Review:

1、哈密顿函数:

$$H=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\dot{q}_{\alpha}-L$$ 是正则变量***q***，***p***的函数

$$H=H(q_{\alpha},p_{\alpha},t)\qquad \left(\alpha=1,2,\cdots s\right)$$

2、哈密顿正则方程:

$$\begin{cases}\dot{q}_{\alpha}=\dfrac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}\\ \dot{p}_{\alpha}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}\end{cases}$$

2S个一阶微分方程

哈密顿方程的解题步骤:

①分析受力和约束情况，选定广义坐标。写出体系动能、势能和拉格朗日函数;

②根据定义求出广义动量的表达式，并反解出广义速度的表达式;

③根据定义写出正则变量表示的哈密顿函数;

④代入正则方程，得到一阶微分方程。

第24讲 哈密顿正则方程的运动积分

复习:

拉格朗日方程的运动积分:

只要L不显含t或某个广义坐标，就有广义能量积分和相应的广义动量积分。

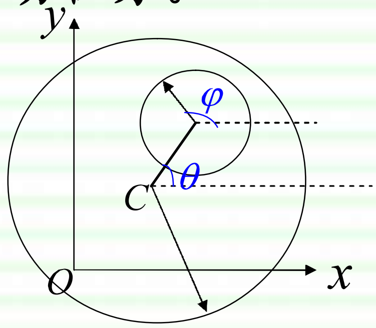
$$T_2 - T_0 + V = const.$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = Const.$$

当约束是稳定的（$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0$），则**T=T$_2$**

此时广义能量积分变为能量积分。

作业: 桌面上一个质量为M、半径为R的均质圆盘，半径为r的均质(m)小圆盘其中心固定在大圆盘中心的距离b处。小圆盘可在大圆盘上无摩擦地转动，水平向无外力，求此系统的所有运动积分。



解: 取静止坐标系oxy，$i=4$，

广义坐标：x_c，y_c，θ和φ

$$\therefore L = T = T_M + T_m$$

$$= \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$

$$+\frac{1}{2}m\left[\left(\dot{x}-b\dot{\theta}\sin\theta\right)^2+\left(\dot{y}+b\dot{\theta}\cos\theta\right)^2\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$$

$$\therefore T=\frac{1}{2}\left[(m+M)\dot{x}^2+(m+M)\dot{y}^2\right]+\left(\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{2}mb^2\right)\dot{\theta}^2$$
$$-mb\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta+mb\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta+\frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}^2$$

由：$\frac{\partial L}{\partial x}=0$ 有：$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=(M+m)\dot{x}-mb\dot{\theta}\sin\theta=C_1$

$\frac{\partial L}{\partial y}=0$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=(M+m)\dot{y}+mb\dot{\theta}\sin\theta=C_2$

表示x和y向动量守恒;

$\because \frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$ $\therefore \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}=C,\dot{\varphi}=C_3$

表示小圆盘质心角动量守恒;

$\because \frac{\partial L}{\partial t}=0,$ $T=T_2$ $\therefore T+V=C_4=T$

表示机械能守恒;

一、哈密顿函数的物理意义：

$$\because T = T_2 + T_1 + T_0$$

且由欧拉定理有： $\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right] = rT_r$

$$\therefore H = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L$$

$$= 2T_2 + 1T_1 + 0T_0 - (T_2 + T_1 + T_0 - V)$$

$$= T_2 - T_0 + V$$ 即为广义能量！

稳定约束或无约束时： $T = T_2$

$$\therefore H = T + V$$ 即为能量！

故：***H*比*L*更优越！** ？

便于与量子力学和统计力学的某些理论和方法衔接。

二、能量积分:

按照高等数学中复合函数求微商方法:

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right)+\frac{\partial H}{\partial t}$$

把哈密顿正则方程代入得:

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}}_{0}\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}$$

故：如果函数***H***中不显含**t**，则***H***是常数

而: $\dfrac{\partial H}{\partial t}=-\dfrac{\partial L}{\partial t}$

故若 $\dfrac{\partial L}{\partial t}=0$ 则有: $H=Const.$

三、循环积分:

若哈密顿函数不显含q_k（$\frac{\partial H}{\partial q_k}=0$），则$p_k$是常数

可证明，当 $\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$ 时，必有 $\frac{\partial H}{\partial q_k}=0$ 。

证明：$\frac{\partial H}{\partial q_k}=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot q_\alpha-L\right)$

