§ 5.2　推迟势

1.学习目标

能写出推迟势的方程和解的形式；

理解推迟势的物理意义。

2.复习和思考

什么是规范变换；

写出两种规范变换；

振动和波动方程的推导。

上节主要内容

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

规范不变性：当势作规范变换时，所有物理量和物理规律都应该保持不变的一种不变性。

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

一.洛仑兹变换下的方程及解

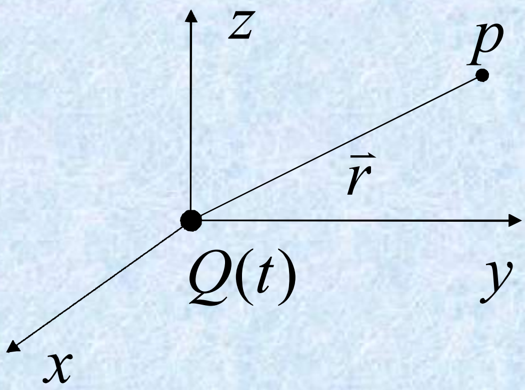
$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

简单情况：点电荷 ⟶ 体电荷 / 叠加、近似、格林函数

$$\rho(\vec{x}, t) = Q(t)\delta(\vec{x})$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\vec{x})$$



φ在球对称情况下与 ϕ、ψ无关，仅与r 有关。

$$\therefore \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\bar{x})$$

分析求解：

① 除原点外，$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \quad (r\neq 0)$

②球面波：φ 只与r 有关，与 ϕ、ψ 无关

③ r 增大，势减弱。 可假定 $\varphi(r,t)=\frac{u(r,t)}{r}$ 代入上式

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2\frac{\partial}{\partial r}(\frac{u}{r})]=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2})]$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[-u + r\frac{\partial u}{\partial r}] = \frac{1}{r^2}[-\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}]$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

又 $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

这是一维空间的波动方程，其通解为：

$$u(r,t) = f(t - \frac{r}{c}) + g(t + \frac{r}{c})$$

$f(t-\frac{r}{c})$ ———— 沿 r 正方向向外发射的球面波

r 越大，$t-\frac{r}{c}$ 越小，位相就越落后。

$g(t+\frac{r}{c})$ ———— 沿 r 负方向收敛的球面波

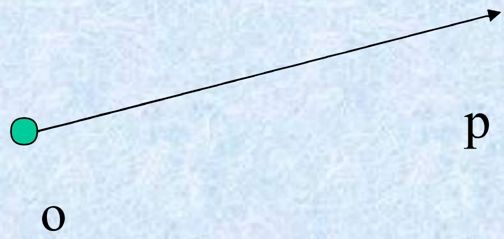
因此，辐射问题： $g(t+\frac{r}{c})=0$

$$\therefore \qquad \varphi(r,t)=\frac{f(t-\frac{r}{c})}{r}$$

具体解： 静电场： $\varphi=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

如何考虑传播过程？ 类比： $\varphi=\dfrac{Q(t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$\varphi = \frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



二. 解的验证:

1.非奇点:

1. $r \neq 0 \quad \delta(x) = 0 \quad$ 右 $= 0$

$$左 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2\frac{\partial}{\partial r}(\frac{Q(t - \frac{r}{c})}{r})]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2(-\frac{Q(t^{'})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q(t^{'})}{\partial t^{'}}\frac{\partial t^{'}}{\partial r})]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\partial}{\partial r}[-Q(t^{'})-\frac{r}{c}\frac{\partial Q(t^{'})}{\partial t^{'}}]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}[-\frac{\partial Q(t^{'})}{\partial r}-\frac{1}{c}\frac{\partial Q(t^{'})}{\partial t^{'}}-\frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial Q(t^{'})}{\partial t^{'}})]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}[-\frac{\partial Q(t^{'})}{\partial t^{'}}(-\frac{1}{c})-\frac{1}{c}\frac{\partial Q(t^{'})}{\partial t^{'}}-\frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial t^{'}}\frac{\partial t^{'}}{\partial r}\frac{\partial Q^{'}}{\partial t^{'}}]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{r}{c^2}\frac{\partial Q^2(t^{'})}{\partial t^{'2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r c^2}\frac{\partial Q^2(t^{'})}{\partial t^{'2}} \qquad ①$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(t')}{r}]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 rc^2}\frac{\partial Q(t')}{\partial t'^2}$$

①－②＝0　　$\therefore\ r\neq 0$ 时，成立。　　②

2.奇点：　$r\to 0$

$$左=(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\frac{Q(t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

