§5.3 电偶极辐射

1.学习目标

理解辐射场的一般公式

理解偶极辐射的条件、展开式、方向性

了解短天线的辐射

2.复习和思考

静电场中**1/r**展开

上节课主要内容

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j}$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'$$

推迟势的物理意义

引言：电磁波 ⟶ 运动电荷系统辐射出来的

宏观：天线 —— 载有交变电流

微观：带电粒子 —— 变速运动

一.计算辐射场的一般公式

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'$$

$$\rho(\vec{x}',t)=\rho(\vec{x}')e^{-i\omega t} \Rightarrow \rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c})=\rho(\vec{x}')e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}$$

$$\vec{J}(\vec{x}',t)=\vec{J}(\vec{x}')e^{-i\omega t} \Rightarrow \vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})=\vec{J}(\vec{x}')e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}$$

$$\vec{J}(\vec{x}',t)=\vec{J}(\vec{x}')e^{-i\omega t} \Rightarrow \vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})=\vec{J}(\vec{x}')e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{i(kr-\omega t)}}{r}\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{-i\omega t}e^{i\omega\frac{r}{c}}}{r}\mathrm{d}V'$$

说明 $\vec{A}(\vec{x},t)$ 按谐振变化

可以分成两部分?

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{x}\,')e^{ikr}}{r}\mathrm{d}V\,'$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$\because \quad \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad \therefore \; \nabla\cdot\vec{J} = i\omega\rho$$

$\therefore$ 由 $\vec{A}$ 可求 $\vec{B}$、 $\vec{E}$ **(场):**

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\text{(条件 ?)}$$

时谐波对时间求导:

$$\therefore \qquad -i\omega \vec{E} = c^2 \nabla \times \vec{B}$$

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{i\omega} \nabla \times [\vec{B}(\vec{x}) e^{-i\omega t}]$$

$$= \frac{ic}{k} \nabla \times \vec{B}(\vec{x}) e^{-i\omega t} = \frac{ic}{k} \nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t)$$

$$\therefore \qquad \vec{J} \longrightarrow \vec{A} \longrightarrow \vec{B} \longrightarrow \vec{E}$$ （理论可求）

二. 矢势展开：

1. 三个区域　　①三个长度：

电荷分布区域的线度 l ，它决定 $\left|\bar{x}'\right|$ 的大小；

波长 $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

电荷到场点的距离 $r = \left|\bar{x}' - \bar{x}\right|$

② 小区域电流产生的辐射：

小区域　　$l \ll \lambda$　　$l \ll r$

电荷分布的线度 l 远远小于波长 λ 及观测距离 r

③ 三种情况：

（1）近区　$r \ll \lambda$

（2）感应区　$r \approx \lambda$

（3）远区（辐射区）　$r \gg \lambda$

（一）近区： $kr \ll 1$ $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$

$$kr = \frac{2\pi r}{cT} \ll \frac{2\pi\lambda}{cT} = 2\pi$$

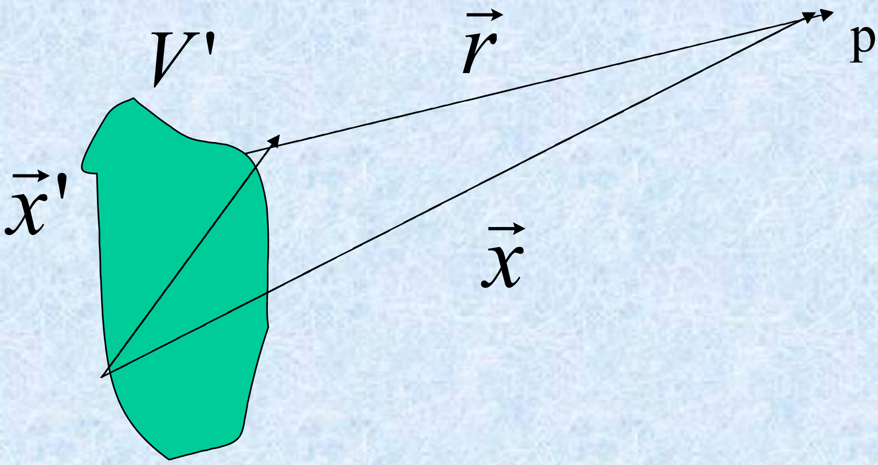
$$e^{-ikr} = 1 \left\{ \begin{array}{l} \text{电场} \\ \text{磁场} \end{array} \right.$$

