关于 Mei 对称性与 Noether 对称性的关系 1)

—— 以 Lagrange 系统为例

张 毅 2)

(苏州科技大学土木工程学院，江苏苏州 215011)

摘要　文章以 Lagrange 系统为例研究 Mei 对称性与 Noether 对称性之间的关系. 基于无限小生成元向量作用下 Lagrange 函数的变分问题，建立了其 Euler–Lagrange 方程，研究了该变分问题的 Noether 对称性与守恒量. 研究表明：该变分问题的 Euler–Lagrange 方程，Noether 等式和 Noether 守恒量分别与 Lagrange 系统 Mei 对称性的判据方程，结构方程和 Mei 守恒量完全一致. 文末以著名的 Emden 方程为例说明结果的应用.

关键词　Lagrange 系统，Mei 对称性，Noether 对称性，变分问题

中图分类号：O316　　**文献标识码**：A　　doi：10.6052/1000-0879-15-018

THE RELATION BETWEEN THE MEI SYMMETRY AND THE NOETHER SYMMETRY — TAKING THE LAGRANGE SYSTEM AS AN EXAMPLE 1)

ZHANG Yi 2)

(College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215011, Jiangsu, China)

Abstract　This paper focuses on studying the relation between the Mei symmetry and the Noether symmetry, which takes the Lagrange system as an example. Based on the variational problem for Lagrangians under action of infinitesimal generator vectors, the Euler–Lagrange equations for the variational problem are established. The Noether symmetry for the variational problem is studied and corresponding conserved quantity is given. The studies show that the Euler–Lagrange equations and the Noether identity and the Noether conserved quantity of the variational problem are exactly the same with the criterion equation and structural equation and the conserved quantity for Mei symmetry of classical Lagrange system. In the end of the paper, we take the well-known Emden equation as example to illustrate the application of the results.

Key words　Lagrange system, Mei symmetry, Noether symmetry, variational problem

对称性和守恒量是数学和物理学中的两个重要概念，它们在科学和工程的诸多领域发挥重要的作用. 对称性方法是研究力学系统的守恒量的一个近代方法，主要有 Noether 对称性，Lie 对称性，Mei 对称性等 [1]. 对称性与守恒量及其相互之间存在密切的关系，梅凤翔教授在其著作 [2-3] 中讨论了 Noether 对称性，Lie 对称性，Mei 对称性之间及其与 Noether 守恒量，Hojman 守恒量，Mei 守恒量之间的相互关

本文于 201–01–21 收到.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10972151, 11272227).

2) 张毅，教授，博士生导师，从事一般力学和应用数学的教学和科研工作. E-mail: zhy@mail.usts.edu.cn

引用格式：张毅. 关于 Mei 对称性与 Noether 对称性的关系 —— 以 Lagrange 系统为例. 力学与实践, 2016, 38(2): 169-171

Zhang Yi. The relation between the Mei symmetry and the Noether symmetry — taking the Lagrange system as an example. *Mechanics in Engineering*, 2016, 38(2): 169-171

系．本文从变分问题及其不变性角度，以 Lagrange 系统为例进一步研究 Mei 对称性与 Noether 对称性之间的关系，得到了一些有趣的结果．

1 基于无限小生成元向量作用的 Lagrange 函数的变分问题

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s\,(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定，Lagrange 函数为 $L=L\,(t,q_s,\dot{q}_s)$，系统的运动微分方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

引进时间和广义坐标的无限小变换

$$\bar{t}=t+\Delta t,\quad \bar{q}_s\,(\bar{t})=q_s\,(t)+\Delta q_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

或其展开式

$$\bar{t}=t+\varepsilon\tau\,(t,q_k)\,,\quad \bar{q}_s\,(\bar{t})=q_s\,(t)+\varepsilon\xi_s\,(t,q_k) \quad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

其中，ε 为无限小参数，τ, ξ_s 为无限小变换的生成元．取无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\tau\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} \tag{4}$$

