# § 5.4 磁偶极辐射和电四极辐射

主要内容：

磁偶极矩辐射

电四极矩辐射

复习：

1、磁偶极矩

2、电四极矩

上节课主要内容

电偶：$\vec{P}=\int \vec{J}(\vec{x}',t')\mathrm{d}V'=\int \vec{J}(\vec{x}')e^{-i\omega t}\mathrm{d}V'$

$$\vec{B}=\frac{ik\mu_0}{4\pi R}e^{ikR}\vec{n}\times\frac{i}{\omega}\ddot{\vec{P}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}e^{ikR}\ddot{\vec{P}}\times\vec{n}$$

$$\vec{E}=c\vec{B}\times\vec{n}$$

## 1、 高频电流分布的磁偶极矩和电四极矩

势展开式的第二项

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{-ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int \vec{J}(\vec{x}')(\vec{n}\cdot\vec{x}')dV'$$

代表磁偶极矩和电四极矩产生的辐射

恒定情况

小区域内的电荷分布激发电多极电场，电流分布激发磁多极场。

交变情形

由于电流一般不闭合，电流分布往往与电荷分布相联系。

由电荷守恒定律有

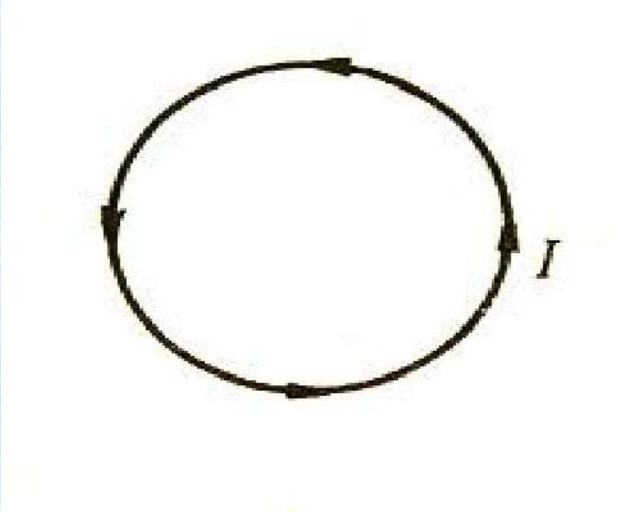
$$i\omega\rho = \nabla\cdot\vec{J}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{-ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int \vec{J}(\vec{x}')(\vec{n}\cdot\vec{x}')dV'$$

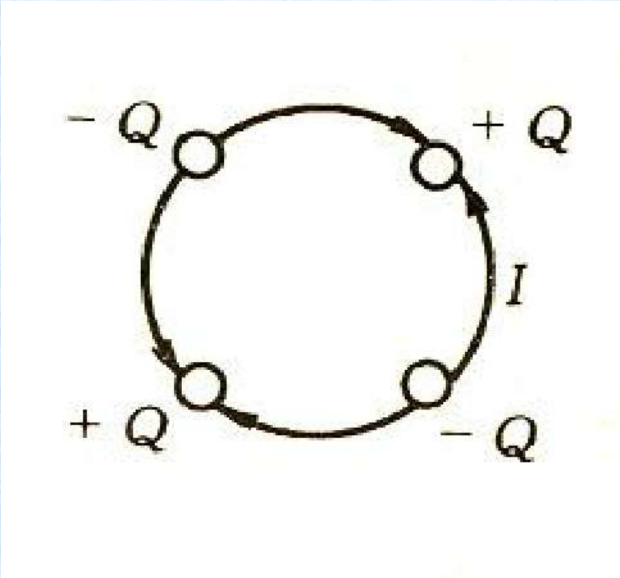
一般来说，上式包括电荷分布的贡献和磁矩分布的贡献，需要把两者分离开来。

# 2、两种不同的电流分布

（1）线圈中当各点上的电流以相同振幅和相同相位振荡时, 每一时刻都有$\nabla\cdot J=0$，这类电流分布是闭合的，线圈上不带电荷，因此线圈上的振荡电流所产生的辐射---磁多极辐射。



（2）四个导体球的体系，它们用细导线相连，当导线上振荡电流时，在四个导体上交替出现正负电荷，因而这体系有振荡电四极矩---产生电四极辐射。




在一般情形下,给定电流分布可以同时有电多极辐射和磁多极辐射。

所以，可以把积分分离为磁矩的贡献和电四极矩的贡献。

把被积函数写为 $$\vec{J}'(\vec{n}\cdot\vec{x}') = \vec{n}\cdot\vec{x}'\vec{J}'$$

把它分解为对称部分和反对称部分

$$\vec{x}'\vec{J}' = \frac{1}{2}(\vec{x}'\vec{J}' + \vec{J}'\vec{x}') + \frac{1}{2}(\vec{x}'\vec{J}' - \vec{J}'\vec{x}')$$

