

基于解析梯度的经典 Lambert 问题迭代求解方法

张世杰, 聂 涛, 赵亚飞, 段晨阳
(哈尔滨工业大学卫星技术研究所, 哈尔滨 150080)

摘 要: 针对现有求解模型复杂、收敛速度慢等问题, 在将经典 Lambert 转移问题转化为超越方程的基础上, 提出一种基于解析梯度的 Lambert 问题迭代求解算法。选择转移轨道的真近点角为迭代变量, 导出转移时间关于真近点角的解析梯度, 构造一种基于解析梯度的牛顿迭代算法, 降低了算法计算复杂度。理论分析表明该算法具有二阶以上的收敛速度。依据偏心率向量与转移轨道形状的关系, 通过几何方法分析得到转移轨道在初始位置处的速度约束条件, 推导转移轨道真近点角的最大值和最小值的解析表达式, 并采用线性插值方法确定迭代初值, 进一步提高了迭代算法的收敛速度。数学仿真结果表明在各种转移条件下算法均能快速收敛, 采用所给出的初值选取方法初值确定精度高, 进而能够加快收敛速度, 而与较割线法相比较收敛速度快、计算量小, 验证了所提出算法的有效性。

关键词: 轨道转移; Lambert 问题; 真近点角; 解析梯度; 牛顿迭代算法

中图分类号: V412.4

文献标识码: A

文章编号: 1000-1328(2016)03-0316-09

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2016.03.010

Iterative Solution of Classical Lambert Problem Based on Analytical Gradient

ZHANG Shi-jie, NIE Tao, ZHAO Ya-fei, DUAN Chen-yang

(Research Center of Satelite Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: A method based on analytical gradients for solving classical Lambert orbit transfer problem is presented for existing complex solution model and slow convergence rate. The Lambert problem is transformed into transcendental equation for solving the constrained problem with transfer time. The true anomaly is selected as the iterative variable. The analytical gradient of the transfer time with respect to the true anomaly is to update the true anomaly at each iteration step. Theoretical analysis shows that the algorithm has above second-order velocity. The iteration interval is derived from transfer orbit velocity constraints, which deduced from the relationship between eccentricity vector and transfer orbit shape by use of the geometric method, and the iteration initial value of true anomaly is determined by using the linear interpolation algorithm to improve initial guess accuracy. Several simulations have been conducted to demonstrate the validity of the algorithm. The results indicate that the proposed method with high initial guess accuracy improves the convergence rate and converges fast under different transfer conditions. The method can not only converges faster but also has smaller computational complexity compared with the secant iteration algorithm.

Key words: Orbit transfer; Lambert's problem; True anomaly; Analytical gradient; Newton iteration algorithm

0 引 言

Lambert 问题是确定经过特定转移时间到达目标位置转移轨道的一类求解问题^[1], 通过 Lambert 问题求解可以开展转移轨道设计与优化, 也可计算

轨道转移所需速度增量, 实现轨道转移控制与制导^[2-4], 是航天器轨道相关问题的重要基础。自 Gauss^[5]首次提出迭代求解方法以来, 已经形成了众多求解算法^[1,6-7], 早期研究的重点集中于以不同变量表示的求解模型, 近几年来, 逐渐将重点转移到适

应于在轨应用的快速求解算法^[8-10]。

依据转移圈数的不同,Lambert 问题可分为单圈和多圈 Lambert 问题^[11-13],多圈 Lambert 问题通过引入飞行圈数,建立燃料消耗与飞行圈数的优化求解模型,采用优化算法确定燃料最优的飞行圈数,这种方法被广泛用于转移时间比较长的航天任务规划中^[11]。而对转移时间有严格要求的情况,需采用单圈 Lambert 问题进行求解。

单圈 Lambert 问题的核心在于在选择独立变量基础上,建立特定形式的转移时间函数,利用转移时间的约束条件,将其转化为超越方程求根的问题,进而采用迭代方法进行求解^[1]。迭代变量可有多种选择,包括与圆锥曲线性质相关的几何变量、普适变量及与轨道六根数直接相关的轨道根数^[1,5-7]。其中,几何变量和普适变量没有直观物理意义,同时求解过程涉及到大量的级数运算,导致求解过程复杂。轨道根数直观且具有明显物理意义,但是转移时间关于半长轴以及偏心率都不是单值函数^[1],不能保证 Lambert 问题解的唯一性,为此,Avanzini^[6]引入偏心率率构建 Lambert 问题模型,将偏心率分解成平行于连接初始点与目标点弦方向的弦向偏心率分量以及垂直于弦方向的横向偏心率分量,并验证了转移时间关于横向偏心率分量是单调的,但转移时间的函数及算法求解模型较为复杂。本文将选择转移轨道在初始位置处的真近点角为变量,直接利用开普勒时间方程推导出转移时间的函数,进而简化 Lambert 问题的求解模型。