它的一次扩展为

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\tau})\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{5}$$

对于 Lagrange 系统 (1)，构建基于无限小生成元向量作用的 Lagrange 函数的变分问题：

求积分泛函

$$S\,(\gamma)=\int_{t_1}^{t_2}X^{(1)}\left[L\,(t,q_s\,(t)\,,\dot{q}_s\,(t))\right]\mathrm{d}t \tag{6}$$

在给定边界条件

$$q_s\,(t)\,|_{t=t_1}=q_s\,(t_1)\,,\ q_s\,(t)\,|_{t=t_2}=q_s\,(t_2) \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

下的极值问题．

积分泛函 (6) 也可称之为作用量积分或作用量．

由变分学理论，泛函 (6) 在 $q_s=q_s\,(t)$ 上取得极值的必要条件是其变分为 0，即 $\delta S=0$，因此有

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right)\mathrm{d}t=0 \tag{8}$$

利用边界条件 (7) 以及变换关系

$$\mathrm{d}\delta q_s=\delta\mathrm{d}q_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

方程 (8) 可表示为

$$-\int_{t_1}^{t_2}E_s\left[X^{(1)}\,(L)\right]\delta q_s\mathrm{d}t=0 \tag{10}$$

其中 $E_s=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\dfrac{\partial L}{\partial q_s}$ 为 Euler 算子．由积分区间的任意性和 $\delta q_s\,(s=1,2,\cdots,n)$ 的独立性，得

$$E_s\left[X^{(1)}\,(L)\right]=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{11}$$

方程 (11) 是变分问题 (6) 和 (7) 的 Euler–Lagrange 方程．

2 变分问题 (6) 和 (7) 的 Noether 对称性

在无限小变换 (2) 作用下，泛函 (6) 变为

$$S\,(\bar{\gamma})=\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}X^{(1)}\left[L\,(\bar{t},\bar{q}_s\,(\bar{t})\,,\dot{\bar{q}}_s\,(\bar{t}))\right]\mathrm{d}\bar{t} \tag{12}$$

其中，$\bar{\gamma}$ 为邻近曲线，则变换前后的差 $S\,(\bar{\gamma})-S\,(\gamma)$ 相对 ε 的主线性部分为

$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}\Delta q_s+\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\Delta\dot{q}_s+X^{(1)}(L)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta t\right)\mathrm{d}t \tag{13}$$

注意到关系

$$\left.\begin{aligned}\delta q_s&=\Delta q_s-\dot{q}_s\Delta t\\ \Delta\dot{q}_s&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta q_s-\dot{q}_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta t\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式 (13) 可表为

$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon\left\{X^{(1)}\left[X^{(1)}(L)\right]+X^{(1)}(L)\dot{\tau}\right\}\mathrm{d}t \tag{15}$$

Noether 对称性是作用量积分在无限小变换下的一种不变性．如果对于每一个无限小变换 (2)，始终成立

$$\Delta S=-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)\mathrm{d}t \tag{16}$$

其中，$\Delta G=\varepsilon G$，$G=G(t,q_s)$ 为规范函数，则这种不变性称为变分问题 (6) 和 (7) 的 Noether 准对称性．如 $G=0$，则为 Noether 对称性．

由式 (15) 和式 (16)，我们有：

如果存在规范函数 $G=G(t,q_s)$ 使得无限小生成元 τ，ξ_s 满足

$$X^{(1)}\left[X^{(1)}(L)\right]+X^{(1)}(L)\dot{\tau}+\dot{G}=0 \tag{17}$$

则相应不变性为变分问题 (6) 和 (7) 的 Noether 准对称性.

方程 (17) 可称为变分问题 (6) 和 (7) 的 Noether 等式.

