第十三讲 支持力的求法及其他

Review

虚功原理的应

1、求系统在已知主动力作用下的平衡位

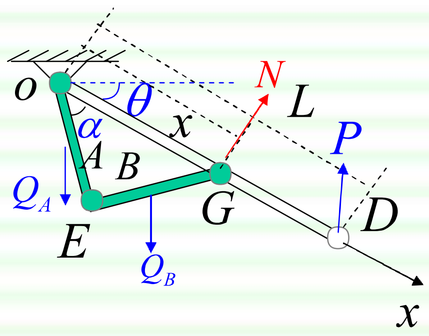
2、系统在给定位置平衡时，求主动力之间的关

3、求系统在已知主动力作用下平衡时的约束反

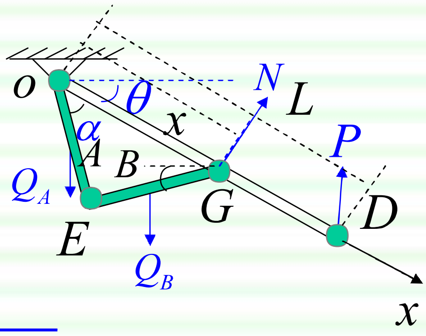
*4、求平衡构架静定问题的支撑力。 此次课重点

前次课例题:

例4: 用光滑铰链连接两根长 l，重 Q 的均质棒A 和 B，重量可忽略不计的支撑棒C 长为L，在C 棒的D 端施以竖直向上的力P，所有的接触都是光滑的。求: 平衡时图中坐标 x 和 θ 的值。



以 A、B 、C杆为系统



解: 取$q_1=x$ 和 $q_2=\theta$ y 竖直向下

三个主动力 $\vec{Q}_A$ 、$\vec{Q}_B$ 和 $\vec{P}$

$$y_A=\frac{l}{2}\sin(\alpha+\theta)$$

而: $\cos\alpha=\dfrac{\frac{x}{2}}{l}=\dfrac{x}{2l}$, $\sin\alpha=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4l^2}}=\dfrac{1}{2l}\sqrt{4l^2-x^2}$

可得: $$y_A=\frac{1}{4}x\sin\theta+\frac{1}{4}\sqrt{4l^2-x^2}\cos\theta$$

同理:

$$y_B=x\sin\theta+\frac{l}{2}\sin(\alpha-\theta)=\frac{3}{4}x\sin\theta+\frac{1}{4}\sqrt{4l^2-x^2}\cos\theta$$

$$y_D=L\sin\theta$$

则： $\delta y_A=\frac{1}{4}\sin\theta\delta x+\frac{1}{4}x\cos\theta\delta\theta-\frac{x}{4\sqrt{4l^2-x^2}}\cos\theta\delta x$

$-\frac{1}{4}\sqrt{4l^2-x^2}\sin\theta\delta\theta$

$=\left(\frac{\sin\theta}{4}-\frac{x\cos\theta}{4\sqrt{4l^2-x^2}}\right)\delta x+\left(\frac{x\cos\theta}{4}-\frac{\sqrt{4l^2-x^2}}{4}\sin\theta\right)\delta\theta$

$\delta y_B=\left(\frac{3\sin\theta}{4}-\frac{x\cos\theta}{4\sqrt{4l^2-x^2}}\right)\delta x+\left(\frac{3x\cos\theta}{4}-\frac{\sqrt{4l^2-x^2}}{4}\sin\theta\right)\delta\theta$

$\delta y_D=L\cos\theta\delta\theta$ 代入虚功原理$\delta w=0$中：

$$\delta W=Q_A\delta y_A+Q_B\delta y_B+P\delta y_D$$

$$\therefore \delta w = \underbrace{\left(\theta x\cos\theta - \frac{Q}{2}\sqrt{4l^2 - x^2}\,\sin\theta - PL\cos\theta\right)}_{Q_\theta}\delta\theta$$

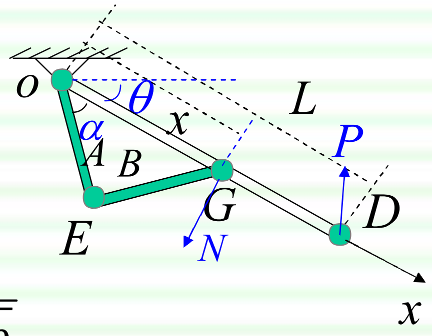
$$+\underbrace{\left(Q\sin\theta - \frac{Qx\cos\theta}{2\sqrt{4l^2 - x^2}}\right)}_{Q_x}\delta x$$

$\because \delta w = 0 \qquad \therefore Q_x = Q_\theta = 0$ 广义力!

$$\Rightarrow x = \frac{4PL}{3Q}; \qquad \theta = arctg\frac{PL}{\sqrt{(3Ql)^2 - (2PL)^2}}$$

重解例4中的约束力N?

