



关于 Poisson 的《力学教程》¹⁾

——分析力学札记之二十七

梅凤翔²⁾

(北京理工大学力学系, 北京 100081)

摘要 介绍 Poisson 及其《力学教程》, 包括 Poisson 其人, 其贡献, 《力学教程》的内容, 精彩篇章, 以及对后世的影响.

关键词 Poisson, 理论力学, 分析力学, 教程

中图分类号: O31 **文献标识码:** A

doi: 10.6052/1000-0879-15-265

1 Poisson 简介

Poisson SD (1781—1840), 汉译泊松, 法国数学家、力学家、物理学家. 1781年6月21日生于法国皮蒂维耶, 1840年4月25日卒于法国索镇.

Poisson 原读医科, 1798年进巴黎综合工科学校 (École Polytechnique) 改学数学, 受到 Laplace 和 Lagrange 的赏识. 1800年毕业后留校任教, 1802年任副教授, 1806年任教授. 1808年任法国经度局天文学家. 1809年巴黎理学院成立, 任该校数学教授. 1812年被选为法国科学院院士.

Poisson 一生从事数学研究和教学, 他的主要工作是将数学应用于力学和物理学中. 他第一个用冲量形式写分析力学, 使用后称为 Poisson 括号的运算符号; 他所著的《力学教程》在很长时期被作为标准教科书. 在天体力学方面, 他推广了 Lagrange 和 Laplace 有关行星轨道稳定性的研究, 还计算出球体和椭球体之间的引力. 他用行星内部质量分布表示重力的公式对 20 世纪通过人造卫星轨道确定地球形状的计算仍有实用价值. 他独立地获得轴对称重刚体定点转动微分方程的积分, 即通常称为 Lagrange (工作在 Poisson 前, 发表在后) 的可积情况. 他在 1831 年发表的《弹性固体和流体的平衡和运动一般方程的研究报告》一文中第一个完整地给出说明黏

性流体的物理性质的方程, 即本构关系. 在这以前 Newton 在《自然哲学的数学原理》(1687) 一书中曾对此给出简单的说明, Cauchy 于 1823 年写出分量形式的本构关系, 但缺静压力项.

在固体力学中, Poisson 以材料的横向变形系数, 即 Poisson 比而知名. 他在 1829 年发表的《弹性体平衡和运动研究报告》一文中, 用分子间相互作用的理论导出弹性体的运动方程, 发现在弹性介质中可以传播纵波和横波, 并且从理论上推演出各向同性弹性杆在受到纵向拉伸时, 横向收缩应变与纵向伸长之比是一常数, 其值为 1/4. 但这一数值与实验有差距, 如 1848 年 Wertheim G 根据实验就认为这个值应是 1/3.

Poisson 在数学方面贡献很多. 最突出的是 1837 年在《关于判断的概率之研究》一文中提出描述随机现象的一种常用分布, 在概率论中称为 Poisson 分布. 这一分布在公用事业、放射性现象等许多方面都有应用. 他还研究过定积分、Fourier 级数、数学物理方程等. 除 Poisson 分布外, 还有许多数学名词是以他名字命名的, 如 Poisson 积分, Poisson 求和公式, Poisson 方程, Poisson 定理等等.

Poisson 的主要著作还有《毛细管作用新理论》和《热学的数学理论》等.

以上文字取自《中国大百科全书·力学》^[1], 由朱照宣先生编写. 除上述的诸多的 Poisson, 还有 Poisson 作用量, Poisson 流形, Poisson-Lie 群等.

2 《力学教程》的内容简介

Poisson 的《力学教程》(Traité de Mécanique) 初版于 1811 年, 第 2 版由巴黎 Bachelier 印刷出版社

本文于 2015-10-12 收到.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10932002, 11272050, 11572034).

2) 梅凤翔, 教授. E-mail: meifx@bit.edu.cn

引用格式: 梅凤翔. 关于 Poisson 的《力学教程》——分析力学札记之二十七. 力学与实践, 2016, 38(2): 172-176

Mei Fengxiang. On Poisson's "Traité de Mécanique". *Mechanics in Engineering*, 2016, 38(2): 172-176

出版^[2]. 书的封面在 Poisson 下有名号: 法兰西学院, 法兰西经度局, 法兰西大学成员; 伦敦和爱丁堡皇家学会会员; 柏林、斯托克霍姆、波士顿以及意大利各城市的科学院院士; 伦敦天文学会, 巴黎和瓦尔索威数学会, 奥尔良科学和艺术学会成员.

Poisson 书名中的法文 *Traité*, 可译为“论”、“教程”、或不译. Poisson 在书的前言中写道: “本书用于教学”, 因此译为《力学教程》.

