§ 6.3　相对论的时空理论

1、学习目标

能说明“运动长度变短，运动时钟变慢”的原因；

会推导和应用速度变换公式。

2、复习和思考

相对论的基本假设

间隔不变

洛仑兹变换

一、 同时的相对性：

对 $\sum$ 系（ C 点所在坐标系） A、B 点二个事件的坐标为 (x_1, y_1, z_1, t_1) , (x_2, y_2, z_2, t_2)

对 $\sum'$系（ C' 点所在坐标系） A、B 点二个事件的坐标为 (x_1', y_1', z_1', t_1') , (x_2', y_2', z_2', t_2')

洛仑兹变换:

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$\therefore$

$$\boxed{\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x)}$$

几种同时性情况讨论：

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x)$$

若 $\Delta t = 0$ $\Delta x \neq 0$

则 $\Delta t' \neq 0$ 不同时　　S 同时不同地，S' 不同时

若 $\Delta t = 0$ $\Delta x = 0$

则 $\Delta t' = 0$ 同时，　　S 同时同地，S' 同时

若 $\Delta t \neq 0$ $\Delta x = 0$

则 $\Delta t' = \gamma \Delta t$ 变长，　　S 不同时同地，S' 不同时

若 $\Delta t = \frac{u}{c^2}\Delta x (\Delta x \neq 0)$

则 $\Delta t' = 0$　　S 不同时不同地，S' 可同时

$$\boxed{\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x)}$$

若$\boldsymbol{\Delta t > 0}$;则$\boldsymbol{\Delta t' > 0}$,因果关系不颠倒

$$\because \Delta t' = \gamma \Delta t(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}) = \gamma \Delta t(1 - \frac{u}{c^2}v_x)$$

例：起跑---冲线

枪响---鸟落

$\because uv_x$总是小于 c^2,若$\Delta t > 0$则$\Delta t' > 0$,因果关系不颠倒

结论：同时性是相对的，两件事是否同时，取决于惯性系

每个惯性系有自己的同时性，各系不统一。

二、 运动尺度的缩短：

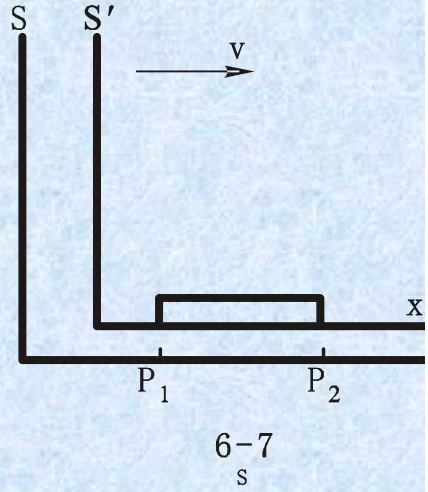
1、尺与$\sum'$ 系相对静止的尺子：在$\sum'$ 系上测得长度为 $l_0 = x_2' - x_1'$ 我们看一下在$\sum$系测这把尺子的长度 l 是多少？

$\sum'$: (x_1', y_1', z_1', t_1') 和 (x_2', y_2', z_2', t_2')

$$y_1' = y_2' = 0 \quad z_1' = z_2' = 0$$

$\sum$: (x_1, y_1, z_1, t_1) 和 (x_2, y_2, z_2, t_2)

$$y_1 = y_2 = 0 \quad z_1 = z_2 = 0 \quad t_2 = t_1$$



t_2' 可以不等于 t_1'

据洛仑兹变换有：

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore \qquad x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\because \quad x_2' - x_1' = l_0$$

$$\therefore \quad l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad 即 \quad l < l_0$$

物理意义？

2、当尺子与 $\sum$ 系相对静止，其长度为 $l_0 = x_2 - x_1$（$\sum$ 上看）而 $\sum'$系上测尺子长度为 l（这时 $t_2' = t_1'$）则有：

$$x_1 = \frac{x_1' - vt_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x_2 = \frac{x_2' - vt_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_2 - x_1 = l_0 = \frac{(x_2' - x_1') - v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore \gamma l = l_0$$

