第六章　狭义相对论

主要内容:

相对论的基本假设

洛仑兹变换

相对论运动学效应

四维协变量

相对论力学和电动力学的四维协变

要求

观念/基本假设

一、狭义相对论概述：

相对论主要是关于时空的理论：它揭示了旧时空观的局限性而建立了新的时空观。它把空间、时间和物质运动不可分割地联系在一起。从而使物理规律适用于一切惯性系坐标。

二、相对论的分类：

（一）狭义相对论：在惯性坐标系中的理论称为狭义相对论。

（二）广义相对论：推广到一般坐标系和包括引力场在内的理论称为广义相对论。

§1-2 相对论的基本原理　洛仑兹变换

1、学习目标

理解间隔的概念

相对论的基本假设

洛仑兹变换

2、复习和思考

牛顿力学和伽利略变换

一.经典空观、伽利略变换：

1.经典空观：

时间：“绝对的、真正的和数学的时间自身在流逝着，而且由于其本性而在均匀地与外界事物无关地流逝着。”

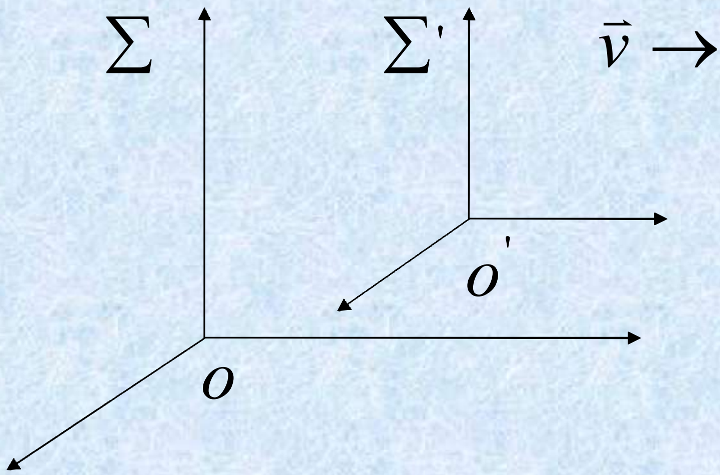
空间：“绝对空间，就其本性而言，是与外界任何事物无关而永远是相同的和不动的。”

物质：“是由不变的，永远如此的，绝对不可分割的原子组成，其中含原子越多，它的质量越大。”

这种时空观在20世纪以前的，它反映了人们把时间、空间、物质完全分割开来的一种观点。

它产生的原因是人们还没有大量研究高速运动的物理现象，从而低速力学现象中加以抽象的时空观。

2.伽利略变换： 集中反映旧时空观的是伽利略变换。这是关于惯性坐标系的变换：



设惯性系Σ'相对于Σ以速度$\vec{v}$运动，并选x轴和x'轴沿运动方向，则伽利略变换为：

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

这种变换的特征是空间、时间之间完全分离，毫无关系。

3、伽利略相对性原理：

“在惯性系内的观察着不可能通过力学实验来测定此惯性系的运动状态”（伽利略语）

即一切惯性系对机械运动都是等价的，即力学的运动规律在一切惯性系中应保持不变。故亦称伽利略相对性原理为力学相对性原理。

例如：$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(x^{'}+vt^{'})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x^{'}}{\mathrm{d}t^{'}}+v\frac{\mathrm{d}t^{'}}{\mathrm{d}t^{'}}=v^{'}+v$$

这为经典力学中速度相加公式，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v$ 为质点相对于$\sum$系中的速度（绝对速度），$v^{'}$ 为质点相对于 $\sum'$ 的速度（相对速度）v 为 $\sum'$ 相对于$\sum$ 的速度（牵连速度）。

对时间再求一次微商：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2(x'+vt')}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[v'+v]$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}+v)=\frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t'^2}\quad(\because v\text{为常数}\quad\text{故}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}v=0)$$

因此，在牛顿力学中认为物质质量及物体间相互作用力不因坐标系改变而改变，故有：

$$f_x=m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\qquad f_{x'}=m\frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t'^2}\qquad f_x=f_{x'}$$

