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \vec{F} = \frac{\vec{f}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore\ p_4 F_4 = -\frac{m_0 \vec{v}\cdot\vec{f}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\because\ p_4 = \frac{i}{c}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, F_4 = \gamma\,\frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

∴ 上式可写成：

$$\frac{i}{c}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{i}{c}\frac{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-\frac{m_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}{1-\frac{v^2}{c^2}}=-\frac{m_0\vec{v}\cdot\vec{f}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\cdot\vec{f}}$$

即 E 的时间变化率等于力对粒子所做的功率，根据能量守恒，力对粒子所做的功率等于粒子能量增加率，故 E 具有能量意义，这与我们从 $E=m_0c^2+T+\cdots$ 而得到 E 为粒子能量的结论相同。

3. 说明：

（1）$F_\mu = \dfrac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}$ 称为四维形式的相对论力学运动方程。

（2）$f_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\,(f_i = \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t})$ 称为三维形式相对论力学运动方程。

（3）$\vec{F} = \gamma\vec{f} = \gamma\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ 为四维力 F_μ 的空间分量。

（4）$\vec{f} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 与牛顿力学中的 $\vec{f}$ 根本不同之处在于 m 不是恒量 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ 随粒子速度变化而变化。

（5） v 的含义：

$$F_4 = \gamma \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{i m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

（ i ） v 若是 K' 系速度： v 是常量，则 $F_4 = 0$

显然不对。

（ ii ） v 若是粒子速度：因为粒子速度是变化的，即有加速度。那么狭义相对论条件将被改变，显然也不对。

（iii）正确理解： v 既是粒子速度，又是随粒子运动而与粒子相对静止坐标系的速度，但应理解为 v 是“瞬时”速度，

我们的计算也是瞬时的，可以认为粒子运动过程是无限多个“瞬时”过程组成，每个“瞬时”速度不同， v 可以是时间函数。

（6）相对论力学方程： 由 $F_\mu = \dfrac{dp_\mu}{d\tau}$ 和 $p_\mu F_\mu = 0$ 可以得到

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)}$$

$$\boxed{\vec{f} \cdot \vec{v} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

这二个方程常被称为相对论力学方程。

（7）能量、动量、质量关系式：

$$\because\ p_\mu p_\mu = p_1 p_1 + p_2 p_2 + p_3 p_3 + p_4 p_4 = p^2 - \frac{E^2}{c^2}$$

$$\text{又}\because\ p_\mu p_\mu = (m_0 u_\mu)(m_0 u_\mu) = -m_0^2 c^2$$

$$\therefore\ p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$$

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$ —— 能量、动量、质量关系

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^{\ 2}c^4}$$

当$m_0 = 0$，有 $E = pc$ 这是对静止质量为零的粒子的能量动量关系，例如光子。

（8）能量、动量关系：

$$\because \quad p_i = m_0\gamma v_i \Rightarrow \vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\text{又} \because \quad E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{p} = E\frac{\vec{v}}{c^2}}$$

三. 质能关系：

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=mc^2 \qquad (m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}})$$

当粒子静止 $E_0=m_0c^2$

上边二式称为质能关系。式中 E 为粒子总能量， m 为运动质量， m_0 为静止质量（四维标量）， E_0 为粒子静止能量。

讨论:

（1） $\because$ $E=m_0c^2+T$ $\quad E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\therefore \quad T=E-m_0c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}-m_0c^2$$

即运动动能为总能量减去静止能量。

（2） $E = m_0 c^2 + T$

$m_0 c^2$ 为不变量，因而为能量的附加常数项

$m_0 c^2$

非相对论中：

没有意义

数学上：能量附加常数项无意义，能量无绝对意义。

物理上：不考虑粒子静止状态的还存在能量。

相对论中：

有意义

数学上：满足洛仑兹协变，删去 $m_0 c^2$ 或用其它常数项代替，不满足协变要求。

物理上：由能量守恒和转化定律知,$m_0 c^2$ 应当可以转化其它能量,$m_0 c^2$ 被称为内檁能量。

（3）结合能与质能亏损：

对于单个粒子有 $E_0 = m_0 c^2$

对于多粒子体系也有 $E_0 = M_0 c^2$ 式中 E_0 为体系静止时（质心静止时）体系的能量，M_0 为体系的静止质量。

但 $E_0 \neq \sum_i m_{0i} c^2$ m_{0i} 为体系第 i 个粒子的静止质量

$$\boxed{p_\mu = m_0 u_\mu}$$

$$\boxed{E = m_0 c^2 + T + \cdots}$$

$$\boxed{F_\mu = \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}}$$

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \cdot \vec{f}}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)}$$

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m_0{}^2 c^4}$$

$$\boxed{\vec{p} = E\frac{\vec{v}}{c^2}}$$

$$\boxed{E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2}$$

五. 总结：

（1）在相对论力学中所得的结论适用于质点，刚体概念在相对论中不复存在；

（2）相对论力学常用于高能粒子、带电粒子在电磁场中的运动，基本粒子碰撞与转化领域；

（3）在运用相对论力学解题时，主要运用的定律、定理、公式：

（ i ）能量守恒定律；

（ ii ）动量守恒定律；

（iii）相对论力学结论和关系式，如：能量、动量表达式，质能关系，能量、动量、质量三者关系式，能量、动量关系式等。

作业：292页 17、18、25