→ 恒定场的特点

（二）感应区： 过渡

（三）远区： 电磁场变为横向的辐射场。

接收在远区------ 辐射功率、角分布（方向性）

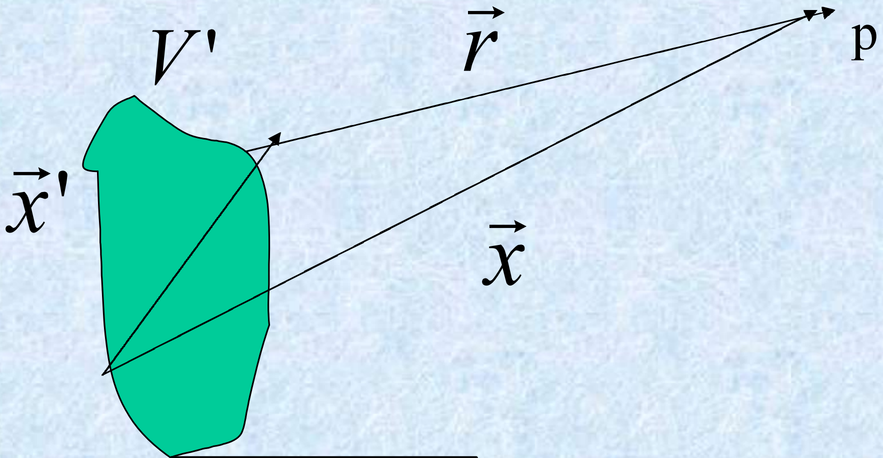


2. 矢势的远区展开:

$$\because \quad |\vec{x}'| < |\vec{x}| = R \qquad |\vec{x}'| = l \qquad |\vec{x}| = R \qquad R >> l$$

$$r = |\vec{x}' - \vec{x}| = \sqrt{|\vec{x}|^2 + |\vec{x}'|^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{x}'}$$

$$= \sqrt{R^2 + |\vec{x}'|^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{x}'} = R\sqrt{1 - \frac{2\vec{x}\cdot\vec{x}'}{R^2}}$$



$$= R\sqrt{1-\frac{2\vec{n}\cdot\vec{x}'}{R}} \approx R-\vec{n}\cdot\vec{x}'$$

令： $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$

$$\therefore \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{ik(R-\vec{n}\cdot\vec{x})}}{R}\,\mathrm{d}V'$$

$$e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{x}'} = e^{-i2\pi\vec{n}\cdot\vec{x}'/\lambda}$$

小参数 $\longrightarrow \dfrac{\vec{x}'}{\lambda}$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int \vec{J}(\vec{x}')(1 - ik\vec{n}\cdot\vec{x} + \cdots)\mathrm{d}V'$$

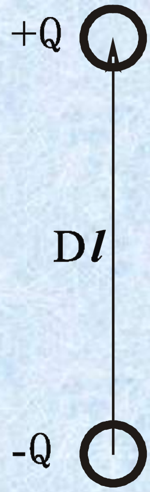
三. 偶极辐射

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int \vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

$\int \vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'$ 新含义： $\vec{J} = \sum n_i e_i \vec{v}_i$

$$\int \vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V' = \sum e\vec{v} = \sum e\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum(e\vec{x}) = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{P}}$$

书本解释：电偶极子 $\vec{P} = Q\Delta\vec{l}$



5−2

y

电流 I： $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I$

$$\dot{\vec{P}} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Q\Delta\vec{l}) = I\Delta l = \int J(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

$$\therefore \quad \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\dot{\vec{P}}$$

$$\dot{\vec{P}} = \int J(\vec{x}', t')\mathrm{d}V' = \int J(\vec{x}')e^{-i\omega t}\mathrm{d}V'$$

$$\ddot{\vec{P}} = -i\omega\,\dot{\vec{P}}$$

说明：只对 e^{ikR} 求导，视 $4\pi R$ 为常数。

$$\begin{cases} \nabla \longrightarrow ik\vec{n} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega \end{cases}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} ik\vec{n} \times \dot{\vec{P}} \qquad (\vec{E} \to \ddot{\vec{P}})$$