解： ①用矢量力学求：



平衡条件：C杆对O点力矩为零。

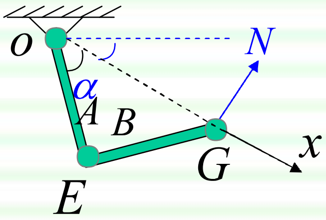
$$Nx - PL\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow N = \frac{PL\cos\theta}{x} = \frac{PL}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\theta}}$$

$$= \frac{3}{4}Q\sqrt{\frac{(3Ql)^2-(2PL)^2}{(3Ql)^2-3(PL)^2}}$$

$$x = \frac{4PL}{3Q}; \quad \theta = tg^{-1}\frac{PL}{\sqrt{(3Ql)^2-(2PL)^2}}$$

②用虚功原理求:



解除G处的约束，以 $\vec{N}$ 代之:

以 A、B 杆为系统(没有支撑杆)

仍符合应用虚功原理的条件

自由度未变，仍以 x 和 θ 为广义坐标

取原用坐标为y_A、y_B和 θ，坐标变换关系仍有:

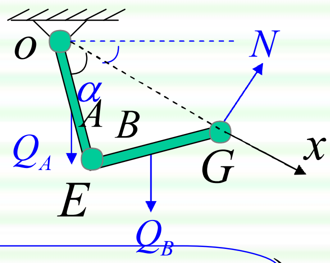
$$\delta y_A=\left(\frac{\sin\theta}{4}-\frac{x\cos\theta}{4\sqrt{4l^2-x^2}}\right)\delta x+\left(\frac{x\cos\theta}{4}-\frac{\sqrt{4l^2-x^2}\sin\theta}{4}\right)\delta\theta$$

$$\delta y_B=\left(\frac{3\sin\theta}{4}-\frac{x\cos\theta}{4\sqrt{4l^2-x^2}}\right)\delta x+\left(\frac{3x\cos\theta}{4}-\frac{\sqrt{4l^2-x^2}\sin\theta}{4}\right)\delta\theta$$

而: $\left|\delta\vec{r}_G\right|=x\delta\theta$ 方向与 $\vec{N}$ 相反。

但系统变了，受主动力为：$\vec{Q}_A$，$\vec{Q}_B$，$\vec{N}$

需重新计算广义力 Q_x 和Q_θ 。



$$\therefore \delta W = Q\delta y_A + Q\delta y_B - Nx\delta\theta$$

$$= \underbrace{Q\left(\sin\theta - \frac{x\cos\theta}{2\sqrt{4l^2-x^2}}\right)}_{Q_x}\delta x + \left(\underbrace{Qx\cos\theta - \frac{Q}{2}\sqrt{4l^2-x^2}\sin\theta - Nx}_{Q_\theta}\right)\delta\theta$$

这里Q_x 没变。Q_θ变了。由$Q_\theta = 0$知：

$$Q(x\cos\theta - \frac{1}{2}\sqrt{4l^2-x^2}\sin\theta) - Nx = 0$$

$$\therefore N = Q(\cos\theta - \frac{\sqrt{4l^2-x^2}}{2x}\sin\theta)$$

代入前面解出的 x 和 θ 值：$\therefore N = \frac{3}{4}Q\sqrt{\frac{(3Ql)^2-(2PL)^2}{(3Ql)^2-3(PL)^2}}$

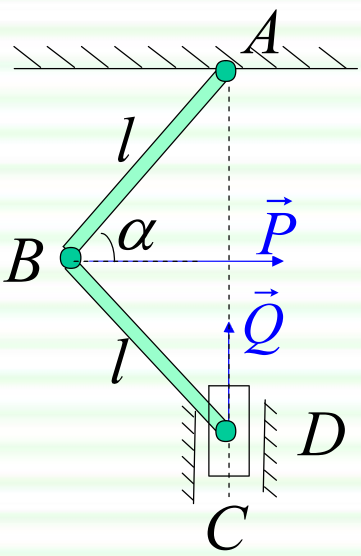
两种方法对比！

留做作业：

例8： 压缩机如图示，杆$AB=BC$，杆重可以不计，铰链和滑槽都是光滑的，滑块D的质量也可以不计。

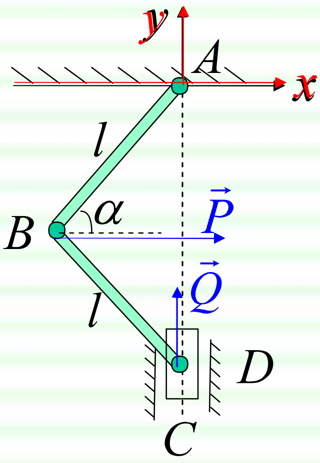
求： (1) 平衡时P,Q与α之间的关系；

(2) A处铰链给杆的约束力；



解：（1）取图中所示 Axy 坐标， $i=1,\quad q=\alpha$

主动力 **P，Q**



$$\because x_B=-l\cos\alpha,\quad y_C=-2l\sin\alpha$$

由虚功原理知：

$$\delta w=P\delta x_B+Q\delta y_C$$

$$=\left(Pl\sin\alpha-2Ql\cos\alpha\right)\delta\alpha=0$$

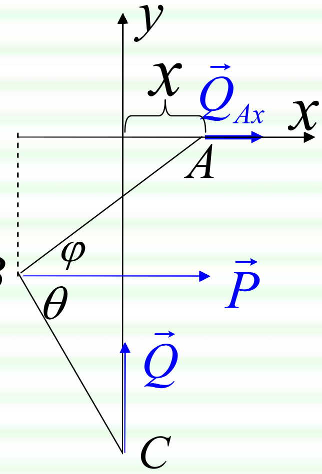
$$\because \delta\alpha\neq 0$$

$$\therefore Q_\alpha=Pl\sin\alpha-2Ql\cos\alpha=0$$

$$\Rightarrow P=2Qctg\alpha$$

（2）欲求约束力，则可采用方法②

方法②：解除A处x方向的约束，原A处在x方向的约束力 Q_{Ax} 变成主动力，此时$i=2$。



如图示：取$q_1=x$ 与$q_2=\varphi$ 为广义坐标

$$\begin{cases} x_B = x - l\cos\varphi \\ y_C = -l\sin\varphi - l\sin\theta \end{cases}$$