Lambert 问题可转化为一类超越方程,其求解常采用迭代方法,其中迭代算法和初值精度是影响算法性能的主要因素^[10]。对于迭代算法来讲,目前主要有二分法、牛顿迭代法、割线法等^[14],牛顿迭代法收敛速度较快,但每次迭代会涉及到导数或者梯度计算,运算量较大,为此本文拟根据转移时间函数的具体表示形式,推导出转移时间函数关于真近点角梯度的解析表达式,以减少算法的计算量。为选取精度较高的迭代初值进而提高算法收敛速度,Gooding^[8]利用启发式算法为迭代变量提供一个好的初值,该方法被认为计算求解最有效的方法之一。Ahn 等^[10]根据转移轨道的大致范围,预先制定出初值列表,在实时计算过程中只需通过查表确定迭代变量的初值,能够快速给出较高精度的初值。本文

将利用几何方法推导出迭代变量的范围,并利用线性插值的方法对初值进行估计。

综上,本文以单圈 Lambert 问题为研究对象,重点研究 Lambert 问题的求解算法,选择真近点角为迭代变量,通过建立转移时间关于真近点角梯度的解析表达式以及利用线性插值方法估计算法初值,改善 Lambert 问题的求解性能,期望本文研究对轨道转移、轨道交会等航天任务提供一定的参考。

1 Lambert 问题的求解模型

Lambert 问题是根据初始位置 r_1 和终端位置 r_2 以及飞行时间 t_m ,求解初始位置的速度,在二体动力学假设下,航天器的运行轨道为圆锥曲线,为此只需确定初始位置处速度的大小或者方向即可确定该速度矢量^[1],几何描述如图 1 所示,其中 P_1 、 P_2 分别为初始位置和目标位置, θ_f 为转移角度, t_m 为给定的转移时间。可选择描述圆锥曲线的几何变量、普适变量及轨道六根数相关的轨道根数^[1,5-7]等作为 Lambert 求解算法变量 x ,然后通过建立转移时间关于该变量的函数 $f(r_1, r_2, \theta_f; x)$ 对 Lambert 问题进行描述,最后利用 Lambert 问题中转移时间为常值 t_m 的约束条件,将问题转化为超越方程求根的问题

$$f(r_1, r_2, \theta_f; x) - t_m = 0 \quad (1)$$

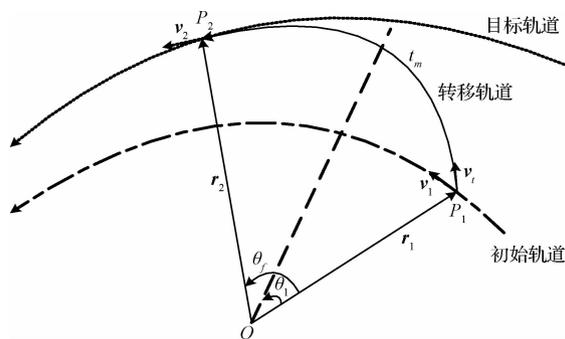


图1 Lambert 问题的几何描述

Fig. 1 Geometric description of Lambert's problem

为求解式(1)给定的超越方程,本文选择转移轨道在初始位置处的真近点角 θ_1 为变量,根据 Lambert 问题给定的初始条件,利用文献[15]中给出的结论,比较给定转移时间 t_m 与抛物线型转移时间 ΔT_p ,有

$$\begin{cases} \Delta T_p < t_m, & \text{转移轨道为椭圆型} \\ \Delta T_p = t_m, & \text{转移轨道为抛物线型} \\ \Delta T_p > t_m, & \text{转移轨道为双曲线型} \end{cases} \quad (2)$$

通过判断转移轨道的类型,即可确定 Lambert 问题转移时间关于真近点角的函数 $f(\theta_1)$, 进而建立以真近点角 θ_1 为迭代变量的 Lambert 问题求解模型:

$$t_F = f(\theta_1) \quad (3)$$

$$(\theta_1)_{k+1} = \varphi((\theta_1)_k) \quad (4)$$

$$|t_m - t_F| < \varepsilon \quad (5)$$

式(3)是转移时间关于真近点角 θ_1 的函数,式(4)是迭代算法,式(5)是允许的误差范围,其中 t_m 为给定的转移时间, ε 为误差阈值。

在二体假设下,初始位置和目标位置决定了转移轨道所在的平面,因此可以确定转移角度为

$$\theta_f = \arccos\left(\frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|}\right) \quad (6)$$

当给定转移轨道在初始位置处的真近点角 θ_1 时,就可以确定目标位置所对应的真近点角 θ_2

$$\theta_2 = \theta_1 + \theta_f \quad (7)$$

进一步其他轨道根数就可表示为

$$\begin{aligned} e &= \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2} \\ p &= r_1 (1 + e \cos \theta_1) \\ a &= \frac{p}{1 - e^2} \end{aligned} \quad (8)$$

式(6)~(8)给出了转移轨道根数与真近点角 θ_1 的关系,可看出只要目标点到地心的距离 r_1 与初始位置到地心距离 r_2 不相等 ($r_1 \neq r_2$), 利用真近点角 θ_1 就能唯一的确定转移轨道,而对于 $r_1 = r_2$ 的情况,由偏心率计算公式可知此时会出现奇异。本文只考虑 $r_1 \neq r_2$ 情况下的 Lambert 问题,对于 $r_1 = r_2$ 情况可利用文献[6]给出的偏心率迭代方法进行求解。