全书分两卷. 第 1 卷目录如下:

引论

第 1 本书

静力学第 1 部分

第 1 章 作用在同一点上的力的合成和平衡

第 2 章 杠杆的平衡

第 3 章 平行力的合成和平衡

第 4 章 在重物体和重心上的一般考虑

第 5 章 重心的确定

第 6 章 物体引力的计算

第 2 本书

动力学第 1 部分

第 1 章 直线运动和力的度量

第 2 章 直线运动的例子

第 3 章 曲线运动

第 4 章 离心力

第 5 章 质点在给定曲线或曲面上运动的例子

第 6 章 完全自由运动的例子

第 7 章 万有引力的离题话

第 3 本书

静力学第 2 部分

第 1 章 刚体的平衡

第 2 章 矩理论

第 3 章 柔体平衡的例子

第 4 章 虚速度原理

第 2 卷目录如下:

第 4 本书

动力学第 2 部分

第 1 章 动力学普遍方程

第 2 章 惯性矩和主轴的确定

第 3 章 刚体绕定轴的转动

第 4 章 刚体绕定点的转动

第 5 章 完全自由刚体的运动

第 6 章 重刚体在给定平面上的运动

第 7 章 任意形状物体的打击

第 8 章 柔体运动的例子

第 9 章 物体运动的普遍方程和性质

第 5 本书

流体静力学

第 1 章 预备知识

第 2 章 流体平衡的普遍方程

第 3 章 重流体的平衡

第 4 章 浮体的平衡和运动

第 5 章 用观测气压表测高度

第 6 章 弹性力和气热

第 6 本书

流体动力学

第 1 章 流体运动的普遍方程

第 2 章 声的传播

第 3 章 特殊假设下液体的运动

补充

活力原理在计算运动机器中的应用

这部大部头书的第 1 卷有 696 页, 第 2 卷有 782 页, 涉及刚体和流体静力学, 质点和质点系动力学, 流体动力学等. 除流体静力学和动力学之外的内容, 与今天的理论力学教材十分相近.

3 精彩篇章

Poisson 的《力学教程》很适合教学, 内容安排合理, 虽然图很少, 但由简单到复杂, 处处注意细节, 例子很多, 便于理解. 读了之后, 感觉在以下 4 处十分精彩.

3.1 重刚体绕定点转动的一个可积情形

Poisson 在其著作第 2 卷第 4 章第 3 节“重刚体转动运动特殊情形的解”第 425 小节中写道: “... 设主轴 Oz 是形体轴 (figure 轴), 因此有 $B = A$. 设重心 G 在 Z 轴正向, 因此 $\alpha = 0$, $\zeta = 0$, 而 r 是一给定正的量, 表示距离 OG . 轴 Oz 铅垂并指向重力, 角 θ 或 zOz_1 是锐角或钝角, 视点 G 处于过 O 水平面下方或上方. 在此情形, 方程 (b) 成为

$$\left. \begin{aligned} Cdr &= 0 \\ Adq - (C - A)rpdt &= ra''Mgdt \\ Adp + (C - A)rqdt &= -rb''Mgdt \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $a'' = -\sin\theta \sin\varphi$, $b'' = -\sin\theta \cos\varphi$.

Poisson 所指“figure 轴”可理解为对称轴. 方程 (1) 就是重刚体绕定点运动冲量形式 Euler 动力学方程的一类特殊情形, 此时有第 4 个积分 $r =$

const. Lagrange 在此之前已得到这个结果,但发表在 Poisson 之后. 因此,这种可积情形称为 Lagrange-Poisson 情形. 这是 Poisson 对刚体动力学的重要贡献.

3.2 对虚位移原理的表述

Poisson 在其著作第 1 卷第 3 本书静力学第 2 部分第 4 章“虚速度原理”之第 341 和第 342 小节给出原理的直角坐标表达,写道:

“341. 对方程 (b)[即虚速度原理 $Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \dots = 0$] 可给出不同形式,使之更容易应用.

为此,设 x, y, z 是点 M 在某平衡位置的坐标; $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ 是这个点变到无限小邻域位置 N 的坐标; X, Y, Z 是力 P 在 x, y, z 正方向延长线上的分量;这些无限小量 $\delta x, \delta y, \delta z$ 是虚速度 MN 在 X, Y, Z 方向的投影;而 p 是 P 方向上的投影,则有

$$Pp = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

用带撇儿的同样字母标记,对点 M', M'' 等类似量为

$$P'p' = X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z'$$

$$P''p'' = X''\delta x'' + Y''\delta y'' + Z''\delta z''$$

等等,将这些方程加到上述方程,可写成

$$Pp + P'p' + P''p'' + \dots = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

和号对系统所有点 M, M', M'' 等展开,因此,由等于这些点的总数目组合. 由此,方程 (b) 取形式

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0 \tag{e}$$

这就是所得到的.