$$\because x - l\cos\varphi = -l\cos\theta$$

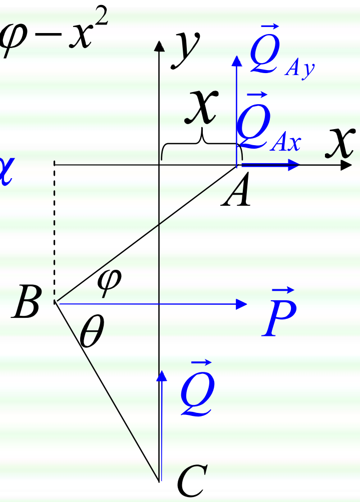
$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\sin^2\varphi + 2\frac{x}{l}\cos\varphi - \frac{x^2}{l^2}}$$

$$\Rightarrow y_C = -l\sin\varphi - \sqrt{l^2\sin^2\varphi + 2lx\cos\varphi - x^2}$$

由虚功原理知:

$$\delta W = Q_{Ax}\delta x + P\delta x_B + Q\delta y_C = Q_x\delta x + Q_\varphi\delta\varphi = 0$$

$$\therefore Q_x = Q_{Ax} + P - Q\frac{l\cos\varphi - x}{\sqrt{l^2\sin^2\varphi + 2lx\cos\varphi - x^2}}$$



在平衡位置处:

$$x = 0, \varphi = \alpha, Q_x = 0, P = 2Qctg\alpha$$

$$\therefore Q_{Ax} = -Qctg\alpha, \quad or \quad Q_{Ax} = -\frac{P}{2}$$

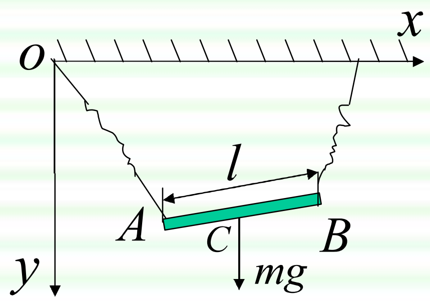
同样解除A处y方向的约束，可得:

$$Q_{Ay} = -Q, \quad or \quad Q_{Ay} = -\frac{1}{2}Ptg\alpha$$

具体推导留做作业

一、广义坐标的选择：

1、广义坐标必须是彼此独立的。



例：竖直平面内的刚体 $i=3$

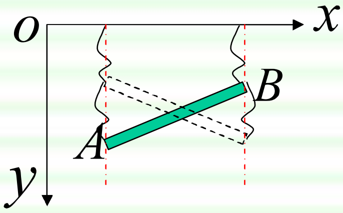
不可选择 x_A、x_B 和 x_c！

$$\because x_C=\left(x_A+x_B\right)/2$$

同理，也不可以选 y_A、y_B 和 y_C！

2、广义坐标必须唯一地确定系统位形

每一组广义坐标应确定系统唯一的一个位置。



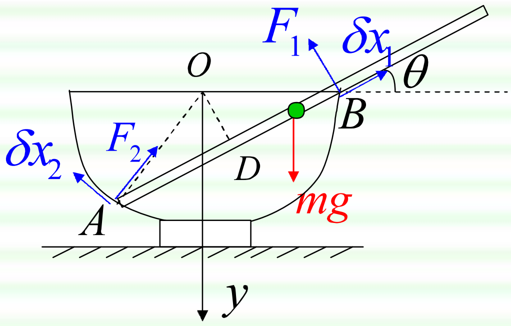
不可以选 x_A、x_B 和 y_C！

$\because$ 同一组 x_A、x_B 和 y_C 值，有两个位形。

3、平衡位置处各广义坐标的虚位移都能独立取值。

4、用分式 $Q_j = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,s)$ 时，必须查验坐标在平衡位置处的虚位移能否任意取值，不恒为零。

书中5.1题：碗半径r，棒长l，$r<0.5l$，求棒的平衡位置。



约束力F_1、F_2，显见:

$$\vec{F}_1 \perp \delta\vec{x}_1; \quad \vec{F}_2 \perp \delta\vec{x}_2$$

故：属于理想约束。

主动力mg，i=1，若取y_c为广义坐标,则

$$\therefore \delta W = mg\delta y_c = 0$$

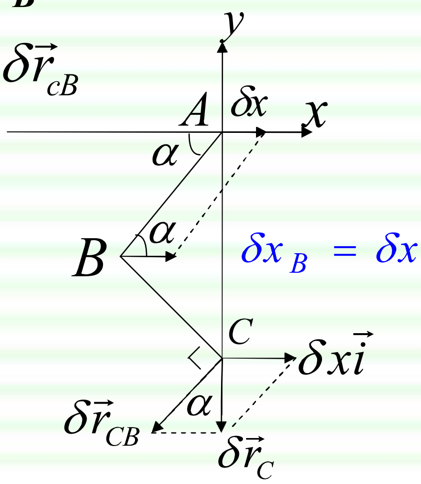
显见,y_c广义坐标的选法不合适。

**利用运动学知识找虚位移之间的关系：

在求 Q_{Ax} 时，可令 $\delta x \neq 0$、$\delta\alpha=0$，求出 δx_B、δy_C 与 δx 的关系，且直接在平衡位置处考虑它们间的关系。