对于抛物线型转移轨道,可利用抛物线型转移轨道的偏心率为1的条件直接确定真近点角 θ_1 , 进而求解出抛物线型转移轨道的转移时间 ΔT_p :

$$\begin{aligned} \Delta T_p &= \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \left[\left(\frac{1}{6} \tan^3 \frac{\theta_2}{2} + \frac{1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{6} \tan^3 \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{2} \tan \frac{\theta_1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

当 $\Delta T_p \neq t_m$ 时,转移轨道类型为椭圆型或双曲线型,其转移时间函数可表示为

$$f(a, M_1, M_2; \theta_1) = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (M_2 - M_1) \quad (10)$$

式中: M 代表平近点角,下角标与真近点角 θ_1 和 θ_2 对应,平近点角是关于真近点角的函数,具体形式为 $M(e; \theta) =$

$$\begin{cases} 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}, & 0 < e < 1 \\ \frac{e \sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan \frac{\theta}{2}}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan \frac{\theta}{2}} \right), & e > 1 \end{cases} \quad (11)$$

2 基于解析梯度的迭代算法

对于上述超越方程的求解,目前有二分法、牛顿迭代法、割线法等^[14],其中二分法和割线法的计算过程简单但收敛速度慢,而牛顿迭代法的收敛速度快,其迭代公式可表示为

$$\theta_{1,n+1} = \theta_{1,n} + \frac{t_m - f(\theta_{1,n})}{\frac{df(\theta_{1,n})}{d\theta_{1,n}}} = \theta_{1,n} + \frac{t_m - t_{F,n}}{\frac{df(\theta_{1,n})}{d\theta_{1,n}}} \quad (12)$$

式中:第一个下标为字母下标号,第二个下标代表第 n 次迭代。

由式(12)可知迭代需要转移时间关于真近点角的梯度信息,梯度信息求解会增加计算量,为此,可利用只涉及代数运算的梯度解析式降低计算量。

2.1 转移时间的解析梯度函数

梯度用于描述函数的最大变化率,利用梯度信息进行迭代,能够提高算法的收敛速度。考虑以复合函数形式给出的转移时间函数,为求解其关于真近点角的梯度,需首先求出转移时间关于中间变量的微分,并将其表达成关于真近点的微分形式,进而可得到转移时间关于真近点的梯度。

基于以上思想,由转移时间函数计算形式(10),可求得转移时间关于半长轴 a ,平近点角 M 的微分:

$$\begin{aligned} df &= d \left(\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [M_2 - M_1] \right) = \\ &= \frac{3t_F}{2a} da + \left(\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \right) \cdot (dM_2 - dM_1) \end{aligned} \quad (13)$$

为求得 da , dM_1 和 dM_2 , 可对(8)求微分得到

$$\begin{cases} de = \frac{(r_2 - r_1)(r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2)}{(r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2)^2} d\theta_1 \triangleq K_e \cdot d\theta_1 \\ dp = r_1 r_2 e \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2} d\theta_1 \triangleq K_p \cdot d\theta_1 \\ da = \left(\frac{1}{1 - e^2} K_p + \frac{2pe}{(1 - e^2)^2} K_e \right) d\theta_1 \triangleq K_a \cdot d\theta_1 \end{cases} \quad (14)$$

式中: K_e 、 K_p 及 K_a 分别代表偏心率 e 、半通径 p 及半长轴 a 关于真近点角 θ_1 的微分系数。

对于椭圆型转移轨道, 可以推导出 dM 关于真近点角的微分为:

$$\begin{aligned} dM &= - \left[\frac{\sin \theta (2 + e \cos \theta) \sqrt{1 - e^2}}{(1 + e \cos \theta)^2} de + \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{1 + e \cos \theta} d\theta \right] \\ &= - \left[\frac{\sin \theta (2 + e \cos \theta) \sqrt{1 - e^2}}{(1 + e \cos \theta)^2} K_e + \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{1 + e \cos \theta} \right] \cdot d\theta \triangleq K_M(\theta) \cdot d\theta \end{aligned} \quad (15)$$

式中: $K_M(\theta)$ 代表平近点角 M 关于真近点角的微分函数, 它为真近点角的函数。

而对于双曲线型转移轨道, 同理可以推导出 dM 关于真近点角的微分为:

$$\begin{aligned} dM &= \left[\frac{(4e^2 - 2) \sin \theta + (e^3 - e) \sin 2\theta}{2 \sqrt{e^2 - 1} (1 + e \cos \theta)^2} K_e + \frac{(e^2 - 1)^{3/2}}{(1 + e \cos \theta)^2} \right] \cdot d\theta \triangleq K_M(\theta) \cdot d\theta \end{aligned} \quad (16)$$

因此可以确定 $dM_1 = K_M(\theta_1) \cdot d\theta_1$ 和 $dM_2 = K_M(\theta_2) \cdot d\theta_2 = K_M(\theta_2) \cdot d\theta_1$ 。