可是,设系统的点有约束,总可用它们坐标间的一个或多个方程表示. 因此,设 L, L', L'' 等是 x, y, z, x', y' 等或这些坐标的一部分的给定函数;设这些方程为

$$L = 0, L' = 0, L'' = 0, \dots \tag{f}$$

系统所有点的同时位移应与施加条件相合, M, M', M'' 等的坐标 x, y, z, x', y' 等以及 N, N', N'' 等的坐标 $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, x' + \delta x'$ 等必须满足

这些方程;因此,去掉二阶小量,就有

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx'}\delta x' + \dots &= 0 \\ \frac{dL'}{dx}\delta x + \frac{dL'}{dy}\delta y + \frac{dL'}{dz}\delta z + \frac{dL'}{dx'}\delta x' + \dots &= 0 \\ \frac{dL''}{dx}\delta x + \frac{dL''}{dy}\delta y + \frac{dL''}{dz}\delta z + \frac{dL''}{dx'}\delta x' + \dots &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{g}$$

等等. ”

“342. 方程 (e) 和 (g) 对 $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x'$ 等是线性的,用已知方法可消去一部分量,将方程 (g) 用不定乘子相乘后加到这些方程中使之等于 0,在这个和中量 $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x'$ 等的系数应消去. 这些量的系数也应等于零, ”

用 $\lambda, \lambda', \lambda''$ 等表示乘子,用它们乘以方程 (g),用这种方法,对 $\delta x, \delta y, \delta z$ 得到

$$\left. \begin{aligned} X + \lambda \frac{dL}{dx} + \lambda' \frac{dL'}{dx} + \lambda'' \frac{dL''}{dx} + \dots &= 0 \\ Y + \lambda \frac{dL}{dy} + \lambda' \frac{dL'}{dy} + \lambda'' \frac{dL''}{dy} + \dots &= 0 \\ Z + \lambda \frac{dL}{dz} + \lambda' \frac{dL'}{dz} + \lambda'' \frac{dL''}{dz} + \dots &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{h}$$

对 $\delta x', \delta y', \delta z'$, 同样有

$$\left. \begin{aligned} X' + \lambda \frac{dL}{dx'} + \lambda' \frac{dL'}{dx'} + \lambda'' \frac{dL''}{dx'} + \dots &= 0 \\ Y' + \lambda \frac{dL}{dy'} + \lambda' \frac{dL'}{dy'} + \lambda'' \frac{dL''}{dy'} + \dots &= 0 \\ Z' + \lambda \frac{dL}{dz'} + \lambda' \frac{dL'}{dz'} + \lambda'' \frac{dL''}{dz'} + \dots &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{h'}$$

随后亦然. ”

Poisson 给出的公式 (e) 是虚位移原理的直角坐标表达,它比式 (b) 更容易应用. 公式 (f), (h), (h') 是有约束时虚位移原理用不定乘子法的表达. 200 年后的理论力学和分析力学的教材仍在应用这些公式.

3.3 对动力学普遍方程的表述

Poisson 在其著作第二卷第四本书第 9 章“物体运动的普遍方程和性质”之“§1 该运动的普遍方程”中写道:

“531. 设 m, m', m'' 等是系统点的质量. 在时间 t , 由运动原点计算的,用 x, y, z 标记质量 m 的 3 个直角坐标,用 X, Y, Z 标记作用于此质点的加速度分量,它指向 x, y, z 延长线在正的方向上. 对点 m', m'' 等, X, Y, Z 用带撇儿的同样字母表示相应的

量. 点 m 在瞬时 dt 的沿 X, Y, Z 方向的损失力为

$$m \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right), m \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right), m \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right)$$

由假设, 点 m 在这些作用下平衡, 对每个点 m', m'' 等类似. 代入 341 的方程 (e)[即 $\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$], 组成平衡方程

$$\sum m \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \sum m \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \sum m \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z = 0 \quad (1)$$

和号 \sum 对系统所有点 m, m', m'' 等, 合成等于这些点的数目.

假设这些质点的约束用如下方程表示

$$L = 0, L' = 0, L'' = 0, \text{ etc.} \quad (2)$$

其中 L, L', L'' 等是变量 x, y, z, x' 等或其中部分的给定函数, 也可明显含 t .

