§ 6-7电磁波的衍射和电磁动量

学习基本内容

1、衍射与基尔霍夫公式
2、电磁场的动量密度和动量流密度
3、辐射压力

复习

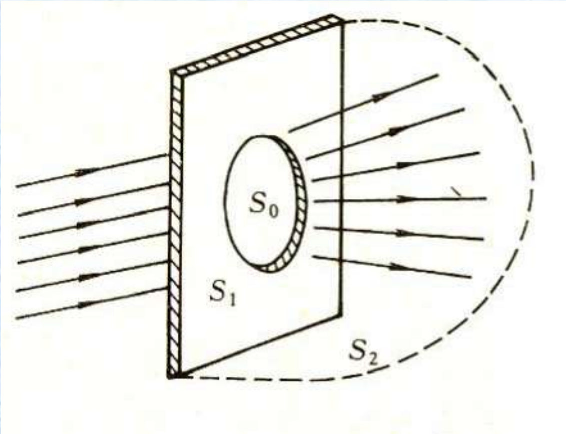
1、衍射现象
2、电磁场的能量密度和能流密度
3、辐射压力

上节主要内容：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{-ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int \vec{J}(\vec{x}')(\vec{n}\cdot\vec{x}')dV'$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}[-\vec{n}\times\vec{m} + \frac{1}{6}\vec{n}\cdot\overleftrightarrow{D}]$$

1、电磁波的衍射



屏幕上有一小孔，电磁波从左边人射，
要计算通过小孔后在屏幕右边空间各点上
的电磁波场强。

在光学中常忽略场的矢量性质，
而把电磁场的每一直角分量看作标量场，
用标量场的衍射理论来求解。
当衍射角不大时这种方法是较好的近似。

电磁场的任一直角分量 ψ 满足亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

忽略电磁场其它分量的影响，而孤立地把ψ看作一个标量场，用边界上的ψ和$\partial\psi/\partial n$值表出区域内的，这种理论就是标量衍射理论。

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$Q(t) = 4\pi\varepsilon_0 e^{-i\omega t}$$

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\int_V [\psi(\vec{x}')\nabla'^2 G(\vec{x}', \vec{x}) - G(\vec{x}', \vec{x})\nabla'^2\psi(\vec{x}')]dV'$$
$$= \oint_S [\psi(\vec{x}')\nabla' G(\vec{x}', \vec{x}) - G(\vec{x}', \vec{x})\nabla'\psi(\vec{x}')] \cdot d\vec{S}'$$

$$\int_V [\psi(\vec{x}')\nabla'^2 G(\vec{x}',\vec{x}) - G(\vec{x}',\vec{x})\nabla'^2\psi(\vec{x}')]dV'$$

$$= \oint_S [\psi(\vec{x}')\nabla' G(\vec{x}',\vec{x}) - G(\vec{x}',\vec{x})\nabla'\psi(\vec{x}')]\cdot d\vec{S}'$$

$$\psi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\oint_S [\psi(\vec{x}')\nabla' \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} - \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\nabla'\psi(\vec{x}')]\cdot \mathrm{d}\vec{S}'$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\vec{n}\cdot[\nabla'\psi + (ik - \frac{1}{r})\frac{\vec{r}}{r}\psi]\mathrm{d}S'$$

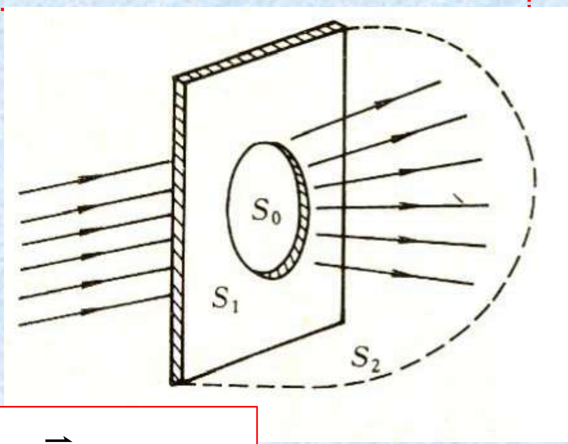
------基尔霍夫公式

2、小孔衍射

（1）在孔面S_0上，ψ和$\partial\psi/\partial n$等于原来入射波的值，即和没有屏幕存在时的值相同。

（2）屏幕右侧S_1上，$\psi = \partial\psi/\partial n = 0$

$$\vec{n}\cdot[\nabla'\psi + (ik - \frac{1}{r})\frac{\vec{r}}{r}\psi] \approx 0$$