在平衡位置处，$\delta\alpha=0$ 下必有 $\delta x_B=\delta x$。

以B为基点C点的虚位移：$\delta\vec{r}_c = \delta x\vec{i} + \delta\vec{r}_{cB}$



在平衡位置处，且在 $\delta\alpha=0$ 下，有：

$$\delta y_C = -ctg\alpha \cdot \delta x$$

$$\therefore \delta W = Q_x\delta x = Q_A\delta x + P\delta x_B + Q\delta y_C$$

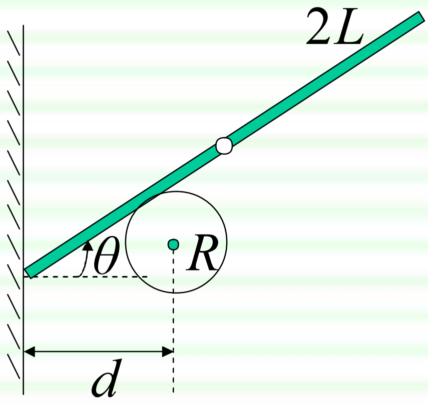
$$= \left(Q_A + P - Qctg\alpha\right)\delta x = 0$$

$$\therefore Q_A = Qctg\alpha - P \xrightarrow{P=2Qctg\alpha} -\frac{P}{2} = -Qctg\alpha$$

作业:

一、总结虚功原理！！！

二：完成预留作业。长为**2L**的匀质杆，一端抵在光滑墙上，杆身靠在固定的光滑圆柱上，求平衡时杆与水平面间夹角θ和墙的反力。



Ans.: $L\cos^3\theta + R\sin\theta = d$

二、小结：

1、 分析力学主要研究非自由质系的运动，它的特点是通过功、能等标量用数学分析的方法进行研究（这一点将在后续课程中体现）。分析力学的基本概念有约束及约束方程、广义坐标、自由度数、虚位移、广义力、理想约束等。

2、 虚位移的定义：在给定瞬时，质系中各质点所作的、为约束所允许的、无限小的位移的任一总和称为质点系的虚位移。虚位移只是对约束特性的进一步描述，与实际上作用的主动力无关。在稳定约束情况下，实位移是虚位移的一种。

3、对受完整约束的质系，自由度数等于广义坐标数目。

4、虚功（位移）原理：对具有理想约束的质点系，其平衡的充要条件是：作用于质系的主动力在任一虚位移上所作虚功之和等于零。

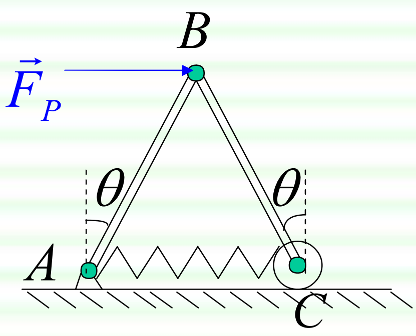
$$\delta w = 0$$

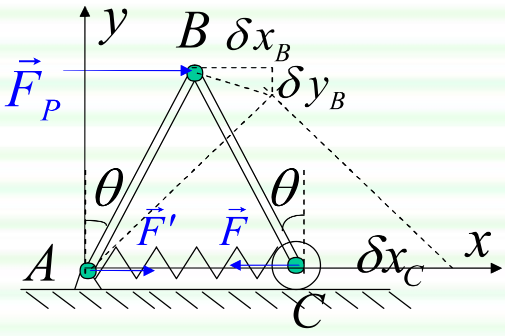
5、当质系的位形用广义坐标表出时，虚位移原理的形式是：广义力等于零。

$$Q_j = \sum_i^{3n} F_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

6、约束力的求法。

上次作业、图示所求机构(光滑接触)，$AB=BC=l$，弹簧原长为l_0，刚度为$\mathbf{k}$，杆的重量忽略不计，求平衡时的角θ及弹簧张力的表达式。





解：选坐标系Axy如图示：

把弹簧力**F**当作主动力。

B点的虚位移为 δx_B, δy_B,

C点的虚位移为 δx_C

虚功原理： $F_p \delta x_B - F\delta x_C = 0$

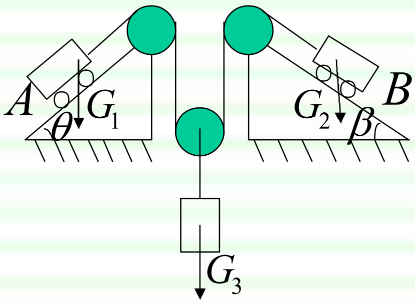
$$\begin{cases} x_B = l\sin\theta \\ x_C = 2l\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x_B = l\cos\theta\cdot\delta\theta \\ \delta x_C = 2l\cos\theta\cdot\delta\theta \end{cases} \Rightarrow F = \frac{F_p}{2}$$