则积分为

$$\frac{1}{2}\int[(\vec{n}\cdot\vec{x}')\vec{J}'+(\vec{n}\cdot\vec{J}')\vec{x}']dV'+\frac{1}{2}\int[(\vec{n}\cdot\vec{x}')\vec{J}'-(\vec{n}\cdot\vec{J}')\vec{x}']dV'$$

$$(\vec{n}\cdot\vec{x}')\vec{J}'-(\vec{n}\cdot\vec{J}')\vec{x}'=-\vec{n}\times(\vec{x}'\times\vec{J}')$$

$$-\vec{n}\times\int\frac{1}{2}\vec{x}'\times\vec{J}'dV'=-\vec{n}\times\vec{m}$$

m是体系的磁矩，导致的辐射是磁偶极辐射

$$\frac{1}{2}\int[(\vec{n}\cdot\vec{x}')\vec{J}'+(\vec{n}\cdot\vec{J}')\vec{x}']dV'+\frac{1}{2}\int[(\vec{n}\cdot\vec{x}')\vec{J}'-(\vec{n}\cdot\vec{J}')\vec{x}']dV'$$

$$\frac{1}{2}\int[(\vec{n}\cdot\vec{x}')\vec{J}'+(\vec{n}\cdot\vec{J}')\vec{x}']dV=\frac{1}{2}\sum e[(\vec{n}\cdot\vec{x}')\vec{v}+(\vec{n}\cdot\vec{v}')\vec{x}']$$

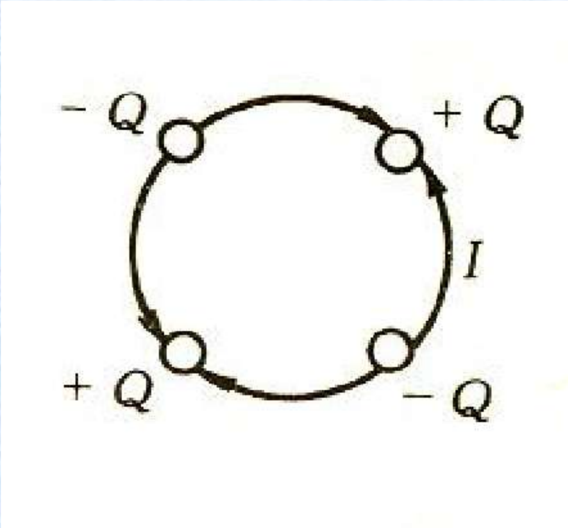
$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum e(\vec{n}\cdot\vec{x}')\vec{x}'=\vec{n}\cdot\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum e(\vec{x}'\vec{x}')=\frac{1}{6}\vec{n}\cdot\frac{d}{dt}\overleftrightarrow{D}$$

代入得

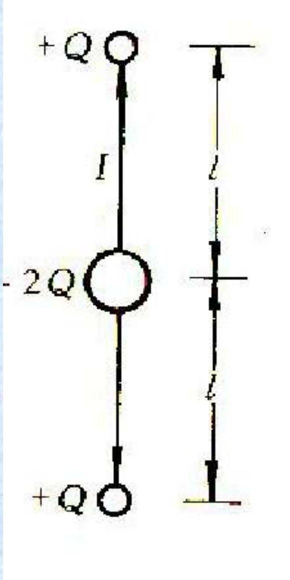
$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\left[-\vec{n}\times\vec{m} + \frac{1}{6}\vec{n}\cdot\overleftrightarrow{D}\right]$$

偶极辐射和电四极辐射在矢势展开式同一级项中出现的。

在图示体系中，若导体所在平面为$xy$面，则这体系的电四极矩有$D_{xy}$分量。



上下两导体用细导线与中间一个导体相连，当两导线上有反向交变电流时，上下导体出现同号电荷$Q$，中间导体出现电荷-2$Q$。这体系具有电四极矩分量




$$D_{zz} = 6Ql^2$$

## 2. 磁偶极辐射

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\vec{n}\times\vec{m}$$

辐射区的电磁场为

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = ik\vec{n}\times\vec{A} = k^2\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}(\vec{n}\times\vec{m})\times\vec{n}$$

$$= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})\times\vec{n}$$

$$\vec{E} = c\vec{B}\times\vec{n} = -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi cR}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})$$

与电偶极辐射场比较，可见由电偶极辐射场作以下代换：

$$\vec{p} \to \frac{\vec{m}}{c}$$

$$\vec{E} \to c\vec{B}$$

$$c\vec{B} \to -\vec{E}$$

即可得到磁偶极辐射场，这代换反映麦克斯韦方程组的电磁对称性。

在自由空间中，麦氏方程组对上述变换是对称的。说明其协变性！

偶极辐射的
能流密度

$$\vec{S}=\frac{\mu_0\omega^4|\vec{m}|^2}{12\pi c^3}\sin^2\theta\ \vec{n}$$

总辐射功率

$$P=\frac{\mu_0\omega^4|\vec{m}|^2}{12\pi c^3}$$

例　一电流线圈半径为$a$，激发电流振幅为$I_0$，角频率为$\omega$，求辐射功率。

解　　电流线圈的磁矩为

$$m = I_0 \pi a^2$$

代入公式得辐射功率

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 I^2{}_0 (\pi a^2)^2}{12\pi c^3} = \frac{4\pi^5}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I_0{}^2$$

$$P=\frac{\mu_0\omega^4 I^2{}_0(\pi a^2)^2}{12\pi c^3}=\frac{4\pi^5}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I_0{}^2$$

当电流$I_0$不变时，辐射功率

$$\sim\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4$$

因此磁偶极辐射比电偶极辐射小数量级

$$\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$$

小线圈的辐射能力比短天线更低!

