# 第19讲 拉格朗日方程的应用

## 一、用拉格朗日方程的解题步骤:

①确定力学体系自由度并选取适当的广义坐标;

②判断类型，选择适用的方程;

③写出力学体系的动能和势能;

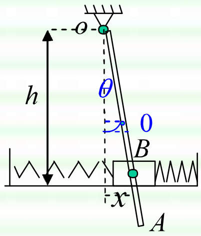
④ 求出广义力：可利用虚功、定义等。或者写出体系的拉氏函数;

⑤检查是否含有循环坐标，写出初积分;

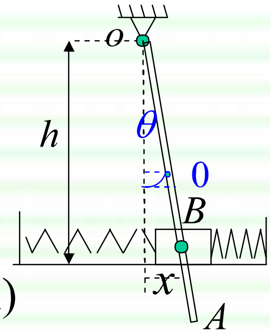
⑥代入拉格朗日方程，检查方程数量，用数学知识解方程并讨论。

一、小振动：

例题1、质量为$m$、长为$l$的均质杆$OA$悬挂在$O$点处，可绕$O$轴转动，质量为$M$的滑块用系数为$0.5k$的两个弹簧连接，并可沿$OA$杆滑动。忽略摩擦，杆处于铅直位置系统处于平衡状态，试建立系统微幅振动的运动微分方程。



解：单自由度系统，取θ为广义坐标




平衡位置： $\theta=0$，则： $x=h\,tg\ \theta$

系统动能：$T=\frac{1}{2}(\frac{ml^2}{3})\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M\dot{x}^2$

$$\approx\frac{1}{2}(\frac{ml^2}{3}+Mh^2)\dot{\theta}^2 \qquad (\sec^4\theta=1)$$

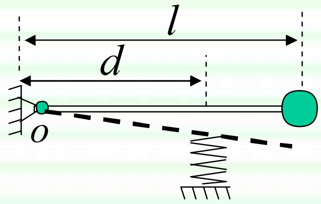
系统势能：$V=mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)+2(\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2}x^2)\ +V_M$

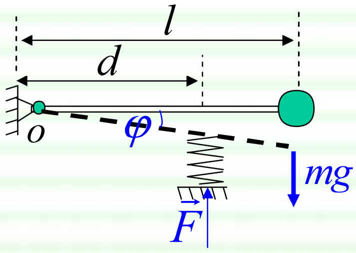
$$\approx\frac{1}{2}(kh^2+\frac{mgl}{2})\theta^2+V_M \quad (\sin\frac{\theta}{2}\approx\frac{\theta}{2})$$

将$L$代入拉格朗日方程中得单自由度系统微自由振动方程：$(\frac{ml^2}{3}+Mh^2)\ddot{\theta}+(kh^2+\frac{mgl}{2})\theta=0$

$$\therefore\ \omega_n=\sqrt{\frac{6kh^2+3mgl}{2ml^2+6Mh^2}}$$

**例题2、** 一个摆振系统，杆重不计，球质量为$m$、摆对轴$O$的转动惯量为$J$，弹簧系数为$k$，杆处于水平位置系统处于平衡状态，试建立系统微幅振动的运动微分方程及摆的频率。






解：取$q=\varphi$，

杆处于水平位置时弹簧静形变：

$$\delta = \frac{mgl}{kd} \quad ?$$

系统动能：$T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$

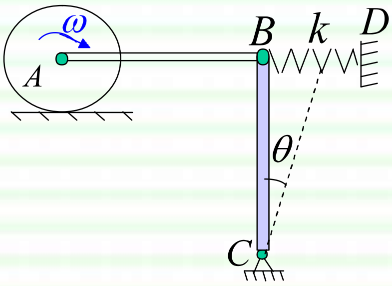
系统势能：$V = \frac{1}{2}k[(\varphi d+\delta)^2-\delta^2]-mgl\varphi \quad = \frac{1}{2}k\varphi^2 d^2$

零点：平衡位置

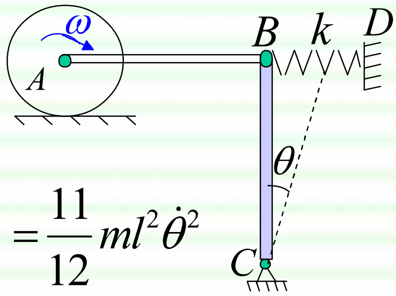
将$L$代入拉格朗日方程中：$J\ddot{\varphi}+kd^2\varphi = 0$

$$\therefore \omega_n = d\sqrt{\frac{k}{J}}$$

**例题3、** 均质圆盘半径为$R$，质量为$m$、沿水平面作纯滚动。水平杆$AB$质量不计，BC杆长为$l$，质量也为$m$，铰链B与水平弹簧相连。弹簧质量不计弹性系数为$k$，BC竖直位置弹簧为原长。试建立系统运动微分方程及振动周期。




$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{6kl - 3mg}{11ml}}$$




解：$i$=1，取$q$=θ

$$v_A = v_B = l\dot{\theta}; \quad \omega_A = \frac{v_A}{R} = \frac{l}{R}\dot{\theta}$$