同样这运动的尺子缩短了。

是在 x 方向测得的，所以得到结论：运动的尺子在运动的方向收缩了，其中在与尺子相对静止的坐标系中测得的长度 l_0 称为固有长度。（考虑：用间隔相等做？）

三.时间间隔的相对性 ———— 运动时钟延缓

$$\Sigma' \quad \Delta t' = t_2' - t_1'$$

在 Σ 系中测得这个事件的时间间隔为多少？

二个事件在 Σ'系中和 Σ 系中的坐标分别为：

Σ'　　(x_1', y_1', z_1', t_1') 和 (x_2', y_2', z_2', t_2')

Σ　　(x_1, y_1, z_1, t_1) 和 (x_2, y_2, z_2, t_2)

根据洛仑兹变换有：

$$t_1 = \frac{t_1' + \dfrac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad t_2 = \frac{t_2' + \dfrac{v}{c^2} x_2'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore \quad \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$\because$ 物体相对 $\sum'$ 静止，$\therefore \ x_2' = x_1'$ （在同一物体上，$x_2' = x_1'$，故）

$$\therefore \quad \Delta t = \frac{(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$\Delta t > \Delta t'$ 可见时间间隔有相对性。

而 $\Delta t > \Delta t'$，但又是测得同一物理过程，故 $\sum'$ 系认为 $\sum$ 系的用来测量过程的钟变慢了。

那么，在 $\sum$ 系静止的物体上发生的二个事件的时间间隔，在 $\sum'$ 中为多少呢？

$\Delta t = t_2 - t_1$ （$\sum$ 系上同一地点不同时刻的二个事件的时间间隔）

$$\because \quad t_1' = \frac{t_1 + \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t_2' = \frac{t_2 + \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t^{'} = t_2^{'} - t_1^{'} = \frac{(t_2 - t_1) + \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$\therefore \quad \Delta t^{'} > \Delta t$ 即 $\sum'$ 上的人认为 $\sum$ 系的钟变慢了。

由上述两个例子可以看出：

（**1**）所有惯性系都认为对自己有相对运动的坐标系上的时钟———运动时钟变慢。

（**2**）看着在同一地点发生的二个事件之间的时间间隔最短，这个时间间隔称为原时间间隔，也称为固有时间间隔**.**

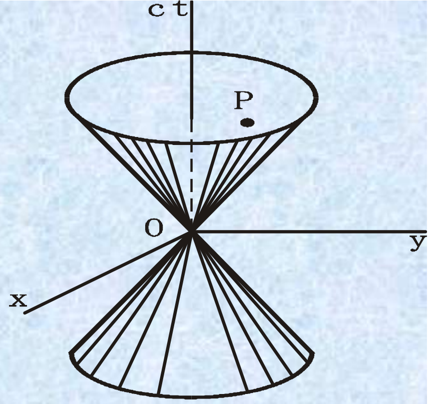
记做 τ 即与二个事件相对静止的坐标系中测这二个事件的时间间隔为固有时间间隔，且最短。

解释宇宙射线----μ中子、π介子。

$$\therefore \quad \Delta t' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Delta t = \frac{\tau'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

注意： 时钟延缓效应在狭义相对论中是相对的，在广义相对论中是绝对的，当运动时钟绕闭合回路做加速运动最后返回原地时，它所经历的总时间小于原地静止时钟所经历的时间 运动时钟绝对变慢。这种效应是狭义相对论和广义相对论的总效应。

3）S^2 或 S'^2 物理意义：



6－5
s

（i） $S^2 = 0$ ：两事件之间用光信号联系；

（ii） $S^2 > 0$ ：两事件之间用低于光速的信号联系；

（iii） $S^2 < 0$ ：两事件之间空间距离超过光信号在时间 t 内所能传播的距离。

$$(\because r > ct, \therefore S^2 < 0)$$

四. 速度变换公式

任一物体运动时，由 $\sum$ 系测得其速度为 u_x、u_y、u_z 在 $\sum'$ 系中测得该物体速度为多少？（$\sum'$ 相对 $\sum$ 沿 x 轴方向以 v 速度运动）这可由洛仑兹变换得到：