可见，牛顿三定律在伽利略变换中即一切惯性系中有相同的形式，这就是伽利略相对性原理。

二、狭义相对论基本原理：

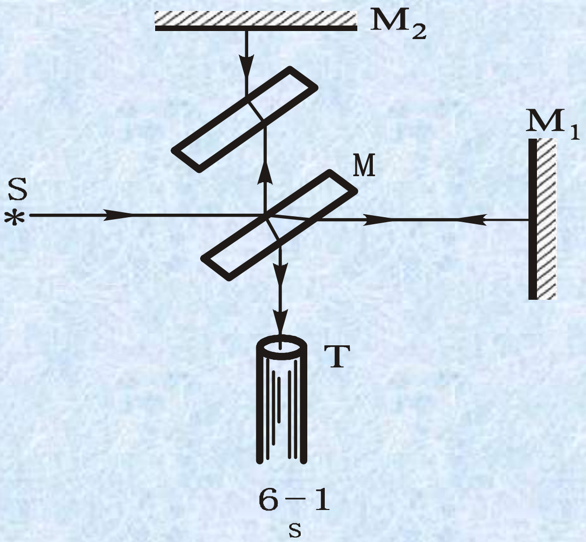
1、相对性原理：所有惯性参考系都是等价的，一切物理规律在所有惯性系中都是一样的。

①“一切规律”：
（一）不是指力学规律而是指所有物理规律；
（二）这里讲的是规律而不是指量值；
（三）“规律一样”是指在各自惯性系中的“物理规律” 的形式都一样。

注意：不是指在第一个惯性系看第二个惯性系的“物理规律”与在第二个惯性系中观察同一个“物理规律”，二者运动形式一样。例如：在一个惯性系中作垂直上抛，在另一个惯性系看这个运动则不是垂直上抛了。

②爱因斯坦相对性原理另外一种表述：不论通过什么物理实验都无法测定所出坐标系的“绝对运动”状态。

③在所有坐标系中，没有什么特殊的绝对惯性系，彼此是平等的，谁也不比谁优越，因此不存在绝对静止的“以太”。



2.光速不变原理：真空中，光速对任何惯性系沿任何方向都不变，恒为 c ，并与光源运动无关。

①与光源运动无关：这可用电磁波与辐射源无关（即电磁波可脱离辐射源而单独存在）的情况解释。

②与惯性系无关：这必须“脱离伽利略变换”来思考问题，这是一种思想观念的转换。

三、洛仑兹变换

由两个基本假设组成的相对论基本原理所建立的新时空观的数学形式是洛仑兹变换。

1. 惯性系之间变换关系是线性的：这是时空均匀性要求的，即事件的时间间隔和空间间隔与任何空间位置和时间位置无关。这也是惯性系本身概念要求。这反映了相对性原理的内容。

2.事件：物质运动可视为一连串事件的发展过程。

用四维坐标表示,另外惯性系中也用四维坐标表示。

$$(x, y, z, t) \qquad (x', y', z', t')$$

3.间隔不变性：这是光速不变原理的反映。

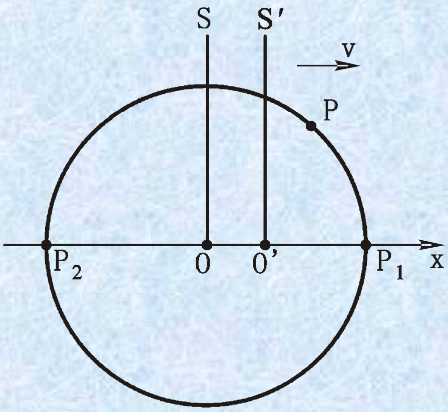
3.间隔不变性：这是光速不变原理的反映。

$$t = t' = 0 \qquad \Sigma \quad \Sigma' \qquad \text{原点重合}$$

光信号从远点出发，各经过时间t, t'

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$



6-3
s

于是有：

$$r = ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad 即\ x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

$$r' = ct' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad 即\ x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

$$= x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 不变量（=0）$$

也可以写成：$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$

$$= c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = S^2 = S'^2$$

$$S^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \quad S'^2 = c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