系统动能：$T = \frac{1}{2}J_A\omega_A{}^2 + \frac{1}{2}mv_A{}^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2 = \frac{11}{12}ml^2\dot{\theta}^2$

系统势能：$V = \frac{1}{2}k(l\theta)^2 + mg\frac{l}{2} - mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$

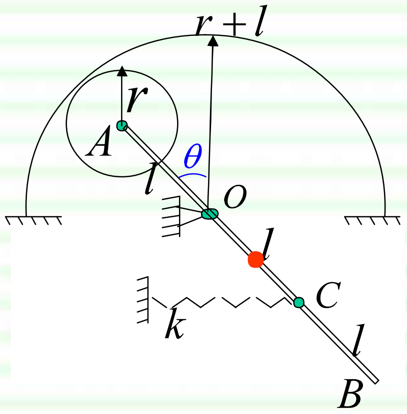
零点：弹簧原长+BC杆质心所在处

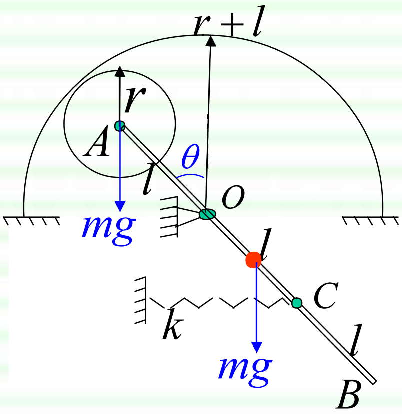
将$L$代入拉格朗日方程中：

$$\frac{11}{6}ml^2\ddot{\theta} + kl^2\theta - \frac{1}{2}mgl\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta \approx \theta \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{6kl - 3mg}{11ml}}$$

例题4、均质圆柱质量为$m$ ，半径为$r$与质量为$m$ ，长为$3l$的杆AB组成。圆柱可在半径为$r+l$的光滑圆槽中纯滚动，当θ=0$^0$时弹簧为原长。试建立系统运动微分方程及振动周期。






解：$i$=1，取$q$= θ

$$v_A = l\dot{\theta}; \quad \omega_A = \frac{v_A}{r} = \frac{l}{r}\dot{\theta}$$

系统动能：$T = \frac{1}{2}J_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2$

$$J_O = \frac{1}{12}m(3l)^2 + m(\frac{l}{2})^2 = ml^2$$

$$J_A = \frac{1}{2}mr^2 \qquad \therefore T = \frac{5}{4}ml^2\dot{\theta}^2$$

系统势能：零点：过O点的水平面+弹簧原长

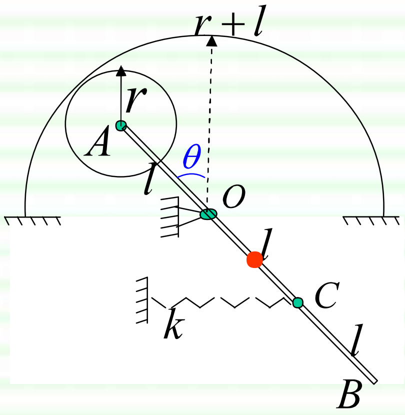
$$V = \frac{1}{2}k\left(l\sin\theta\right)^2 - mg\frac{l}{2}\cos\theta + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}kl^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

将$L$代入拉格朗日方程中：

$$\frac{5}{2}ml^2\ddot{\theta}+\frac{1}{2}kl^2\sin 2\theta-\frac{1}{2}mgl\sin\theta=0$$

$$\because \sin\theta\approx\theta;\quad \sin 2\theta\approx 2\theta$$




写出标准形式:

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{5m}-\frac{g}{5l}\right)\theta=0$$