将式(14), 式(15)或式(16)代入(13)中, 可确定转移时间的全微分, 对于椭圆型转移轨道, 有

$$dt_F = \frac{3t_F K_a}{2a} \cdot d\theta_1 + \left(\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \right) \cdot [K_M(\theta_2) - K_M(\theta_1)] \cdot d\theta_1 \quad (17)$$

而对于双曲线型转移轨道, 半长轴计算公式采用 $a = p/(e^2 - 1)$, 此时 $da = -K_a \cdot d\theta_1$, 从而可得:

$$dt_F = -\frac{3t_F K_a}{2a} \cdot d\theta_1 + \left(\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \right) \cdot [K_M(\theta_2) - K_M(\theta_1)] \cdot d\theta_1 \quad (18)$$

由式(17)和(18), 可以确定转移时间关于真近点角 θ_1 的解析梯度为

$$\frac{dt_F}{d\theta_1} = \begin{cases} \frac{3t_F K_a}{2a} + \left(\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \right) \cdot [K_M(\theta_2) - K_M(\theta_1)] \\ -\frac{3t_F K_a}{2a} + \left(\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \right) \cdot [K_M(\theta_2) - K_M(\theta_1)] \end{cases} \quad (19)$$

2.2 收敛性分析

迭代收敛阶判定定理^[14]: 设迭代函数 $\varphi(x)$ 在方程 $x = \varphi(x)$ 根 α 的邻域内有充分多阶连续导数, 则迭代格式 $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ 关于 α 是 p 阶收敛的充要条件是

$$\begin{cases} \varphi^{(j)}(\alpha) = 0, j = 1, 2, \dots, p-1 \\ \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0 \end{cases} \quad (20)$$

由迭代公式(12), 可以得到迭代函数为

$$\varphi(\theta_1) = \theta_1 + \frac{t_m - f(\theta_1)}{f'(\theta_1)} \quad (21)$$

进一步关于迭代变量 θ_1 求导可得

$$\varphi'(\theta_1) = 1 - \frac{[f'(\theta_1)]^2 - (t_m - f(\theta_1))f''(\theta_1)}{[f'(\theta_1)]^2} \quad (22)$$

对上式进行化简得

$$\varphi'(\theta_1) = \frac{[t_m - f(\theta_1)]f''(\theta_1)}{[f'(\theta_1)]^2} \quad (23)$$

不妨假设超越方程的解为 $\theta_1 = \alpha$, 将其代入方程(23)中, 可得

$$\varphi'(\alpha) = \frac{[t_m - f(\alpha)]f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} \quad (24)$$

若超越方程的解为 $\theta_1 = \alpha$, 则有 $f(\alpha) - t_m = 0$, 故

$$\varphi'(\alpha) = 0 \quad (25)$$

同理, 对式(23)继续求导, 可得 $\varphi''(\theta_1)$ 为

$$\varphi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad (26)$$

当 $f''(\alpha) \neq 0$ 时, $\varphi''(\alpha) \neq 0$, 由收敛阶判定定理可知, 该方法具有二阶收敛速度, 而当 $f''(\alpha) = 0$ 时, 该方法为二次以上收敛速度。

3 迭代变量初值的确定

对于迭代法来讲, 迭代变量初值的确定精度, 会直接影响到算法收敛性^[14]。为此本节将先推导出迭代变量范围, 然后确定迭代变量初值。

根据文献[1]可知, 当给定了 Lambert 问题初始条件之后, 偏心率向量 e 唯一确定轨道形状, 且所有

偏心率矢量沿着 P_1P_2 的投影 e_F 为定值,大小为

$$e_F = \frac{r_1 - r_2}{c} \quad (27)$$

式中: c 为初始位置与目标位置的距离,即 P_1P_2 长度。

图2分别针对 $r_2 > r_1$ 和 $r_2 < r_1$ 两种情况,给出了所有转移轨道可能的偏心率矢量方向。将偏心率向量 e 分解为垂直于 P_1P_2 的横向分量 e_T 和平行于 P_1P_2 的定值分量 e_F ,即

$$e = e_F i_{e_F} + e_T i_{e_T} \quad (28)$$

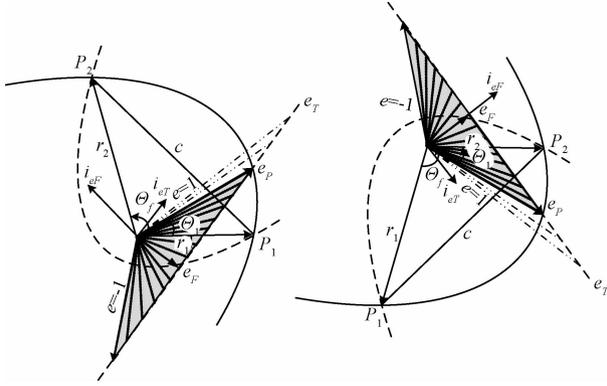


图2 Lambert问题的几何释意图

Fig. 2 Geometric interpretation of Lambert's problem

其中: i_{e_F} 以及 i_{e_T} 分别代表平行于 P_1P_2 和垂直于 P_1P_2 的单位方向矢量,进一步可以确定偏心率的大小为

$$v = \sqrt{\frac{\mu [(r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) (2r_2 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1) + (r_2 - r_1)^2]}{r_1 r_2 (r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)}} \quad (31)$$