又 $$\ddot{\vec{P}} = \frac{\partial}{\partial t}\dot{\vec{P}} = (-i\omega)\dot{\vec{P}} \Rightarrow \dot{\vec{P}} = -\frac{\ddot{\vec{P}}}{i\omega} = \frac{i}{\omega}\ddot{\vec{P}}$$

$$\therefore \vec{B} = \frac{ik\mu_0}{4\pi R} e^{ikR} \vec{n} \times \frac{i}{\omega}\ddot{\vec{P}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} e^{ikR}\, \ddot{\vec{P}} \times \vec{n}$$

$$\vec{E}=\frac{ic}{k}\nabla\times\vec{B}=\frac{ic}{k}\times\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\times ike^{ikR}\,\vec{n}\times\ddot{\vec{P}}\times\vec{n}$$

$$=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}(\ddot{\vec{P}}\times\vec{n})\times\vec{n}$$

讨论：① $\vec{B}$、$\vec{E}$ 相当于电偶辐射，它们与带电粒子的运动（加速度）有关；

② $\vec{B}$、$\vec{E}$ 是以 $\frac{1}{R}$ 衰减的场；

③ $\vec{B}$、$\vec{E}$、$\vec{n}$ 相互垂直。

四.偶极辐射与方向之间的关系

设 **OZ** 与 $\ddot{\vec{P}}$ 同向

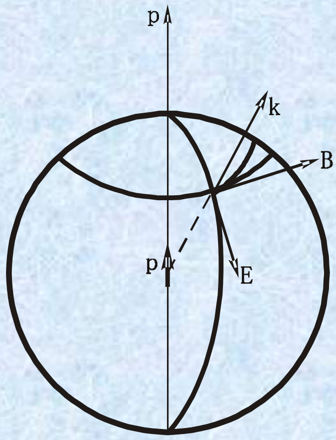
$$\vec{B} \to \ddot{\vec{P}} \times \vec{n} \to \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} \to \ddot{\vec{P}} \times \vec{n} \times \vec{n} \to \vec{e}_\phi \times \vec{n} \to \vec{e}_\theta$$

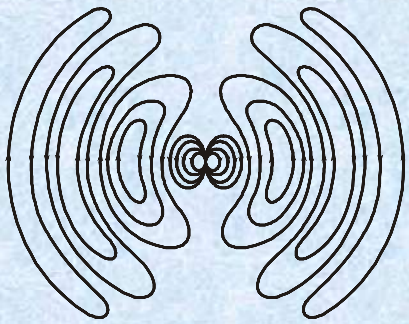
$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\left|\ddot{\vec{P}}\right| e^{ikR} \sin\theta \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\left|\ddot{\vec{P}}\right| e^{ikR} \sin\theta \vec{e}_\theta$$

$$(\vec{E} = c\vec{B} \times \vec{n})$$



5-3



5-4

$\vec{B}$ 是横向的，$\vec{E}$ 也是横向的，但由于 $\vec{E}$ 要闭合 $(\nabla\cdot\vec{E}=0)$

所以不是严格的横波，是**TM**波。

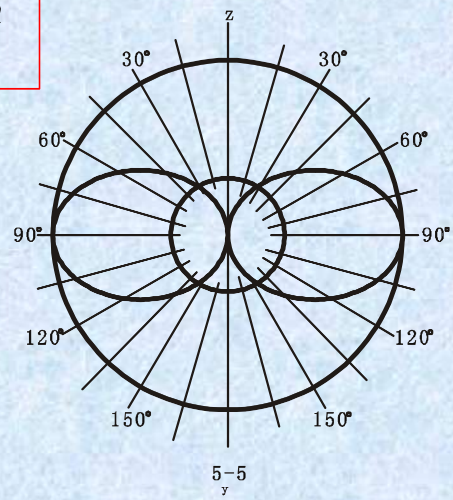
五. 辐射能流

$$\overline{\vec{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^{*}\times\vec{H})=\frac{c}{2\mu_0}[(\vec{B}^{*}\times\vec{n})\times\vec{B}]$$

$$=\frac{c}{2\mu_0}\left|\vec{B}\right|^2\vec{n}=\frac{\left|\ddot{\vec{P}}\right|^2}{32\pi^2\varepsilon_0c^3R^2}\sin^2\theta\,\vec{n}$$