$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\underbrace{\boxed{\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_k}}}_{0}\dot q_\alpha+\cancel{\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\frac{\partial \dot q_\alpha}{\partial q_k}}-\left(\underbrace{\boxed{\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_k}}}_{\frac{\partial L}{\partial q_k}}+\cancel{\sum_{\alpha=1}^{s}\overbrace{\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}}}^{p_\alpha}\frac{\partial \dot q_\alpha}{\partial q_k}}\right)$$

$$=-\frac{\partial L}{\partial q_k}$$ 得证！

故：保守系+ 循环坐标存在，就有循环积分。

上次例题1：质量为m的质点做一维运动，拉氏函数为：

$$L=\frac{1}{2}me^{rt}(\dot{x}^2-\omega^2x^2)$$

试 (1) 由拉格朗日方程导出动力学方程；

(2) 写出哈密顿函数并由哈密顿方程导出动力学方程

解： (2) i=1, 选广义坐标为x

$$\because p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=me^{rt}\dot{x} \qquad \therefore \dot{x}=\frac{p_x}{m}e^{-rt}$$

$$\therefore H=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L \quad =p_x\dot{x}-\frac{m}{2}e^{rt}(\dot{x}^2-\omega^2x)$$

$$=\frac{p_x^2}{2m}e^{-rt}+\frac{m}{2}e^{rt}\omega^2x$$

写成x，p的函数

Or: $H=T_2-T_0+V$

例题2、系统受稳定约束，其哈密顿函数为：

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+\frac{p_2^2}{\sin^2 q_1})-a\cos q_1$$ 试求相应的拉格朗日函数。

解：由正则方程知： $\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k}$

$$\Rightarrow \dot{q}_1=p_1;\quad \dot{q}_2=\frac{p_2}{\sin^2 q_1};\qquad p_1=\dot{q}_1;\quad p_2=\dot{q}_2\sin^2 q_1$$

$$\therefore L=\sum_{k=1}^{s}p_k\dot{q}_k-H\ =p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2-H$$

$$=\dot{q}_1\cdot\dot{q}_1+\dot{q}_2\sin^2 q_1\cdot\dot{q}_2-\frac{1}{2}[\dot{q}_1^2+\frac{(\dot{q}_2\sin^2 q_1)^2}{\sin^2 q_1}]+a\cos q_1$$

$$=\frac{1}{2}[\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\sin^2 q_1]+a\cos q_1$$

或者：由初积分求：

稳定约束，所以$T=T_2$，故$H=T+V$，有：$L=T-V$

例3：有心力场中质点运动问题：

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-V(r) \qquad i=2$$

①利用拉格朗日方程：

对φ： ∵φ是循环坐标 $\therefore p_\varphi = C \quad \Rightarrow mr^2\dot{\varphi}=C$

对 r： $\because \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}})=\frac{d(m\dot{r})}{dt}=m\ddot{r}$

$$\frac{\partial L}{\partial r}=mr\dot{\varphi}^2-\frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

$$\therefore m\ddot{r}-mr\dot{\varphi}^2+\frac{\partial V(r)}{\partial r}=0 \quad \Rightarrow m\ddot{r}-\frac{C^2}{mr^3}+\frac{\partial V}{\partial r}=0$$

②利用哈密顿正则方程解:

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-V(r) \qquad i=2 \qquad \text{显见:} \quad p_\varphi=C$$

$$\because\ p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r} \qquad \Rightarrow \dot{r}=\frac{p_r}{m}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi} \qquad \Rightarrow \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2}$$

$$\therefore H=\sum_{\alpha=1}^{2}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L$$

$$=p_r\dot{r}+p_\varphi\dot{\varphi}-\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+V(r)$$

$$=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+V(r)$$

（$or \qquad \because T=T_2 \qquad \therefore H=T+V$）

$$H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r)$$
$$= \frac{m}{2}[(\frac{p_r}{m})^2 + r^2(\frac{p_\varphi}{mr^2})^2] + V(r)$$
$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{C^2}{2mr^2} + V(r)$$

简单，物理意义更清晰。

$$\because \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{p_r}{m} \\ \dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} = \dfrac{C^2}{mr^3} - \dfrac{\partial V}{\partial r} \end{cases} \Rightarrow m\ddot{r} = \dot{p}_r$$

$$\therefore m\ddot{r} - \frac{C^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

结果一致！！

问题：？

$$L=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2)-V(r) \qquad i=2 \qquad \Rightarrow m\ddot r-\frac{C^2}{mr^3}+\frac{\partial V}{\partial r}=0$$

$$\because p_\varphi=mr^2\dot\varphi=C \qquad \Rightarrow \dot\varphi=\frac{C}{mr^2}$$

$$\therefore L=\frac{m}{2}\dot r^2+\frac{C^2}{2mr^2}-V(r)$$

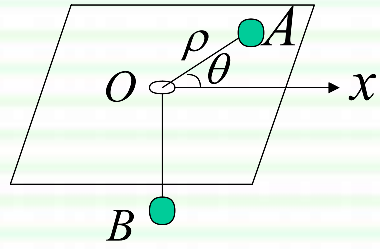
代入方程中： $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot r})-\frac{\partial L}{\partial r}=0$

$$\Rightarrow m\ddot r+\frac{C^2}{mr^3}+\frac{\partial V}{\partial r}=0 \qquad ?$$