当速度趋于无穷大时,根据公式可得

$$(r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = 0 \quad (32)$$

将 θ_2 的计算公式代入,利用三角函数关系,同时考虑 θ_1 和 θ_2 的范围,可确定两个可行解为

$$((\theta_1)_{v \rightarrow \infty})_1 =$$

$$2 \arctan \left(\frac{\sin \theta_f - \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 2 \frac{r_1}{r_2} \cos \theta_f}}{\frac{r_1}{r_2} - \cos \theta_f} \right) \quad (33)$$

$$((\theta_1)_{v \rightarrow \infty})_2 = -\frac{\theta_f}{2} \quad (34)$$

表1为两个可行解的大小关系,其中 α 表示较

$$e = \sqrt{e_F^2 + e_T^2} \quad (29)$$

图2给出了 $e_T = \pm e_p$ 的两条抛物线轨道,实线为可行轨道,虚线为不可实现轨道。抛物线型轨道的偏心率为1,故其垂直分量为 $e_p = \sqrt{1 - e_F^2}$,椭圆型转移轨道偏心率小于1,可知其横向分量满足 $-e_p < e_T < e_p$,因此椭圆型偏心率矢量只能落在图中的阴影区域,而双曲线型偏心率矢量只能落在非阴影区域内。

转移轨道在初始位置处的真近点角 θ_1 为偏心率矢量 e 到初始位置矢量 r_1 的夹角,根据几何描述图形以及推理分析,可以得到以下结论:

当 $r_2 > r_1$ 时,随着真近点角 θ_1 的增大,转移轨道的类型由双曲线型变为抛物线型再变为椭圆型,使速度趋于逃逸速度的两个真近点角,分别对应椭圆形转移轨道的上界值和下界值,同时下界值为抛物线型转移轨道所对应的真近点角;而对于双曲线型转移轨道,与抛物线型转移轨道对应的真近点角为其上界值,而与速度趋于无穷大所对应的真近点角为其下界值;同时对于 $r_2 < r_1$ 的情况,结论恰好相反。

根据速度公式

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} - \frac{\mu}{a}} \quad (30)$$

式中: μ 代表中心天体的引力常数。

将式(8)代入上式可得

小者, β 表示较大者。

表1 速度趋于无穷大时,两个可行解的大小关系

Table 1 Size relation of two possible solutions when speed tends to infinity

转移角度范围	$r_2 > r_1$	$r_1 > r_2$
$\theta_f \in (0^\circ, 180^\circ)$	$\beta = ((\theta_1)_{v \rightarrow \infty})_1$	$\alpha = ((\theta_1)_{v \rightarrow \infty})_1$
$\theta_f \in (180^\circ, 360^\circ)$	$\beta = ((\theta_1)_{v \rightarrow \infty})_2$	$\alpha = ((\theta_1)_{v \rightarrow \infty})_2$

当速度等于逃逸速度时,由式(31)可得

$$v = v_{\text{esp}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \quad (35)$$

从而有

$$\frac{(r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) (2r_2 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1) + (r_2 - r_1)^2}{r_2 (r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)} = 2 \quad (36)$$

求解方程(36)可得:

$$\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \frac{\sin\theta_f \pm \sqrt{\frac{2r_1}{r_2}(1 - \cos\theta_f)}}{1 - \cos\theta_f} \quad (37)$$

其中较小者为抛物线型转移轨道的真近点角 $(\theta_1)_p$:

$$(\theta_1)_p = 2\arctan\left(\frac{\sin\theta_f - \sqrt{2\frac{r_1}{r_2}(1 - \cos\theta_f)}}{1 - \cos\theta_f}\right) \quad (38)$$

而式(36)的另一个解为虚拟抛物线轨道的真近点角 $(\theta_1)_{p-}$ 对应椭圆型转移轨道真近点角 θ_1 的边界值,当考虑真近点角范围在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时,可以确定该值为

$$(\theta_1)_{p-} = 2\arctan\left(\frac{\sin\theta_f + \sqrt{2\frac{r_1}{r_2}(1 - \cos\theta_f)}}{1 - \cos\theta_f}\right) \quad (39)$$

对推导所得迭代变量范围总结如表 2 所示。

表 2 迭代变量的范围

Table 2 Bounds of the iteration variable

转移轨道类型	$r_2 > r_1$	$r_2 < r_1$
抛物线型	$(\theta_1)_p$	$(\theta_1)_p$
椭圆型	$(\theta_1)_p < \theta_1 < (\theta_1)_{p-}$	$(\theta_1)_{p-} - 2\pi < \theta_1 < (\theta_1)_p$
双曲线型	$\beta < \theta_1 < (\theta_1)_p$	$(\theta_1)_p < \theta_1 < \alpha$

根据表 2 给出的迭代变量范围,不妨记椭圆型及双曲线型转移轨道的真近点角范围分别为 $[(\theta_1)_{E_{\min}}, (\theta_1)_{E_{\max}}]$, $[(\theta_1)_{H_{\min}}, (\theta_1)_{H_{\max}}]$, 从而可以利用线性插值的方法,确定迭代变量的初始值:

$$(\theta_1)_0 = \left(\frac{\theta_p - \theta_b}{\Delta T_p - T_b}\right)(t_m - \Delta T_p) + \theta_p \quad (40)$$