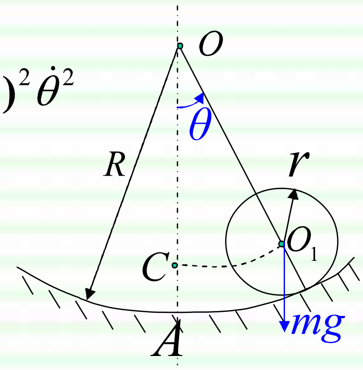
$$\therefore T=2\pi\sqrt{\frac{5ml}{2kl-mg}}$$

注：易错之处：微振动条件： $\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2}\neq 1$

例题5、一个质量为$m$、半径为$r$的圆柱体，在一半经为R的圆弧槽上做无滑动的滚动。求圆柱体在平衡位置附近作微小振动的固有频率。 类似5.16

解： $i=1$，取$q=\theta$，

$\because v=(R-r)\dot{\theta}$ 同时： $v=r\omega$




系统动能：$T=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{3m}{4}(R-r)^2\dot{\theta}^2$

系统势能：$V=-mg(R-r)\cos\theta$ O点

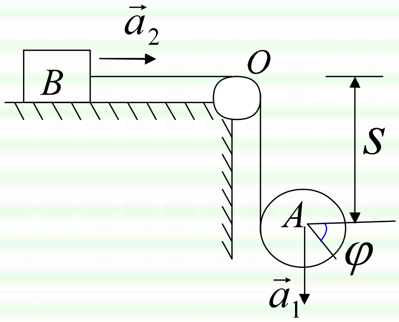
$$\therefore L==\frac{3m}{4}(R-r)^2\theta^2+mg(R-r)\cos\theta$$

代入保守系的拉格朗日方程中：

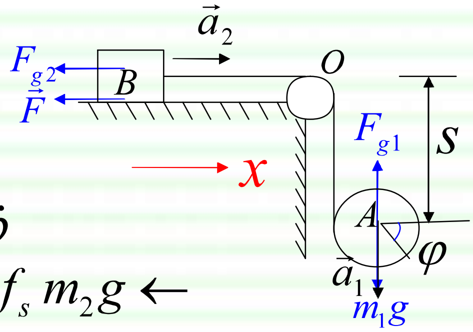
$$\Rightarrow 3(R-r)\ddot{\theta}+2g\theta=0 \quad \Rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

二、练习:

例1、质量为$m_1$的均质圆柱体A上绕一细绳，细绳的一端跨过滑轮与质量为$m_2$的物体B相连。已知物体B与水平面的滑动摩擦系数为$f_s$，略去滑轮质量，且开始时系统静止,求A、B两物体质心的加速度$a_1,a_2$?



解：法一：利用动力学普遍方程




∵ $i=2$ 取$q_1= x$和$q_2=\varphi$

$$\therefore S = x + r\varphi$$

$$\Rightarrow \delta S = \delta x + r\delta\varphi; \qquad \ddot{S} = \ddot{x} + r\ddot{\varphi}$$

系统受主动力： $m_1 g \downarrow, \qquad F = f_s m_2 g \leftarrow$

惯性力：$F_{g1} = m_1 a_1 = m_1 \ddot{s} \uparrow \quad F_{g2} = m_2 a_2 = m_2 \ddot{x} \leftarrow$

惯性力偶：$M_g = \dfrac{1}{2} m_1 r^2 \ddot{\varphi}$

$$\therefore -(F + F_{g2})\delta x + (m_1 g - F_{g1})\delta s - M_g \delta\varphi = 0$$

$$(-f_s m_2 g - F_{g2} + m_1 g - F_{g1})\delta x + (m_1 g r - F_{g1} r - M_g)\delta\varphi = 0$$

0　　　　0

$$\Rightarrow \ddot{x} = a_2 = \frac{m_1 - 3 f_s m_2}{m_1 + 3m_2} g; \qquad a_1 = \ddot{x} + r\ddot{\varphi} = \frac{(2 - f_s)m_2 + m_1}{m_1 + 3m_2} g;$$

解：法二：利用完整系拉格朗日方程

系统动能：$T=\frac{1}{2}m_2\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_1(\dot{x}+r\dot{\varphi})^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_1r^2)\dot{\varphi}^2$

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+m_1r\dot{x}\dot{\varphi}+\frac{3}{4}m_1r^2\dot{\varphi}^2$$

广义力:三个主动力作虚功:

$$\delta W=m_2g(0)-f_sm_2g\delta x+m_1g(\delta x+r\delta\varphi)$$

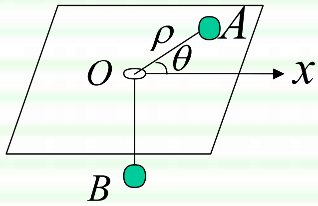
$$=\underbrace{(m_1g-f_sm_2g)}_{Q_x}\delta x+\underbrace{m_1gr}_{Q_\varphi}\delta\varphi$$