此时弹簧伸长： $\delta = x_C - l_0 = 2l\sin\theta - l_0$

弹簧力的大小为：

$$F = k\delta = k(2l\sin\theta - l_0) \Rightarrow \sin\theta = \frac{F_p + 2kl_0}{4kl}$$

上次作业：若不计滑轮及绳的质量和摩擦，求平衡时G_1、G_2的值。



解： *i*=2?

$$G_1\delta y_A + G_2\delta y_B - G_3\delta y_3 = 0$$

$$\because 2\delta y_3 = \frac{\delta y_A}{\sin\theta} + \frac{\delta y_B}{\sin\beta}$$

$$\therefore 2G_1\delta y_A + 2G_2\delta y_B - G_3\left(\frac{\delta y_A}{\sin\theta} + \frac{\delta y_B}{\sin\beta}\right) = 0$$

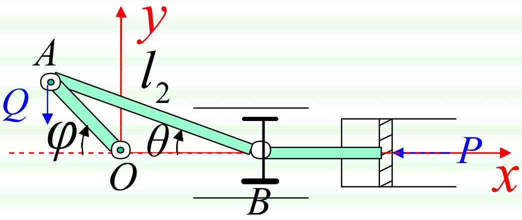
$$\therefore \boxed{\left(G_1 - \frac{G_3}{2\sin\theta}\right)}\delta y_A + \boxed{\left(G_2 - \frac{G_3}{2\sin\beta}\right)}\delta y_B = 0$$

0

$$\Rightarrow G_1 = \frac{G_3}{2\sin\theta}; G_2 = \frac{G_3}{2\sin\beta}$$

例7、光滑曲柄连杆机构中，B端固定于活塞的连杆上并随之移动，再通过连杆BA使曲柄AO绕定点O转动。设活塞所受到的水平力P与OA转动的力Q平衡，用虚功原理求Q与P的大小之比Q/P。

解：i=1，取 $q=\varphi$



$$\begin{cases} x_B = l_2 \cos\theta - l_1 \cos\varphi \\ y_A = l_1 \sin\varphi \end{cases}$$

由几何关系知：$l_1 \sin\varphi = l_2 \sin\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta x_B = -l_2 \sin\theta\delta\theta + l_1 \sin\varphi\delta\varphi \\ \delta y_A = l_1 \cos\varphi\delta\varphi \\ l_1 \cos\varphi\delta\varphi = l_2 \cos\theta\delta\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta x_B = -l_2 \sin\theta \frac{l_1 \cos\varphi}{l_2 \cos\theta}\delta\varphi + l_1 \sin\varphi\delta\varphi$$

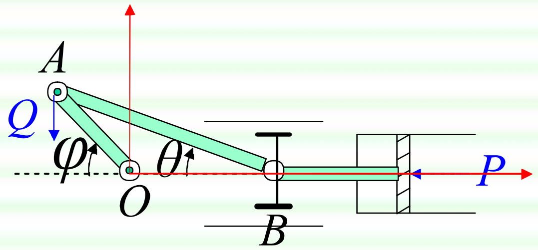
由虚功原理知:

$$\delta w=\vec{P}\cdot\delta\vec{r}_B+\vec{Q}\cdot\delta\vec{r}_A \quad =-P\cdot\delta x_B+Q\cdot\delta y_A$$

$$=-P\left(-\sin\theta\frac{l_1\cos\varphi}{\cos\theta}\delta\varphi+l_1\sin\varphi\delta\varphi\right)+Ql_1\cos\varphi\delta\varphi \quad =0$$

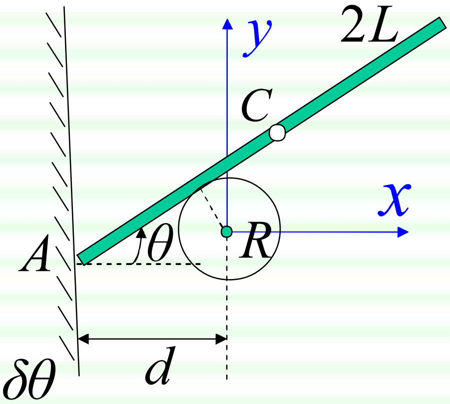
$$\therefore \frac{Q}{P}=\frac{-tg\theta l_1\cos\varphi+l_1\sin\varphi}{l_1\cos\varphi}$$

$$=tg\varphi-tg\theta$$



$$l_1\sin\varphi=l_2\sin\theta$$

作业：长为2L的匀质杆，一端抵在光滑墙上，杆身靠在固定的光滑圆柱上，求平衡时杆与水平面间夹角θ和墙的反力。



解：①②取图中所示oxy坐标，

i=1，q=θ　主动力mg

$$\because y_c = L\sin\theta - d\,tg\theta + \frac{R}{\cos\theta}$$

$$\therefore \delta y_c = (L\cos\theta - d\sec^2\theta + \frac{R\sin\theta}{\cos^2\theta})\ \delta\theta$$