式中: θ_p , ΔT_p 分别代表抛物线型转移轨道的真近点角及转移时间, t_m 为 Lambert 问题给定的转移时间, (θ_b, t_b) 分别代表转移时间函数上任一点的函数值。

对于双曲线型转移轨道,可将 θ_b 取为非抛物线真近点角的边界值,其对应的转移时间 t_b 近似为 0。而对于椭圆型轨道,可采用基本椭圆的真近点角 θ_F 和转移时间 T_F 进行构造^[1], 它的真近点角 $(\theta_1)_F$, 偏心率 $e = e_F$ 、半长轴 a_F 由以下公式确定

$$(\theta_1)_F = \frac{1}{2}((\theta_1)_{E_{\min}} + (\theta_1)_{E_{\max}}) \quad (41)$$

$$e_F = \frac{r_1 - r_2}{c} \quad (42)$$

$$a_F = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \quad (43)$$

基于以上计算公式,代入椭圆型转移时间函数,即可计算出基本椭圆的转移时间 T_F 。

当基于线性插值的方法得到的初值若超出迭代变量的范围时,可以采取以下办法进行修正:

1) 当 $(\theta_1)_0 > (\theta_1)_{\max}$, $(\theta_1)_0 = (1 - \lambda)(\theta_1)_b + \lambda(\theta_1)_{\max}$;

2) 当 $(\theta_1)_0 < (\theta_1)_{\min}$, $(\theta_1)_0 = (1 - \lambda)(\theta_1)_b + \lambda(\theta_1)_{\max}$;

通常 λ 的取值为 0.7 ~ 0.99。

4 算法流程

综上,本文所提算法的具体过程如下:

1) 由初始条件,利用计算公式得到抛物线型转移轨道的转移时间 ΔT_p ;

2) 比较抛物线型轨道的转移时间 ΔT_p 与给定的转移时间 t_m ,若相等,则停止迭代,否则由判定准则确定转移轨道类型;

3) 由表 2 中的结果,计算出迭代变量的范围 $[(\theta_1)_{\min}, (\theta_1)_{\max}]$, 并确定迭代变量的初值 $(\theta_1)_0$;

4) 由椭圆型(双曲线型)转移轨道转移时间函数计算转移时间 $(t_F)_k$;

5) 比较转移时间 $(t_F)_k$ 与给定转移时间 t_m ,若在误差范围内,则停止迭代,否则转到 6);

6) 由椭圆型(双曲线型)转移轨道的解析梯度公式,并计算下一次迭代变量值 $(\theta_1)_{k+1}$;

7) 判断迭代变量 $(\theta_1)_{k+1}$ 是否超出 $[(\theta_1)_{\min}, (\theta_1)_{\max}]$,若没有则采用该值进行下一次迭代,否则利用准则,进行修正,并转到 4);

8) 计算转移轨道的其他轨道参数,从而确定初始位置处的速度。

5 仿真与结果分析

针对本文提出的以真近点角为迭代变量、基于解析梯度的 Lambert 问题求解方法,通过设置不同的仿真场景,来验证算法的可行性以及快速收敛性。

设置初始位置和目标位置的距离分别为 $r_1 = 1.5R_e$, $r_2 = 2R_e$ 、 $r_1 = 2R_e$, $r_2 = 1.5R_e$ (R_e 为地球半径 6378 km), 在每种情况中,给定一系列具有不同转移角度 ($5^\circ \sim 355^\circ$) 以及转移时间 (10 s - 16000 s) 的 Lambert 问题仿真场景。采用基于解析梯度的 Lambert 问题求解方法,可以求解得到各种

Lambert 问题情形下的解,将每一个 Lambert 问题的解都以离散点形式绘制,得到图 3 和图 4。

220000 s 范围变化的 Lambert 问题,误差阈值为 $\varepsilon = 10^{-6}$,迭代范围修正系数 $\lambda = 0.9$ 。

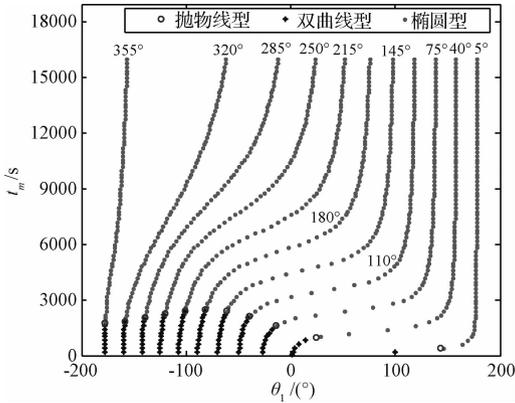


图 3 Lambert 问题求解结果 ($r_1 = 1.5 R_e, r_2 = 2 R_e$)

Fig. 3 Results of Lambert's problem ($r_1 = 1.5 R_e, r_2 = 2 R_e$)