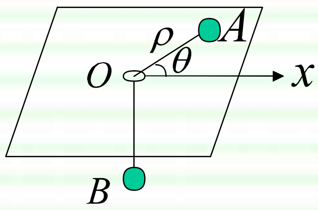
关键在于自由度***i*=2**！

C只是与t无关的常数,却与r及其导数有关。

例4、光滑水平桌面上一小孔，长为l质量不计的细绳穿过小孔，两端各系一个质量为m的小球，当$OA=a$时，给小球A以大小为v_0，垂直于OA的初速度，分别用拉格朗日方程和哈密顿方程列出以ρ表示的的运动微分方程。



解：$i=2$，取 q = 极坐标 ρ，θ



系统动能：$T = T_A + T_B$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m(-\dot{\rho})^2$$

$$= m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2$$

系统势能：$V = -mg(l-\rho)$ $\qquad \therefore L = T - V$

①代入保守系拉格朗日方程中得：

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^2\ddot{\theta} = 0 \\ 2\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 + g = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \rho^2\dot{\theta} = C$$

$$\because \rho = a, \rho\dot{\theta} = v_0 \qquad \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{av_0}{\rho^2} \qquad \therefore C = av_0$$

$$\Rightarrow 2\ddot{\rho} - \frac{a^2v_0^2}{\rho^3} + g = 0$$ 为所求！

或者用初积分： $\because T=T_2 \quad \therefore T+V=E=E_0$

$$\therefore m\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2-mg(l-\rho)=\frac{1}{2}mv_0^2-mg(l-a)$$

$$\because \dot{\theta}=\frac{av_0}{\rho^2} \qquad \therefore \dot{\rho}^2=\frac{1}{2}v_0^2(1-\frac{a^2}{\rho^2})-g(\rho-a)$$

结果一样！

②可利用正则方程按步骤解题。

或者用初积分：

$$\because L=T-V=m\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2+mg(l-\rho)$$

$$\therefore H=T+V=m\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2-mg(l-\rho)$$

显见**H=**常数**E_0**

$$\therefore m\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2-mg(l-\rho)=\frac{1}{2}mv_0^2-mg(l-a)$$

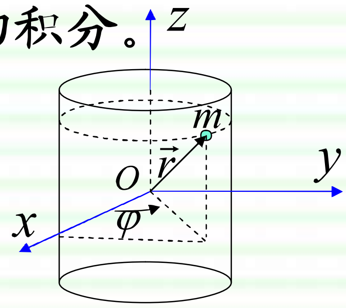
结果一样！

作业:

一、习题5.24

二: 质点质量为m，被约束在圆柱面上运动，其约束方程为: $x^2+y^2=R^2$ 质点受保守力F方向指向0，**F**= -k **r**。试写出正则方程及初积分。

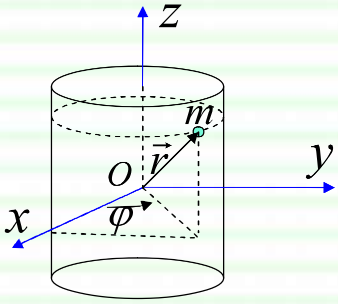
并描述质点运动情况。



$$\Rightarrow \ddot{z}+\frac{k}{m}z+g=0$$

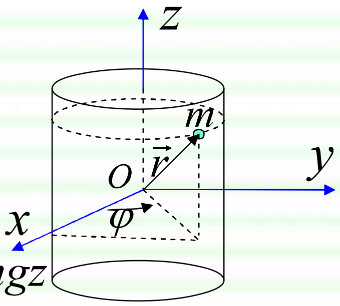
例5: 质点质量为m，被约束在圆柱面上运动，其约束方程为： $x^2+y^2=R^2$ 质点受保守力F方向指向0，**F**= -k ***r***。试写出正则方程及初积分。

并描述质点运动情况。



$$\Rightarrow \ddot{z}+\frac{k}{m}z+g=0$$

解：i=2，选 $q=\varphi$，z



$$T=\frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)$$

$$V=\frac{1}{2}kr^2+mgz=\frac{1}{2}k(R^2+z^2)+mgz$$

$$\therefore L=T-V=\frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}k(R^2+z^2)-mgz$$

$$H=T+V=\frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{2}k(R^2+z^2)+mgz$$

$$=\frac{p_\varphi^2}{2mR^2}+\frac{p_z^2}{2m}+\frac{k}{2}(R^2+z^2)+mgz$$

代入正则方程中得:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\frac{p_\varphi}{mR^2};\quad \dot{p}_\varphi=-\frac{\partial H}{\partial \varphi}=0\\&\dot{z}=\frac{\partial H}{\partial p_z}=\frac{p_z}{m};\quad \dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z}=-kz-mg\end{aligned}\right\}\Rightarrow \ddot{z}+\frac{k}{m}z+g=0$$