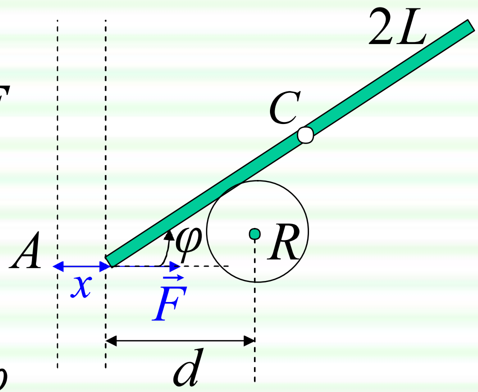
$$\therefore \delta w = mg\delta y_c$$

$$\Rightarrow Q_\theta = mg(L\cos\theta - d\sec^2\theta + \frac{R\sin\theta}{\cos^2\theta}) = 0$$

$$\Rightarrow L\cos^3\theta + R\sin\theta = d$$

②解除A点约束，约束力为主动力

$i=2$，$q_1=x$， $q_2=\varphi$ 主动力mg，F



$$\because y_c = L\sin\varphi - (d-x)\,tg\varphi + \frac{R}{\cos\varphi}$$

$$\therefore \delta y_c = tg\varphi\delta x + \left(L\cos\varphi - d\sec^2\varphi + x\sec^2\varphi + \frac{R\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right)\delta\varphi$$

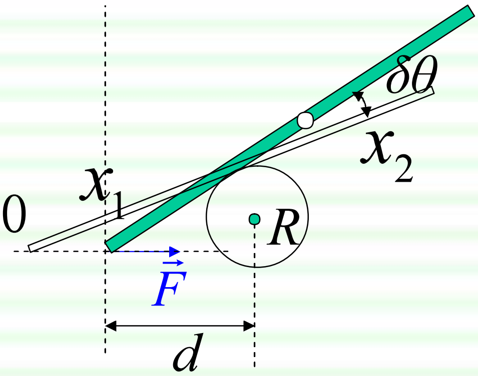
$$\therefore \delta w = mg\delta y_c + F\delta x$$

$$\Rightarrow Q_x = F - mgtg\varphi = 0$$

平衡位置处：$\varphi = \theta$

$$\therefore F = mgtg\theta$$

法（二）：？



主动力 mg，F

$$Fx_1\delta\theta\sin\theta - G(2l - x_1)\cos\theta\delta\theta = 0$$

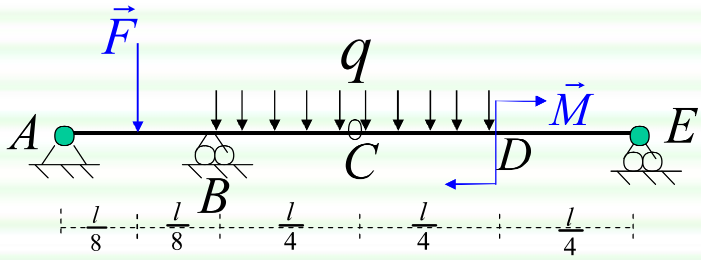
$$\because x_1 = Rctg\theta + \left(d - \frac{R}{sin\theta}\right)\frac{1}{cos\theta}$$

$$\therefore F = \frac{2LG}{R + \frac{1}{\cos^2\theta}(d\sin\theta - R)} - Gctg\theta$$

$$= Gctg\theta\left(\frac{2L\cos\theta}{d - Gsin\theta} - 1\right)$$

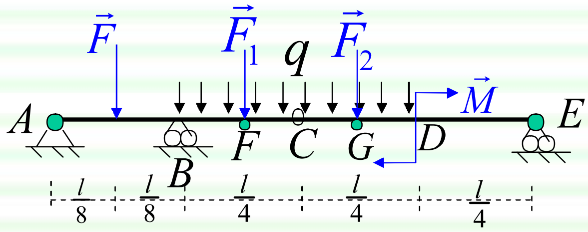
*三、求平衡构架静定问题的支撑力。

例9、图示组合梁由铰链C连接AC和CE而成，载荷分布如图。已知跨度**l=8m**，**F=4900N**，均布力**q=2450N/m**，力偶矩**M=4900Nm**。求支座反力。



解： 把q合成为合力F_1,F_2，

$F_1 = F_2 = ql/4 = 4900N$，分别作用与点F和点G。

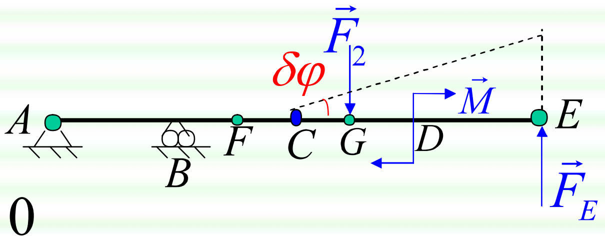


1)求E处支座反力:

解除约束E，代之以F_E并视为主动力。

CE可绕C点转动，系统i=1，虚位移δφ

三个主动力为：$\vec{F}_2$、$\vec{F}_E$、$\vec{M}$



虚功原理:

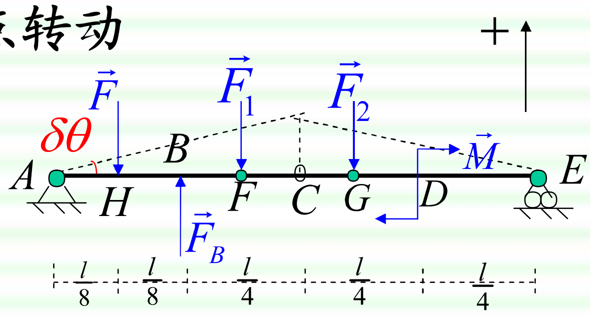
$$-F_2\underbrace{\boxed{\delta y_G}}_{\delta\varphi} - M\delta\varphi + F_E\underbrace{\boxed{\delta y_E}}_{4\delta\varphi} = 0$$

$$\therefore F_E = \frac{M + F_2}{4} = 2450N$$

2）求支座B处的约束反力:

去掉支座B代之F_B并视为主动力。

梁AC和CE可分别绕A、E点转动



i=1，虚位移δθ

五个主动力为:

$$\vec{F}、\vec{F}_1、\vec{F}_2、\vec{F}_B、\vec{M}$$

$$\therefore -F\underbrace{\boxed{\delta y_H}}_{\delta\theta}+F_B\underbrace{\boxed{\delta y_B}}_{2\delta\theta}-F_1\underbrace{\boxed{\delta y_F}}_{3\delta\theta}-F_2\boxed{\delta y_G}+M\delta\theta=0$$

$$\therefore F_B=14700N$$

3）求支座A处的约束反力:

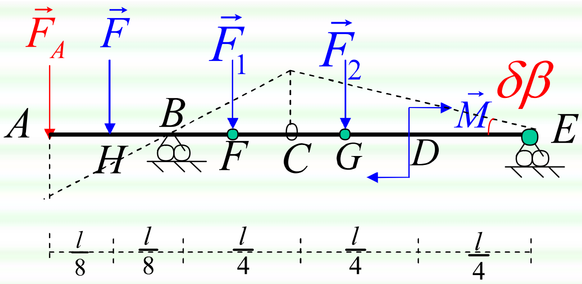
解除A处约束，代以F_A视为主动力。

梁AC、CE可分别绕B、E转动，

i=1，虚位移δ β

五个主动力为:

$\vec{F}$、$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、$\vec{F}_A$、$\vec{M}$



$$F_A\underbrace{\delta y_A}_{4\delta\beta}+F\underbrace{\delta y_H}_{2\delta\beta}-F_1\underbrace{\delta y_F}_{2\delta\beta}-F_2\underbrace{\delta y_G}_{3\delta\beta}+M\delta\beta=0$$

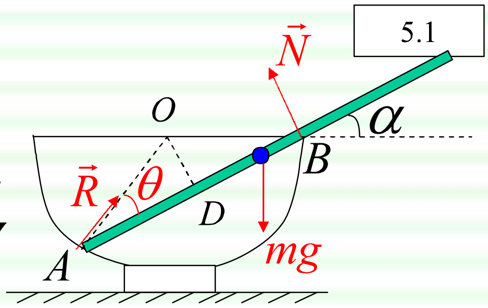
$$\Rightarrow F_A=2450N$$

Why? $\vec{F}_A$ ↓

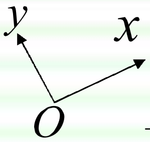
〖5.1〗解:

方法一:矢量力学:受力如图示

建立图示坐标系,



由平衡方程: $\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma M_B = 0 \end{cases}$

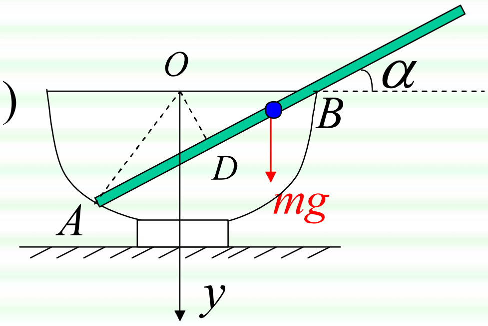


$$\Rightarrow \begin{cases} R\cos\theta = mg\sin\theta & (1) \\ Rc\sin\theta = mg(c-\dfrac{L}{2})\cos\theta & (2) \end{cases}$$

又有几何关系: $$tg\theta = \frac{\overline{oD}}{c/2} = \frac{\sqrt{r^2-(c/2)^2}}{c/2} \qquad (3)$$

解(1)(2)(3): $$\Rightarrow L = \frac{4(c^2-2r^2)}{c}$$

方法二:分析力学: 显见**$i=1$**



由平衡条件: $\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1)$

即: $mg \cdot \delta y_c = 0$

$$y_c = 2r\cos\alpha\sin\alpha - \frac{l}{2}\sin\alpha$$

$$= r\sin 2\alpha - \frac{l}{2}\sin\alpha$$

$\therefore \delta y_c = (2r\cos 2\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha)\delta\alpha$ 代入(1)中:

$$\Rightarrow mg(2r\cos 2\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha)\delta\alpha = 0$$

由于 $\delta\alpha$ 在约束条件下是任意的, 则:

$$2r\cos 2\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha = 0$$

$$2r\cos 2\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha = 0$$

利用： $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$4r\cos^2\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha - 2r = 0$$

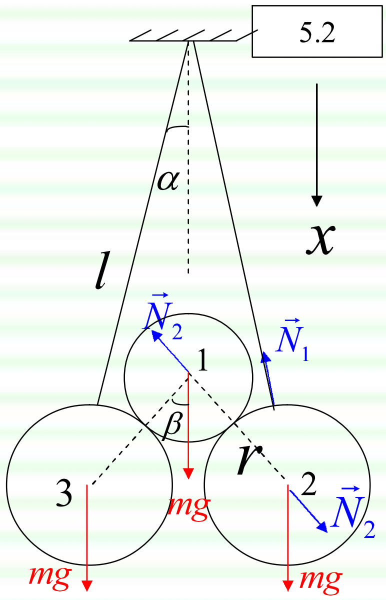
$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4\times 8r\times 4r}}{2\times 8r} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 128r^2}}{16r}$$