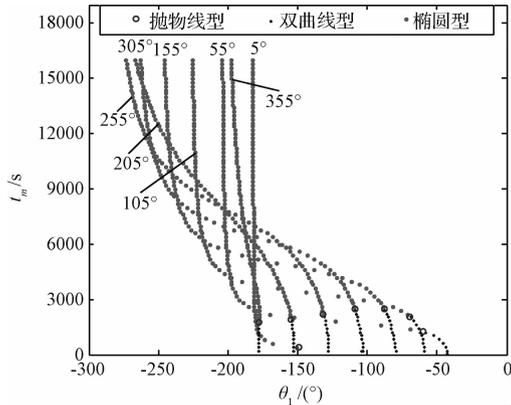


图 4 Lambert 问题求解结果 ($r_1 = 2 R_e, r_2 = 1.5 R_e$)

Fig. 4 Results of Lambert's problem ($r_1 = 2 R_e, r_2 = 1.5 R_e$)

由仿真结果可看出,当初始位置矢量和目标位置矢量固定时,真近点角随着 Lambert 问题中的转移时间单调变化,对于给定的所有 Lambert 问题,本文所提出的算法都能快速得到可行解,特别对于转移角度为 180° 的情况,该算法不会出现奇异现象。

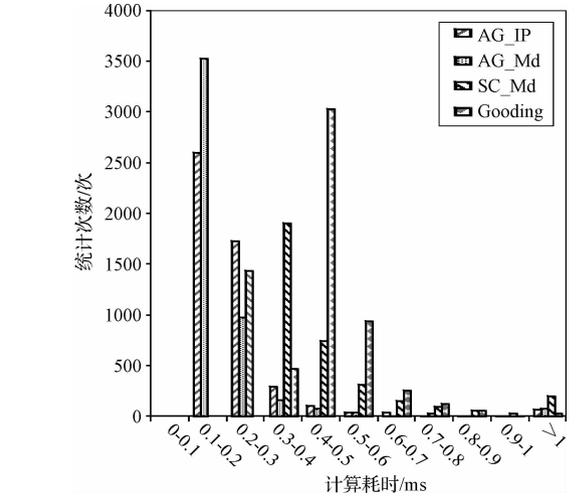


图 5 计算耗时统计直方图

Fig. 5 Histogram of calculation time

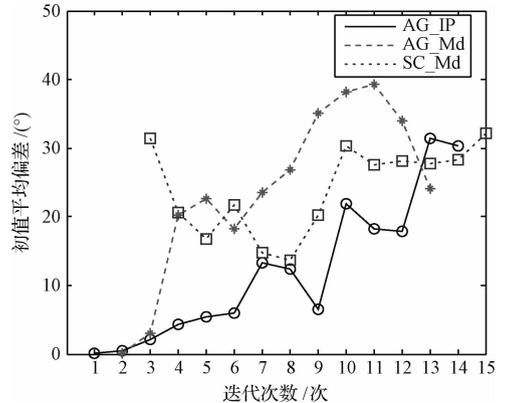


图 6 迭代次数与初值偏差的关系曲线

Fig. 6 Variation curve of iteration numbers with initial value deviation

为进一步验证算法收敛性及初值对收敛速度的影响,引入迭代次数、计算耗时及初值偏差三个性能指标。采用如下四种算法对 Lambert 问题进行求解: 本文所提出的插值确定初值 + 解析梯度迭代算法 (AG_IP)、基于迭代变量中间值初值确定 (即 $(\theta_1)_0 = ((\theta_1)_{\min} + (\theta_1)_{\max})/2$) + 解析梯度法 (AG_Md), 割线迭代法 (SC_Md)^[7,14] 以及 Gooding 求解算法^[8]。

图 5 为四种算法计算耗时统计图,横坐标代表耗时区间,纵坐标代表出现的次数,图 6 为迭代次数小于 16 次时,迭代次数与平均初值偏差的曲线。

由图 5 可以看出本文提出解析梯度迭代算法的计算耗时最少,而根据图 6 可以看出迭代次数与初值偏差没有单调的关系,但是随着初值偏差的增加, Lambert 问题的迭代次数有上升的趋势。通过对仿真结果进行深入分析,得到三种算法的迭代次数统计结果如表 3 所示:

仿真中设置 $r_1 = 1.5 R_e, r_2 = 4 R_e$,选择 4900 组转移角度范围在 $5^\circ \sim 355^\circ$ 转移时间在 $10 \text{ s} \sim$

分析上述仿真结果可得如下结论:

1) 迭代次数: 本文提出的 AG_IP 算法, 对仿真中所有的 Lambert 问题求解中, 最小的迭代次数为 1, 最大迭代次数为 14, 而平均迭代次数为 4.0561, 相比于利用迭代变量范围的中间值计算方法 AG_Md 以及 SC_Md, 迭代次数分别减少了 17.71% 和 44.52%。这说明本文提出的算法能够有效的减少迭代收敛次数;

表3 三种算法迭代次数的结果对比

Table 3 Comparison of three iterative algorithms on iterations number

算法	最小值	最大值	平均值	百分比(≤ 5)	百分比(≤ 10)
AG_IP	1	14	4.0561	79.37%	99.82%
AG_Md	2	13	4.9290	75.49%	99.78%
SC_Md	3	28	7.3106	24.18%	87.76%