$$\psi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\frac{e^{ikr}}{r}\vec{n}\cdot[\nabla'\psi + (ik - \frac{1}{r})\frac{\vec{r}}{r}\psi]dS'$$

$$\psi(\vec{x}) = -\frac{i\psi_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_{S_0} e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{x}'}(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S'$$
$$= -\frac{ik\psi_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_{S_0} e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{x}'}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\,\mathrm{d}S'$$

$$I = I_0\left(\frac{1+\cos\theta_2}{2}\right)^2\left(\frac{\sin ka\alpha}{ka\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin kb\beta}{kb\beta}\right)^2$$
$$\approx I_0\left(\frac{\sin ka\alpha}{ka\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin kb\beta}{kb\beta}\right)^2$$

$$(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E} = (\vec{E}\bullet\nabla)\vec{E} - (\nabla\bullet\vec{E})\vec{E}$$

$$(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E} = (\vec{E}\bullet\nabla)\vec{E} - \frac{1}{2}\nabla E^2$$

5、7 电磁场的的动量

一、动量密度：$\vec{g}$

•任意体积V内电磁动量的增加 $\dfrac{d}{dt}\iiint \vec{g}\,d\tau$

•动量流密度张量 $\overset{\leftrightarrow}{\mathrm{T}}$

•单位时间流出V的电磁动量 $\oiint \overset{\leftrightarrow}{\mathrm{T}}\cdot d\vec{\sigma}$

由能量守恒：$-\oint \vec{S}\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \int \vec{f}\cdot\vec{v}\,dV + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int w\,dV$

二、动量守恒

$$\iiint \vec{f} d\tau + \frac{d}{dt}\iiint \vec{g} d\tau = -\oint\!\!\!\oint \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\vec{f} = -\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$$

物理意义?

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

由麦氏方程

$$\vec{f} = \varepsilon_0(\nabla \bullet \vec{E})\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}$$

$$\vec{f} = \varepsilon_0(\nabla \bullet \vec{E})\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}$$

$$\vec{f} = \varepsilon_0(\nabla \bullet \vec{E})\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \bullet \vec{B})\vec{B} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

$$+ \varepsilon_0(\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} + \varepsilon_0(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \times \vec{E} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}$$

$$\vec{f} = \varepsilon_0(\nabla \bullet \vec{E})\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \bullet \vec{B})\vec{B} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

$$+ \varepsilon_0(\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} - \varepsilon_0 \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B})}$$

$$\vec{f} = \varepsilon_0(\nabla \bullet \vec{E})\vec{E} + \varepsilon_0(\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E}$$

$$+\frac{1}{\mu_0}(\nabla \bullet \vec{B})\vec{B} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B})$$

$$(\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} = (\vec{E} \bullet \nabla)\vec{E} - (\nabla \bullet \vec{E})\vec{E}$$

$$(\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} = (\vec{E} \bullet \nabla)\vec{E} - \frac{1}{2}\nabla E^2$$

$$(\nabla \bullet \vec{E})\vec{E} + (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} = (\nabla \bullet \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \bullet \nabla)\vec{E} - \frac{1}{2}\nabla E^2$$

$$(\nabla \bullet \vec{E})\vec{E} + (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} = (\nabla \bullet \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \bullet \nabla)\vec{E} - \frac{1}{2}\nabla E^2$$

$$= \nabla \bullet (\vec{E}\vec{E}) - \frac{1}{2}\nabla \bullet (\vec{\vec{I}} E^2)$$

同理?

$$(\nabla \bullet \vec{B})\vec{B} + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} == \nabla \bullet (\vec{B}\vec{B}) - \frac{1}{2}\nabla \bullet (\vec{\vec{I}}B^2)$$

$$\vec{f} = -\nabla \bullet \varepsilon_0[\vec{E}\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{\vec{I}}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} \quad B^2]$$