由 Noether 准对称性可直接导出一类守恒量，有如下结果：

定理 1　对于变分问题 (6) 和 (7)，如果存在规范函数 $G=G(t,q_s)$ 使得无限小变换的生成元 τ，ξ_s 满足 Noether 等式 (17)，则其 Noether 准对称性直接导致守恒量，形如

$$I=X^{(1)}(L)\tau+\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\tau)+G=\mathrm{const} \tag{18}$$

守恒量 (18) 可称为变分问题 (6) 和 (7) 的 Noether 守恒量.

3 变分问题 (6) 和 (7) 的 Noether 对称性与 Lagrange 系统 (1) 的 Mei 对称性的关系

Lagrange 系统的 Mei 对称性是指 Lagrange 方程 (1) 中的 Lagrange 系统在经历无限小变换后仍然满足原方程的一种不变性 [3].

关于变分问题 (6) 和 (7) 的 Noether 对称性与 Lagrange 系统 (1) 的 Mei 对称性之间的关系有如下结果：

定理 2　变分问题 (6) 和 (7) 的 Euler–Lagrange 方程即为 Lagrange 系统 (1) 的 Mei 对称性的判据方程.

定理 3　变分问题 (6) 和 (7) 的 Noether 等式 (17) 即为 Lagrange 系统 (1) 的 Mei 对称性的结构方程.

定理 4　变分问题 (6) 和 (7) 的 Noether 守恒量 (18) 即为 Lagrange 系统 (1) 的 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量.

4 算　例

例　著名的 Emden 方程 [2]

$$\ddot{q}+\frac{2}{t}\dot{q}+q^5=0 \tag{19}$$

可化为 Lagrange 系统，其 Lagrange 函数为

$$L=t^2\Big(\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{6}q^6\Big) \tag{20}$$

泛函 (6) 给出

$$S=\int_{t_1}^{t_2}X^{(1)}\left(\frac{1}{2}t^2\dot{q}^2-\frac{1}{6}t^2q^6\right)\mathrm{d}t \tag{21}$$

如取无限小变换的生成元向量为

$$X^{(1)}=t\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}q\frac{\partial}{\partial q}-\frac{3}{2}\dot{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \tag{22}$$

则有

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{6}t^2q^6-\frac{1}{2}t^2\dot{q}^2\right)\mathrm{d}t \tag{23}$$

于是有

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(t^2q^5+2t\dot{q}+t^2\ddot{q}\right)\delta q\mathrm{d}t=0 \tag{24}$$

以及

$$\begin{aligned}\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon\Bigg\{&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg[\left(\frac{1}{6}t^2q^6-\frac{1}{2}t^2\dot{q}^2\right)t-\\&t^2\dot{q}\left(-\frac{1}{2}q-t\dot{q}\right)\Bigg]+\\&\left(t^2q^5+2t\dot{q}+t^2\ddot{q}\right)\left(-\frac{1}{2}q-t\dot{q}\right)\Bigg\}\mathrm{d}t=0\end{aligned} \tag{25}$$

因此，生成元向量 (22) 是与泛函 (23) 相应的变分问题的 Noether 对称性.

利用方程 (19)，由式 (25) 得出

$$I=\frac{1}{6}t^3q^6+\frac{1}{2}t^3\dot{q}^2+\frac{1}{2}t^2q\dot{q}=\mathrm{const} \tag{26}$$

式 (26) 是泛函 (23) 相应的变分问题的 Noether 守恒量. 同时，由文献 [4]，生成元向量 (22) 也是 Lagrange 系统 (20) 的 Mei 对称性，而式 (26) 是相应的 Mei 守恒量.

参 考 文 献

1 梅凤翔. 经典约束力学系统对称性与守恒量研究进展. 力学进展，2009，39(1)：37-43

2 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用. 北京：科学出版社，1999

3 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京：北京理工大学出版社，2004

4 周燕，张毅. Birkhoff 系统的 Mei 对称性与动力学逆问题. 广西师范学院学报 (自然科学版)，2011，28(4)：39-45

(责任编辑：胡　漫)