2) 计算耗时: 在双核奔腾 3 GHz 的台式电脑上, 采用 Matlab2014 版本进行仿真, 统计结果表明本文提出的 AG_IP 算法平均每次求解所需的时间为 0.272 ms, 初值采用中间值的 AG_Md 算法以及割线法所需的时间分别为 0.282 ms 和 0.397 ms, 而 Gooding 算法的平均耗时为 0.435 ms。这说明本文提出的以真近点角迭代的方法收敛速度快, 同时利用解析梯度信息进行迭代能够加快收敛速度;

3) 初值估计精度: 基于线性插值确定初值的方法 AG_IP 算法, 它的平均初值估计偏差为 4.292° , 而直接利用迭代变量中间值确定初值的方法 AG_Md 和 SC_Md, 对应的平均初值估计偏差为 19.9084° 。这说明利用线性插值确定初值的方法的初值估计精度比较高。

6 结论

针对经典的单圈 Lambert 问题, 建立了以转移轨道在初始位置处的真近点为变量的 Lambert 问题求解模型, 构造了一种基于解析梯度的牛顿迭代算法, 理论分析了该算法收敛速度。同时, 采用线性插值方法确定迭代初值, 进一步提高了迭代算法的收敛速度。针对 AG_IP、AG_Md、SC_Md 以及 Gooding 四种算法进行仿真对比, 仿真结果表明本文提出的 AG_IP 算法的平均计算耗时为 0.272 ms, 将其他三种算法相比, 耗时分别降低了 3.55%、31.49% 以及 37.47%, 仿真验证了基于线性插值法确定初值的方法具有较高的初值估计精度, 能够加快迭代收敛速

度, 同时利用解析梯度构造的迭代公式, 不仅计算量小, 且收敛速度快。以上特性将使该算法具有很好的应用前景, 既可应用于深空探测中对发射机会的离线搜索, 同时星载计算机能够满足其计算的要求, 因此也可应用于轨道自主修正控制、航天器交会对接等在轨应用中。

参 考 文 献

- [1] Battin R H. An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics[M]. AIAA, 1999.
- [2] 乔栋, 崔祐涛, 崔平远. 小行星探测最优两脉冲交会轨道设计与分析[J]. 宇航学报, 2005, 26(3): 362-367. [Qiao Dong, Cui Hu-tao, Cui Ping-yuan. Design and analyze optimum two-impulse transfer trajectory for exploring asteroids[J]. Journal of Astronautics, 2005, 26(3): 362-367.]
- [3] 余志坤, 薛白, 丛源良, 等. 最优双冲量交会问题的数学建模与数值求解[J]. 宇航学报, 2010, 31(1): 155-161. [She Zhi-kun, Xue Bai, Cong Yuan-liang, et al. Mathematical modeling and numerical solving of the optimal two-impulse rendezvous problem[J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(1): 155-161.]
- [4] Won C H. Fuel-or time-optimal transfers between coplanar, coaxial ellipses using lambert's theorem [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999, 22(4): 536-542.
- [5] Gauss C F. Theory of the motion of the heavenly bodies moving about the sun in conic sections; a translation of theoriamotus [M]. Boston: Little, Brown and company, 1857.
- [6] Avanzini G. A simple lambert algorithm [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2008, 31(6): 1587-1594.
- [7] Nelson S L, Zarchan P. Alternative approach to the solution of lambert's problem [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1992, 15(4): 1003-1009.
- [8] Gooding R H. A procedure for the solution of Lambert's orbital boundary-value problem[J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1990, 48(2): 145-165.
- [9] Izzo D. Revisiting lambert's problem[J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2015, 121(1): 1-15.
- [10] Ahn J, Bang J, Lee S I. Acceleration of zero-revolution lambert's algorithms using table-based initialization [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 38(2): 335-342.
- [11] Prussing J E. A class of optimal two-impulse rendezvous using multiple-revolution lambert solutions[J]. Journal of Astronautical Sciences, 2000, 48(2): 131-148.
- [12] Arora N, Russell R P. A gpu accelerated multiple revolution Lambert solver for fast mission design [C]//AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. 2010: 10-198.
- [13] 朱仁璋, 蒙薇. 航天器交会两点边界值问题[J]. 宇航学报, 2006, 27(6): 1182-1186. [Zhu Ren-zhang, Meng Wei. Two

point boundary value problem in space rendezvous [J]. *Journal of Astronautics*, 2006, 27(6): 1182 - 1186.]

- [14] Burden R L, Faires J D. 数值分析[M]. 冯烟利, 朱海燕, 译. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [15] Thorne J D. Series reversion/inversion of Lambert's time function [C]//Astrodynamics Conference. 1990.

作者简介:

张世杰(1979 -), 男, 博士, 教授, 主要从事航天任务分析及微小卫星总体设计, 以及卫星轨道与姿态控制等。

通信地址: 哈尔滨工业大学科学园 3012 信箱

电话: 0451 - 86416447

E-mail: sjzhang@hit.edu.cn

(编辑: 张宇平)