由题意知： $\cos\alpha > 0$，且 $2r\cos\alpha = c$

$$\Rightarrow \frac{l + \sqrt{l^2 + 128r^2}}{16r} = \frac{c}{2r}$$

$$\Rightarrow l = \frac{4(c^2 - 2r^2)}{c}$$

【5.2】试用虚功原理解释3.2题。



解:方法一:矢量力学:受力如图示

由平衡方程: $\Sigma F_x = 0$

$$\Rightarrow 3mg = 2N_1\cos\alpha \therefore mg = \frac{2}{3}N_1\cos\alpha \quad (1)$$

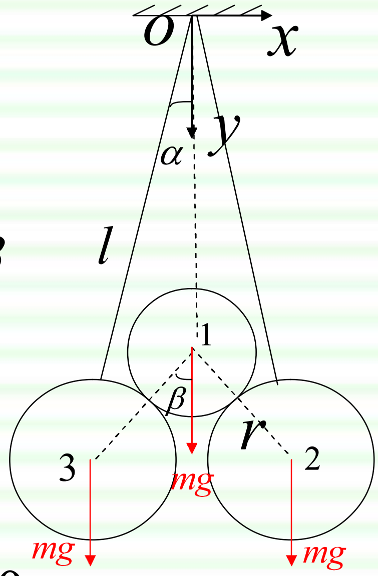
对球1有: $mg = 2N_2\cos\beta \quad (2)$

$$\because (1) = (2) \quad \therefore 3N_2\cos\beta = N_1\cos\alpha \quad (3)$$

又水平方向平衡对球2有: $N_2\sin\beta = N_1\sin\alpha \quad (4)$

$(4)/(3)$: $3tg\alpha = tg\beta$

方法二:分析力学: 显见i=1?



三个主动力:

$$y_1=(r+l)\cos\alpha-2r\cos\beta$$

$$y_2=y_3=(r+l)\cos\alpha$$

$$\delta y_1=-(r+l)\sin\alpha\delta\alpha+2r\sin\beta\delta\beta$$

$$\delta y_2=\delta y_3=-(r+l)\sin\alpha\delta\alpha$$

由虚功原理: $\delta\overline{W}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$

$$P_1\delta y_1+P_2\delta y_2+P_3\delta y_3=0$$

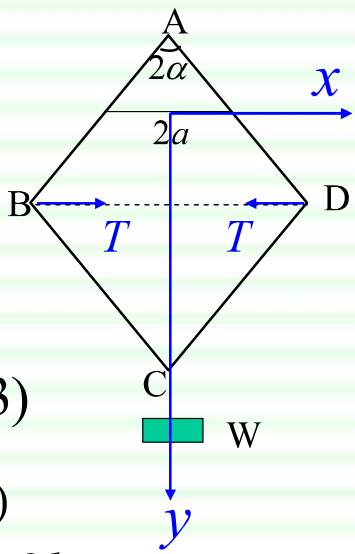
$$\therefore -3(r+l)\sin\alpha\delta\alpha+2r\sin\beta\delta\beta=0$$

化简后得: $\dfrac{\delta\alpha}{\delta\beta}=\dfrac{2r\sin\beta}{3(l+r)\sin\alpha}$

又由 $x_2=(l+r)\sin\alpha=2r\sin\beta$ 得: $\dfrac{\delta\alpha}{\delta\beta}=\dfrac{2r\cos\beta}{(l+r)\cos\alpha}$

$$\Rightarrow tg\beta=3tg\alpha$$

〖5.3〗长度为l的轻棒四根，光滑的联成一菱形$ABCD$。AB、AD两边支于同一水平线上相距为2a的两根钉上,BD间则用一轻绳连接,C点上系一重物W,设A点上的顶角为2α,试用虚功原理求绳的张力T。



解:分析：在相距2a的两钉处约束反力垂直于虚位移，为理想约束。

去掉绳，代之以力T，且视为主动力后采用虚功原理。

选α为广义坐标，自由度为1。

由虚功原理：$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0\qquad(i=1,2,3)$$

$$W\delta y_c+T_B\delta x_B-T_D\delta x_D=0\qquad(1)$$

$$x_B=-l\sin\alpha;\qquad x_D=l\sin\alpha;\qquad y_C=2l\cos\alpha-actg\alpha$$

取变分： $\delta x_B = -l\cos\alpha\delta\alpha;\qquad \delta x_D = l\cos\alpha\delta\alpha$

$$\delta y_C = -2l\sin\alpha\delta\alpha + \frac{a}{\sin^2\alpha}\delta\alpha$$

并代入（1）式后化简得：

$$[W(-2l\sin\alpha + \frac{a}{\sin^2\alpha}) - 2Tl\cos\alpha]\delta\alpha = 0$$

因为 $\delta\alpha$ 在约束条件下为任意的，则：

$$\overline{W}(-2l\sin\alpha + \frac{a}{\sin^2\alpha}) - 2Tl\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow T = W(-tg\alpha + \frac{a\sin\alpha}{2l\cos\alpha\sin^3\alpha}) = Wtg\alpha[\frac{a}{2l}\csc^3\alpha - 1]$$