### 3. 电四极辐射

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R}\vec{n}\cdot\dot{\overleftrightarrow{D}}$$

定义矢量 $\vec{D}(\vec{n}) = \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{D}$

$$\ddot{\vec{D}} = -ik\mu_0\varepsilon_0 c^3\dot{\vec{D}}$$

$$= -i\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,\mu_0\varepsilon_0\frac{\dot{\vec{D}}}{\mu_0\varepsilon_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

$$= -i\omega\dot{\vec{D}}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R}\dot{\vec{D}} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\varepsilon_0 c^3 R}\ddot{\vec{D}}$$

辐射区电磁场为

$$\vec{B} = ik\vec{n} \times \vec{A} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\varepsilon_0 c^3 R} \dddot{\vec{D}} \times \vec{n}$$

$$\vec{E} = c\vec{B} \times \vec{n} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\varepsilon_0 c^3 R} (\dddot{\vec{D}} \times \vec{n}) \times \vec{n}$$

$$\vec{B} = ik\vec{n}\times\vec{A} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\varepsilon_0 c^3 R}\dddot{\vec{D}}\times\vec{n} \qquad \vec{E} = c\vec{B}\times\vec{n} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\varepsilon_0 c^3 R}(\dddot{\vec{D}}\times\vec{n})\times\vec{n}$$

***D***加上正比***n***的项并不影响辐射区电磁场

与恒定场情况一样, 重新定义电四极矩

$$\overleftrightarrow{D} = \sum e(3\vec{x}'\vec{x}' - r'^2\overleftrightarrow{I})$$

$$D_{ij} = \sum e(3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij})$$

这样定义的电四极矩只有**5**个独立分量（同第二章）。

辐射平均能流密度

$$\overline{S}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^{*}\times\vec{H})=\frac{c}{2\mu_0}\left|\vec{B}\right|^2\vec{n}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{288\pi c^5R^2}(\dddot{\overleftrightarrow{D}}\times\vec{n})^2$$

设电荷分布区域线度为 $l$

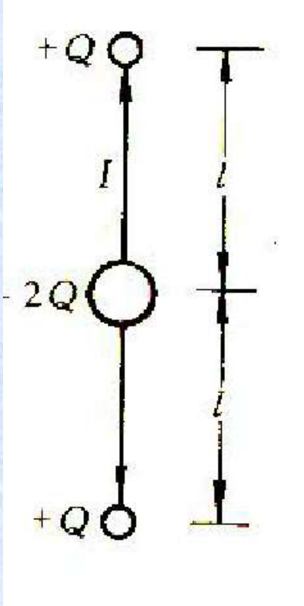
$$D_{ij}\sim O(l^2)$$

辐射功率 $\sim\omega^2(\frac{l}{\lambda})^4$

电四极辐射与磁偶极辐射同级

比电偶极辐射小数量级 $(l/\lambda)^2$

例 求图中电四极子以频率ω振荡时的辐射功率和角分布。




解　该体系的电四极矩张量为

$$\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{D}} = 6Ql^2\vec{e}_z\vec{e}_z$$

$$\vec{\boldsymbol{D}} \equiv \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{D}} = 6Ql^2\cos^2\theta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{\boldsymbol{D}}\times\vec{\boldsymbol{n}} = 6Ql^2\cos^2\theta\,\vec{e}_z\times\vec{\boldsymbol{n}} = 6Ql^2\cos\theta\sin\theta\,\vec{e}_\phi$$

$$\left|\dddot{\vec{\boldsymbol{D}}}\times\vec{\boldsymbol{n}}\right|^2 = 36Q^2l^4\omega^6\cos^2\theta\sin^2\theta$$

电流线圈（磁偶极）

$$P = \frac{\mu_0\omega^4 I^2{}_0(\pi a^2)^2}{12\pi c^3} = \frac{4\pi^5}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I_0{}^2$$

电流线圈（磁偶极）

$$P=\frac{\mu_0\omega^4 I^2{}_0(\pi a^2)^2}{12\pi c^3}=\frac{4\pi^5}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I_0{}^2$$

辐射角分布取决于因子

$$\cos^2\theta\sin^2\theta$$

辐射功率为

$$P=\int\overline{S}R^2 d\Omega=\frac{Q^2 l^4\omega^6}{60\pi\varepsilon_0 c^5}$$

$$=\frac{4\pi^3}{15}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 I_0{}^2$$

$$I_0=\omega Q$$

作业：187页11、12

电四极辐射和磁偶极辐射同数量级