设：$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

由洛仑兹变换得：

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

又 x 为 t 的函数，则 $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t = u_x \mathrm{d}t$

$$\therefore \quad \mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t - v\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(u_x - v)\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(1 - \frac{v}{c^2}u_x)\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore \quad u_x' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

$$\because \quad \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \qquad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}t' = \frac{(1 - \frac{v}{c^2}u_x)\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$u_y' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{(1 - \frac{v}{c^2}u_x)\mathrm{d}t} = \frac{u_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

$$u_z' = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)\mathrm{d}t} = \frac{u_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

以上为速度变换公式，当 $v << c$ 时，可过渡到伽利略速度变换公式：

$$u_x' = u_x - v \qquad u_y' = u_y \qquad u_z' = u_z$$

相对论速度变换公式的反变换式为（自己写）：

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u_x'} \quad u_y = \frac{u_y' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u_x'} \quad u_z = \frac{u_z' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u_x'}$$

说明：

（1）如果对一惯性系的速度小于 c，则对于任何惯性系的速度也小于 c。即 $|\vec{u}| < c$，则 $|\vec{u}'| < c$。（以 $\vec{u}$ 和 $\vec{u}'$ 沿 x 或 x' 轴方向为例）这个结论的证明有两种方法：①利用速度变换公式证明；②利用时空间隔不变性证明。

若 $u_x' = c \quad v = c$ 时

非相对论中： $u_x = u_x' + c = c + c = 2c > c$

相对论中： $$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u_x'} = \frac{c + c}{1 + 1} = \frac{2c}{2} = c$$

可见，在相对论中一切物质相互作用传播的速度极限为 c

（**3**）速度变换公式是指在不同惯性系中各自测得的物质的速度之间的变换关系，而不是指各自在各自坐标中所测得的物体速度与另外惯性系之间相对速度的变换关系。

例1：$\Delta t_0=10s \quad \Delta x_0=100m \quad u=0.98c$

注意:不是同地发生的两件事$\therefore$不能用 $\Delta t = \gamma \Delta t_0$

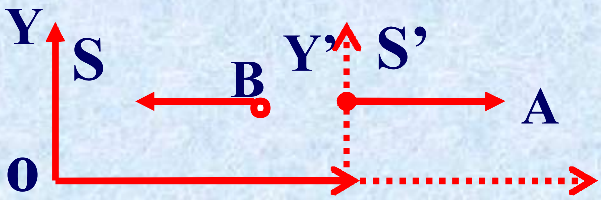
$$\therefore \; t' = \gamma (t - x\, u/c^2)$$

$$\Delta t' = \gamma (\Delta t_0 - \Delta x_0\, u /c^2) = 50.2\ s$$

$\because$ $\Delta t' \neq 0$不是同时测量 $\Delta x'$

$$\therefore \; x' = \gamma (x - u\, t)$$

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - u \Delta t_0) = 1.48 \times 10^{10} m$$



例2: $V_A=0.9c=u, V_B=-0.9c$

考察B点: 地球 S, A为S'

解:相对论 :(真空中)$v'_{BA}=\dfrac{v_{Bx}-u}{1-\dfrac{u}{c^2}v_{Bx}}$

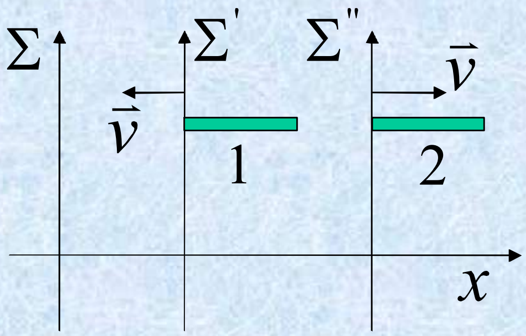
$$=\frac{-0.9c-0.9c}{1+0.9^2}=-\frac{1.8}{1.81}c=-0.995c$$

$\left|v_B'\right|<c$,小于光速

经典:$\vec{v}_{BA}'=\vec{v}_{BS}-\vec{u}_{S'S}=-0.9c-0.9c=-1.8c$

若在介质中: $v_B'=\dfrac{\dfrac{v_{Bx}}{n}-u}{1-\dfrac{u}{c^2}\cdot\dfrac{v_{Bx}}{n}x}=\dfrac{0.9+0.9n}{0.9\times0.9+n}c$

3.设有两根互相平行的尺,在各自静止的参考系中的长度均为l_0,它们以相同的速率v相对于某一参考系运动,但运动方向相反,且平行于尺子,求站在一根尺上测量另一根尺的长度.