代入：$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha})-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha\qquad(\alpha=1,2)$

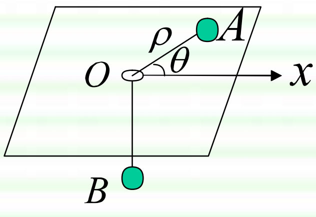
$$\Rightarrow\begin{cases}(m_1+m_2)\ddot{x}+rm_1\ddot{\varphi}=m_1g-f_sm_2g\\ m_1r\ddot{x}+\frac{3}{2}m_1r^2\ddot{\varphi}=m_1gr\end{cases}$$

结果一样

例2、光滑水平桌面上一小孔，长为$l$质量不计的细绳穿过小孔，两端各系一个质量为$m$的小球，当$OA=a$时，给小球$A$以大小为$v_0$，垂直于$OA$的初速度，列出以ρ表示的的运动微分方程；求出$A$的速率。



解：$i$=2，取A的极坐标ρ,θ为广义坐标




系统动能：$T = T_A + T_B$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m(-\dot{\rho})^2$$

$$= m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2$$

系统势能：$V = -mg(l-\rho)$ $\therefore L = T - V$

代入保守系拉格朗日方程中得：

$$\begin{cases} 2\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 + g = 0 \\ \rho^2\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$\because \rho = a, \rho\dot{\theta} = v_0 \Rightarrow \rho^2\dot{\theta} = av_0$

$\Rightarrow \rho^2\dot{\theta} = C$ 或通过初积分获得

$$\Rightarrow 2\ddot{\rho} - \frac{a^2 v_0^2}{\rho^3} + g = 0$$ 为所求！

$$2\ddot{\rho}-\frac{a^2v_0^2}{\rho^3}+g=0$$

$\because \ddot{\rho}=\frac{1}{2}\frac{d(\dot{\rho}^2)}{d\rho}$ 代入上式得: $\frac{d(\dot{\rho}^2)}{d\rho}=\frac{a^2v_0^2}{\rho^3}-g$

积分: $\dot{\rho}^2=\int_a^\rho(\frac{a^2v_0^2}{\rho^3}-g)d\rho \quad =\frac{1}{2}v_0^2(1-\frac{a^2}{\rho^2})-g(\rho-a)$

小球A在任意位置的速率为: $v=\sqrt{\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2}=?$

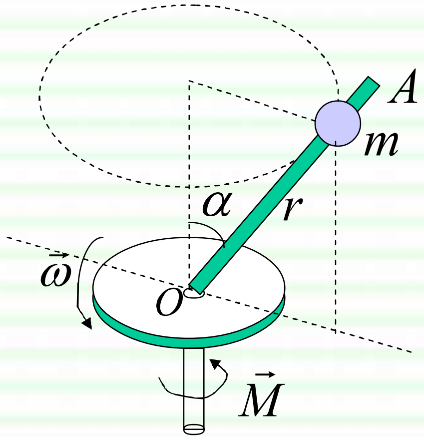
（二）$\because T=m\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2=T_2 \qquad \therefore T+V=E$

$$\therefore m\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2-mg(l-\rho)=\frac{1}{2}mv_0^2-mg(l-a)$$

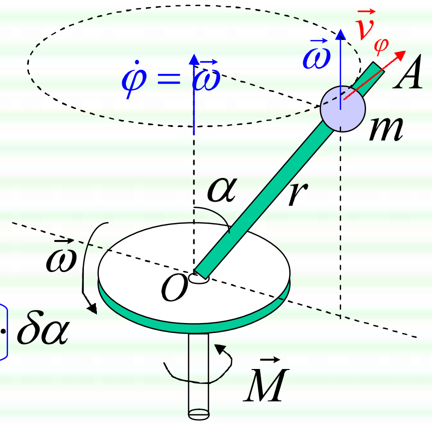
$$\because \dot{\theta}=\frac{av_0}{\rho^2}$$

$\therefore \dot{\rho}^2=\frac{1}{2}v_0^2(1-\frac{a^2}{\rho^2})-g(\rho-a)$ 结果一样!