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B})$$

$$\boxed{\vec{f} = -\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathrm{T}}}$$

$$\boxed{\vec{g} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}}$$

$$\boxed{\vec{\vec{\mathrm{T}}} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)\vec{\vec{I}} - \varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{\vec{B}\vec{B}}{\mu_0}}$$

三、动量密度和能流密度的关系

$$\boxed{\vec{g} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}}$$

$$\vec{g} = \vec{s} / c^2$$

对于平面电磁波

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{C} \vec{n} \times \vec{E}}$$

$$\vec{g} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \omega \vec{n}$$

电磁场本身具有能量、动量，说明电磁场不是电磁作用的一种数学描述手段，而是与载荷体同样实在的物理实体

$$\vec{g} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\vec{g} = \frac{1}{c} \omega \vec{n}$$

$$\overset{\Rightarrow}{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \overset{\Rightarrow}{I} - \varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{\vec{B}\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{\vec{B}\vec{B}}{\mu_0}$$

四、动量流密度张量的物理意义：

（1）九个分量

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overleftrightarrow{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{\vec{B}\vec{B}}{\mu_0}}$$

（2）动量流密度张量的通量

$$d\vec{P} = d\vec{\tau} \bullet \overleftrightarrow{T}$$

积分形式

$$\Delta\vec{P} = \oint d\vec{\tau} \bullet \overleftrightarrow{T}$$

例一、求平面电磁波的动量流密度张量

解：设电磁波的传播方向位z轴

$$\overleftrightarrow{T}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)\overleftrightarrow{I}-\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}-\frac{\vec{B}\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{E}\bullet\overleftrightarrow{T}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)\vec{E}-\varepsilon_0 E^2\vec{E}$$

对于平面电磁波 $\varepsilon_0 E^2=\dfrac{B^2}{\mu_0}$

$$\boxed{\vec{E}\bullet\overleftrightarrow{T}=0}$$

同理 $$\boxed{\vec{B}\bullet\overleftrightarrow{T}=0}$$

物理意义？

$$\overleftrightarrow{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{\vec{B}\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{k} \bullet \overleftrightarrow{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)\vec{k}$$

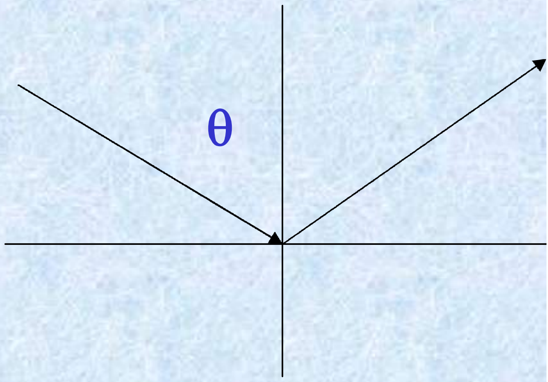
$$\boxed{\vec{k} \bullet \overleftrightarrow{\mathrm{T}} = \omega \vec{k}}$$

平面电磁波的动量流密度只有**z**轴分量

$$\boxed{\overleftrightarrow{\mathrm{T}} = \omega \vec{e}_k \vec{e}_k}$$

例二、平面电磁波入射到理想到体表面而被全反射，入射角是θ，求导体表面的辐射压强。

解：电磁波的在传播方向的单位面积



$$\vec{g} = \frac{1}{c}\omega\vec{n} \qquad \overline{g} = \frac{1}{c}\overline{\omega}$$

其法向分量 $\overline{\omega}_i \cos\theta$

单位有效面积 $\overline{\omega}_i \cos^2\theta$

电磁波动量变化率 $2\overline{\omega}_i \cos^2\theta$

导体表面的辐射压强 $p = 2\overline{\omega}_i \cos^2\theta$

导体表面的辐射压强 $$p = 2\overline{\omega}_i \cos^2\theta$$

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_i + \overline{\omega}_r$$

$$p = \overline{\omega} \cos^2\theta$$

如果电磁波从各个方向入射，求平均

$$\boxed{p = \frac{1}{3}\overline{\omega}}$$

物理意义？

作业:

1、复习第五章;

2、准备课程论文.