称为两个事件的间隔（四维坐标间隔）这个间隔是不变量，即两个事件间隔在任何惯性系中都相等，这称为间隔不变性，是新时空观中一个重要的法则。

思考：更一般的表示式？（开始不在原点）

4.洛仑兹变换：

若取光沿 x 轴传播，则上述两个事件间隔为

$$S^2 = x^2 - c^2t^2 \qquad S'^2 = x'^2 - c^2t'^2$$

由间隔不变性可得：$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$ （A）

于是，可找出 $x' = f_1(x,t) \quad t' = f_2(x,t)$

为变换函数。

∵ 坐标系之间的变换是线性的，所以 f_1 和 f_2 可表示为线性函数：

$$x' = a_{11}x + a_{12}t \qquad ①$$

$$t' = a_{21}x + a_{22}t \qquad ②$$

只要得到 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ ——— 线性变换系数，

就可以得到坐标之间变换关系。

由①、②式可得：

$$x'^2 - c^2t'^2 = (a_{11}x + a_{12}t)^2 - c^2(a_{21}x + a_{22}t)^2$$

代入间隔不变性的表达式（**A**）
有：

$$(a_{11}x+a_{12}t)^2-c^2(a_{21}x+a_{22}t)^2=x^2-c^2t^2$$

比较系数，得：
$$a_{11}{}^2-c^2a_{21}{}^2=1$$

$$a_{22}{}^2c^2-a_{12}{}^2=c^2 \qquad a_{11}a_{12}-c^2a_{21}a_{22}=0$$

三个方程不能定四个变换系数，故应再找一个方程，这个方程由初始条件及 $\sum'$ 系原点坐标来定。

$\because$ $t=t'=0$ 时刻，$\sum'$与 $\sum$ 原点重合（初始条件）

$\therefore$ 在 t 时刻时，$\sum'$ 原点坐标分别为：

Σ 系： $o'(x_0, y_0, z_0)$ 即 $(x_0, 0, 0)$

Σ' 系： $o'(0,0,0)$

且有 $x_0 = vt$

由①式知： $0 = a_{11}x_0 + a_{12}t$ 即 $a_{11}vt + a_{12}t = 0$

$$\therefore \quad v = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$$ 这即为第四个方程

由这四个方程可解得：

$$a_{11} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad a_{12} = -\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$a_{21} = -\frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad a_{22} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

为使在$v << c$ 时能过渡到非相对论情况，取 $a_{11} > 0$

$a_{22} > 0$

$$x' = a_{11}x + a_{12}t = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = a_{21}x + a_{22}t = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y \qquad z' = z$$

$$x' = a_{11}x + a_{12}t = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = a_{21}x + a_{22}t = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y \qquad z' = z$$

---洛仑兹变换。

逆变换为：

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & t = \dfrac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' & z = z' \end{cases}$$

变换一：

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

变换二：

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

当$v \ll c$时，可过渡到伽利略变换：

$$x = x' + vt' \qquad t = t' \qquad y = y' \qquad z = z'$$

或 $$x' = x - vt \qquad t' = t \qquad y' = y \qquad z' = z$$

洛仑兹变换应注意：

1）这是同一事件在不同坐标系$\sum$ 和$\sum'$中的变换，不是不同事件在不同坐标系中得变换；

2）在相对论中所用的空间是四维空间，称为闵可夫斯基空间，用$x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z \quad x_4 = ict$表示，四轴相互垂直。

每一个事件对应一个点，这个点称为“世界点”。

4）四维空间的间隔即二个事件的间隔称为时空间隔。

其定义为：

$$S^2 = -\sum_{u=1}^{4} \Delta x_u{}^2 = -[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] + c^2(t_2 - t_1)^2$$

$$= \text{不变量} = c^2 t^2 - r^2$$

同样：

$$S'^2 = -\sum_{u=1}^{4} \Delta x_u'{}^2 = -[(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2] + c^2(t'_2 - t'_1)^2$$

$$= \text{不变量} = c^2 t'^2 - r'^2$$

例一：闪电在原点发出，在静止参照系和运动参照系（v=0.8c)观察的不同。

解：在静止系，以$t=1s$为例，在x轴上，

$$p_1(c,0,0,1) \qquad p_2(-c,0,0,1)$$

在运动系，$p_1(c,0,0,1) \Rightarrow p'_1(x',0,0,t')$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c - 0.8c}{\sqrt{1 - 0.64}} = \frac{c}{3}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 - 0.8}{\sqrt{1 - 0.64}} = \frac{1}{3}$$

同理：　在运动系，$p_2(-c,0,0,1) \Rightarrow p_2'(x',0,0,t')$

例二、甲乙相距100米，开枪决斗，静止系，甲比乙早10^{-7}秒，在0.8c运动的坐标系，结果如何？

解：$x_2 - x_1 = 100m, \qquad t_2 - t_1 = 10^{-7} s$

$$\because \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore \qquad t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{25}{9} \times 10^{-7}（s）$$

结论是什么？有什么意义？

本讲主要内容：

相对论的基本假设

间隔不变性

洛仑兹变换

作业：（1）由洛仑兹变换推出速度变换

（2）235：2、3、4