作业1、质量为$m$的小球可在不计质量的光滑杆$OA$上自由滑动，杆铰接在以匀角速ω转动的圆盘上，并以匀角速$\dot{\alpha}=k$向下倾倒，试写出系统运动微分方程并计算出所需加在铅直轴上的力矩**M**。



解： 系统$i$=3，取φ,$r$, $\alpha$为广义坐标




小球的三个速度分量：

$$v_{\varphi}=\dot{\varphi}\cdot r\sin\alpha;\qquad v_r=\dot{r};\qquad v_{\alpha}=r\dot{\alpha}$$

$$\therefore T=\frac{1}{2}m(\dot{\varphi}^2\cdot r^2\sin^2\alpha+\dot{r}^2+r^2\dot{\alpha}^2)$$

$$\delta w=M\delta\varphi-mg\cos\alpha\cdot\delta r+(mg\cdot r\sin\alpha)\cdot\delta\alpha$$

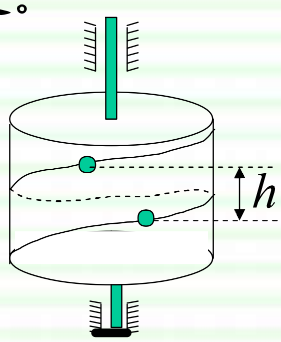
$Q_{\varphi}$ $Q_r$ $Q_{\alpha}$

$$\Rightarrow\begin{cases}m\ddot{\varphi}r^2\sin^2\alpha+2m\dot{\varphi}\dot{r}r\sin^2\alpha+2m\dot{\varphi}\dot{\alpha}r^2\sin\alpha\cos\alpha=M\\ \ddot{r}-\dot{\varphi}^2r\sin^2\alpha-r\dot{\alpha}^2=-g\cos\alpha\\ r^2\ddot{\alpha}+2r\dot{r}\dot{\alpha}-\dot{\varphi}^2r^2\sin\alpha\cos\alpha=gr\sin\alpha\end{cases}$$

$$\because\dot{\varphi}=\omega\qquad\dot{\alpha}=k$$

$$\therefore M=2m\omega\dot{r}r\sin^2\alpha+2m\omega kr^2\sin\alpha\cos\alpha$$

作业2：图示一均质圆柱体（$m_2$，半径$R$）可绕其垂直中心轴自由转动。圆柱表面刻有一倾角为θ的螺旋槽。今在槽中放一小球$m_1$自静止开始沿槽下滑，同时使圆柱体绕轴线转动，不计摩擦。求小球下滑高度$h$时相对于圆柱体的速度和圆柱体的角速度。




解：$i=2$，选圆柱体转角φ和沿螺旋槽方向的弧坐标$s$为广义坐标

圆柱体的动能：

$$T_2 = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_2}{2}R^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4}m_2R^2\dot{\varphi}^2$$

小球的动能：

$$T_I = \frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}m_1[v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos(\pi - \theta)]$$

$$= \frac{1}{2}m_1[\dot{s}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 - 2R\dot{s}\dot{\varphi}\cos\theta]$$

系统动能:

$$T=\frac{1}{4}[2m_1\dot{s}^2+(2m_1+m_2)R^2\dot{\varphi}^2-4m_1R\dot{s}\dot{\varphi}\cos\theta]$$

$$\therefore L=\frac{1}{4}[2m_1\dot{s}^2+(2m_1+m_2)R^2\dot{\varphi}^2-4m_1R\dot{s}\dot{\varphi}\cos\theta]+m_1gs\sin\theta$$

显见: $T+V=C_1$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=C_2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2m_1+m_2}{2}R^2\dot{\varphi}-m_1R\dot{s}\cos\theta=C_1\\ \dfrac{1}{4}[2m_1\dot{s}^2+(2m_1+m_2)R^2\dot{\varphi}^2-4m_1R\dot{s}\dot{\varphi}\cos\theta]-m_1gs\sin\theta=C_2\end{cases}$$

当$t$=0时： $s=0$， $\dot{s}=0$， $\dot{\varphi}=0$

得： $C_1=C_2=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi}=\dfrac{2m_1}{(2m_1+m_2)\ R}\dot{s}\cos\theta \\ \dfrac{2m_1\sin^2\theta+m_2}{2m_1+m_2}\dot{s}^2=2gs\sin\theta \end{cases}$$

$$h=s\sin\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_r=\dot{s}=\sqrt{\dfrac{2m_1+m_2}{2m_1\sin^2\theta+m_2}2gh} \\ \dot{\varphi}=\dfrac{2m_1\cos\theta}{R}\sqrt{\dfrac{2gh}{(2m_1\sin^2\theta+m_2)(2m_1+m_2)}} \end{cases}$$

作业：一、完成课堂作业

二、复习