小球 $r=\eta$

$\eta\to 0$　　$V\to 0$

$$\lim_{r\to 0} Q(t-\frac{r}{c}) = Q(t)$$

$$左 = \lim_{V\to 0} \int_0^\eta (\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V$$

$$= \lim_{V\to 0}\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\eta \nabla^2 \frac{1}{r}\mathrm{d}V - \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r}]4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{V\to 0}\int_0^\eta \nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}V - \lim_{\eta\to 0}\int_0^\eta \frac{1}{c^2\varepsilon_0}\frac{\partial^2 Q(t)}{\partial t^2} r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}(-4\pi) = -\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad \varphi(r,t)=\frac{Q(t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

3.推广及讨论：

（1）电荷不在原点上，而在 $\vec{x}'$ ，

则：

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{Q(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

（2）电荷是体分布：

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'$$

（3）矢势（类比）：

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'$$

（4）$Q(t)$ 与 $Q(t-\frac{r}{c})$ 不同

四.验证：$\vec{A}$、φ 符合洛仑兹条件

令：$t'=t-\frac{r}{c}$ 对 r 有 $\nabla=-\nabla'$

$$\because\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial t'}dV'$$

电荷守恒？

$$\therefore \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\nabla' \cdot \vec{J}_{t'=c} dV'$$ 电荷守恒

又 $\because \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \cdot (\frac{\vec{J}}{r}) dV'$ 而 $\nabla \cdot (\frac{\vec{J}}{r}) = \nabla(\frac{1}{r}) \cdot \vec{J} + \frac{1}{r}\nabla \cdot \vec{J}$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \cdot (\frac{\vec{J}}{r}) dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int [\frac{1}{r}\nabla \cdot \vec{J}\ (r,' t - \frac{r}{c}) + \vec{J} \bullet \nabla \frac{1}{r}] dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int [-\frac{1}{cr}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \bullet \nabla r - \vec{J} \bullet \nabla' \frac{1}{r}] dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int [\frac{1}{cr}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \bullet \nabla' r - \nabla' \bullet \frac{\vec{J}}{r} + \frac{1}{r}\nabla' \bullet \vec{J}] dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int [\frac{1}{cr} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \bullet \nabla' r - \nabla' \bullet \frac{\vec{J}}{r} + \frac{1}{r} \nabla' \bullet \vec{J}] dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int [\frac{1}{cr} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \bullet \nabla' r - \frac{1}{r} \nabla \bullet' \vec{J}] dV'$$

$$\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t' = t - \frac{r}{c}) = \nabla' \cdot \vec{J}_{t'=c} - \frac{1}{cr} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \bullet \nabla' r$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{J}_{t=c} dV'$$

$$\therefore \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{J}_{t'=c} dV'$$

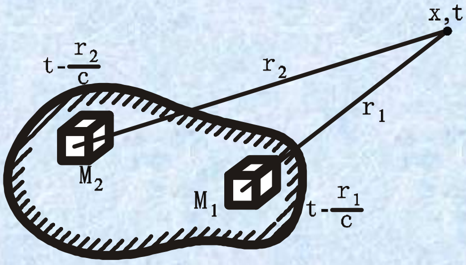
$$\therefore \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{J}_{t=c} dV'$$

电荷守恒 $$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{J}_{t'=c} dV'$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

反之，可由洛仑兹变换证明电荷守恒。

五、推迟势的物理意义



5-1
y

由推迟势知道场点的势与场源电荷、电流的变化不是同一时刻的变化，场点势的变化要落后于场源、电荷电流的变化。

另外，推迟势还表明，场点的势不是由各体积元内电荷、电流分布同一时刻激发的。因为个体积元到场点的距离 r 不同，而它们对场点的作用速度相同（同一介质内），推迟时间为 $\frac{r}{c}$ ，所以在同一时刻　　到达场点的电磁作用，对不同体积元来讲，体积元内电荷、电流激发时刻 $t' = t - \frac{r}{c}$ 是不同的。

除了电磁相互作用之外，其他一切相互作用都通过物质以有限传播速度传播。事物总是通过物质自身的运动发展而互相联系着的，不存在瞬时的超距作用。第六章我们将看到这点正是相对论时空观的基础。

电磁场本身反过来也对电荷电流发生一定的相互作用，因而激发区内的电荷电流分布是不能任意规定的。第七章研究天线辐射问题时再作具体讨论。

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} \mathrm{d}V'$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} \mathrm{d}V'$$

说明： **1.**电荷守恒 ————瞬时性；

2.推迟势证明无超距作用；

3.场的叠加有新的含义：时间、空间的叠加

$\vec{B}$、$\vec{E}$ 因 $\frac{r}{c}$ 不同是时空的叠加 。

作业：189 页 6、7题