解:与尺子1,2静止的坐标系分别为Σ'和Σ'',Σ'和Σ''以速率v沿Σ系的x轴运动.

在Σ系中看尺子1的速度为$u_x=-v$,

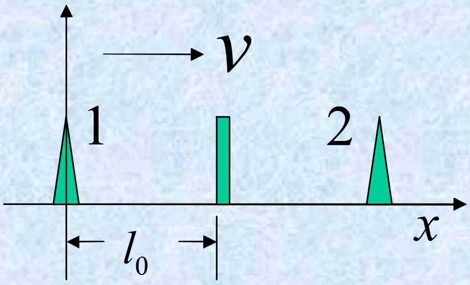
则在Σ''系中看尺子1的速度为:

$$u_x''=\frac{u_x-v}{1-\frac{u_x v}{c^2}}=\frac{(-v)-v}{1-\frac{(-v)v}{c^2}}=\frac{-2v}{1+\frac{v^2}{c^2}},$$

即尺子以u_x''相对于Σ''运动,也就是Σ'以速度u_x''相对于Σ''运动.

$\therefore$ 在Σ''系中看尺子1的长度为 $l=l_0\sqrt{1-\frac{(u_x'')^2}{c^2}}=l_0\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}$

一以速度v运动的列车上的观察者，在经过某一建筑物时，看见其避雷针上跳起一脉冲电火花，先后照亮了铁路沿线上的两铁塔.求列车上观察者看到的两铁塔被电光照亮的时刻差.设建筑物及两铁塔都在一直线上，与列车前进方向一致.铁塔到建筑物的地面距离已知都是l_0.



解：设地面为Σ系，与火车相对静止的为Σ'系，设两系在初始时刻原点重合，都在其中的一个塔处，如图.

设塔1被照亮为事件 P_1，塔2被照亮为事件 P_2.

在Σ'系中，坐标为 $P_1(0,0,0,t_1')$, $P_2(l,0,0,t_2')$，其中 $t_1'=0$

在Σ系中，坐标为 $P_1(0,0,0,t_1)$, $P_2(2l_0,0,0,t_2)$，其中 $t_1=t_2=0$

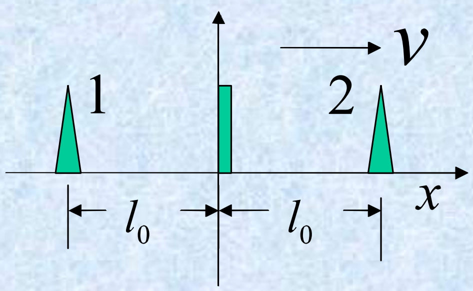
$$\Delta t = t_2' - t_1' = t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t = t_2^{'} - t_1^{'} = t_2^{'} = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0 - \frac{v}{c^2}2l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-2l_0 v}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

[说明]

(1)$\Delta t < 0$说明若列车的行进方向 如图,则在列车上看到光先照亮塔 2再照亮塔1.

(2)本题也可把原点选在避 雷针处,如下图.



例二：求均匀运动介质中的光速

解：情况一：设介质沿 x正方向运动，速率为 v

$$\because \quad u'_x=\frac{c}{n} \qquad \therefore \quad u_x=\frac{c/n+v}{1+v/cn}$$

情况二：设介质沿 x负方向运动，

$$u_x=\frac{c/n-v}{1-v/cn}$$

情况三：设介质沿垂直 光的方向运动 (重建坐标),

$$u'^2_y+u'^2_x=\left(\frac{c}{n}\right)^2 \qquad u_x=\frac{u'_x+v}{1+\frac{u'_x v}{c^2}}=0$$

$$\therefore \quad u'_x=-v \qquad u'_y=\sqrt{(\frac{c}{n})^2-v^2} \qquad \therefore \quad u_y=\frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{u_x v}{c^2}}=\frac{(c/n)^2-v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

本讲主要内容：

时空的相对性；

运动长度边短的原因；

运动时钟变慢的原因；

洛仑兹速度变换公式。

作业：**235----- 5，6**