① 平均能流，可观测；

② 方向性 $\begin{cases}0,\pi & \text{为零}\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{最大}\end{cases}$



$$\overline{\vec{s}} = \frac{c}{2\mu_0}\left|\vec{B}\right|^2 \vec{n} = \frac{\left|\ddot{\vec{P}}\right|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}\sin^2\theta\vec{n}$$

③ $\left|\overline{\vec{S}}\right| \propto \frac{1}{R^2}$

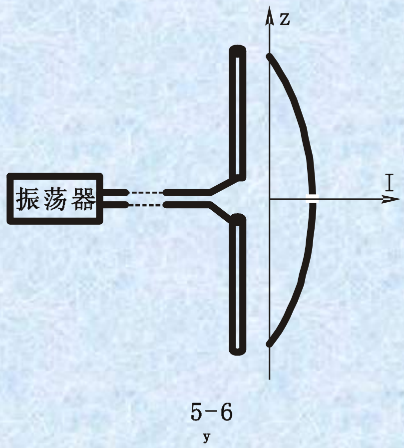
$$\vec{P}_{功} = \oint \overline{\vec{S}} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \oint \left|\overline{\vec{S}}\right| \mathrm{d}\vec{\sigma}$$

$$= \frac{\left|\ddot{\vec{P}}\right|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\oint \sin^2\theta \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left|\ddot{\vec{P}}\right|}{3c^3}$$

$\because \quad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega \qquad \ddot{\vec{P}} \to (-i\omega)^2 = \omega^2\vec{P}$

$\therefore \quad \ddot{\vec{P}}_{功} \propto \omega^4 \vec{P}$

总功率 $\propto \omega^4$ （振幅不变时）



六. 短天线的辐射：

二杆短天线，总长度为l，由中心向两段馈电，馈电方程：

$$I(z,t) = I_0(1 - \frac{z}{l}|z|)e^{-i\omega t}$$

$$I(z) = I_0(1 - \frac{z}{l}|z|)$$

$$\dot{\vec{P}} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2} I_0 \vec{l}$$

$$\therefore \quad P_{功} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{3c^3}(\frac{1}{2}I_0 l)^2\omega^2 = \frac{\mu_0 I_0^2\omega^2 l^2}{48\pi c}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \qquad \frac{1}{c} = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

$$\therefore \quad P = \frac{\pi}{12}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}I_0^2(\frac{l}{\lambda})^2$$

① $P \propto (\frac{l}{\lambda})^2$ ② $P = \frac{1}{2}IR_r^2$

$$\therefore \quad R_r = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}(\frac{l}{\lambda})^2 = 197\ (\frac{l}{\lambda})^2\,\Omega$$

电偶：$\vec{P} = \int \vec{J}(\vec{x}^{'}, t^{'}) \mathrm{d}V^{'} = \int \vec{J}(\vec{x}^{'}) e^{-i\omega t} \mathrm{d}V^{'}$

$$\vec{B} = \frac{ik\mu_0}{4\pi R} e^{ikR} \vec{n} \times \frac{i}{\omega} \ddot{\vec{P}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} e^{ikR} \ddot{\vec{P}} \times \vec{n}$$

$$\vec{E} = c\vec{B} \times \vec{n}$$

磁偶：$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{x} \times \int \vec{J}(\vec{x}^{'}) e^{-i\omega t} \mathrm{d}V^{'}$

$$\vec{B} == \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^4 R} e^{ikR} (\ddot{\vec{m}} \times \vec{n}) \times \vec{n}$$

$$\vec{E} = c\vec{B} \times \vec{n}$$

电四极矩（可与电偶极子类比）

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\left|\ddot{\vec{P}}\right| e^{ikR} \sin\theta \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\left|\ddot{\vec{P}}\right| e^{ikR} \sin\theta \vec{e}_\theta$$

作业:186,　　6,7