…… 无限小位移, 对 m 用 $\delta x, \delta y, \delta z$, 对 m' 用 $\delta x', \delta y', \delta z'$ 等, 用 $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, x' + \delta x'$ 等代替 x, y, z, x' 等, 时间 t 不变, 方程 (2) 仍成立, 由此如同第 541 小节, 得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dx} \delta x + \frac{dL}{dy} \delta y + \frac{dL}{dz} \delta z + \frac{dL}{dx'} \delta x' + \dots = 0 \\ \frac{dL'}{dx} \delta x + \frac{dL'}{dy} \delta y + \frac{dL'}{dz} \delta z + \frac{dL'}{dx'} \delta x' + \dots = 0 \\ \frac{dL''}{dx} \delta x + \frac{dL''}{dy} \delta y + \frac{dL''}{dz} \delta z + \frac{dL''}{dx'} \delta x' + \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

… 用不定因子法导出方程

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} = mX + \lambda \frac{dL}{dx} + \lambda' \frac{dL'}{dx} + \lambda'' \frac{dL''}{dx} + \dots \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = mY + \lambda \frac{dL}{dy} + \lambda' \frac{dL'}{dy} + \lambda'' \frac{dL''}{dy} + \dots \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = mZ + \lambda \frac{dL}{dz} + \lambda' \frac{dL'}{dz} + \lambda'' \frac{dL''}{dz} + \dots \\ m \frac{d^2x'}{dt^2} = mX' + \lambda \frac{dL}{dx'} + \lambda' \frac{dL'}{dx'} + \lambda'' \frac{dL''}{dx'} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

等等. 其中 $\lambda, \lambda', \lambda''$ 等是因子, 其值理解为由系统点的约束产生的力, 以及点在其上运动的曲面或曲线的阻力.”

在此, Poisson 给出的式 (1) 就是动力学普遍方程, X, Y, Z 是单位质量上的质点所受加速力的分量. 加速力即主动力. 将力分成主动力和约束力大约出

现在 40 年后. Poisson 给出的式 (4) 就是第一类 Lagrange 方程. 至今, 理论力学和分析力学的教材仍在利用这些公式.

3.4 对最小作用量原理的表述

Poisson 在其著作第 2 卷第 573 小节中写道:

“最小作用量原理, 它使我们考虑在物体系运动中, 活力原理成立, 如果取每个质点的速度与其质量和轨道元的乘积; 对所有运动取乘积的总和; 从系统一给定位置向另一给定位置, 积分这个和, 这个积分值一般将是极小.

这个定理是第 160 小节中定理的推广, 可用同样方法证明; … 如果令 ds 是 m 的轨道元, 其速度为 v , 就是 $\sum mvd s$ 的积分, 取极小值; 但在某些情形, 如一个质点在闭曲面上运动, 这个极小用极大替代了; 仅可证明 $\int \sum mvd s$ 的无限小变分总等于零.

由于 $ds = vdt$, 取 $V = \sum mv^2$, 积分成为 $\int Vdt$. 最小作用量原理就说系统活力与时间元乘积的积分总是极小; 因此, 物体系从一个位置过渡到另一个位置, 活力的可能量极小. 当运动不受任何力, 量 V 是常数, 路程的时间是极小.

如果将最小作用量原理与重心运动守恒、面积守恒相比较, 就会发现第一个仅仅是组建运动微分方程的规则, 现在没用了, 用第 531 小节的公式 (1), 更直接更一般的方法得到这些方程. 至于其他原理, 除了包含运动重要性质的, 还有提供这些微分方程积分优势的, 这可在大多数问题中知道.

重心运动守恒原理提供有限量 3 个积分

$$\begin{aligned} \sum mx &= a \sum m + At \\ \sum my &= b \sum m + Bt \\ \sum mz &= c \sum m + Ct \end{aligned}$$

a, b, c, A, B, C 是 6 个任意常数, 前 3 个表示系统在运动原点的重心坐标, 后 3 个是系统所有点在此区间平行于坐标轴的动量和.

由面积守恒原理得到的积分量是 3 个第一积分

$$\begin{aligned} \sum m (x dy - y dx) &= c dt \\ \sum m (z dx - x dz) &= c' dt \\ \sum m (y dz - z dy) &= c'' dt \end{aligned}$$

c, c', c'' 是 3 个任意常数, 表示系统所有点相对轴 z, y, x 的初始动量, 或在时间单位绕同样轴描绘的

面积的两倍。

最后,活力原理仅提供一个积分,即第564小节中的方程(b),也可写成

$$\frac{1}{2} \sum m \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right) = D + \varphi(x, y, z, x', \dots)$$

D 是任意常数。”

Poisson 在这一节中评述了最小作用量原理,认为它仅能组建微分方程,而在组建方程方面不如动力学普遍方程那样直接、那样普遍。其中, Poisson 给出7个积分:3个质心运动积分,3个面积积分(动量矩守恒)和一个能量积分。

Poisson 的第573小节收入 Polak 的《力学的变分原理》^[3]一书中,这是 Poisson 对变分原理的贡献。

4 力学史家的评介

4.1 Moiseyev 的评介

Moiseyev (Моисеев НД, 1902—1955), 汉译莫伊谢耶夫,苏联天体力学家、天文学家 and 数学家。在其《力学发展史》^[4]中指出“Poisson 发展了 Lagrange 和 Laplace 的思想,他在分析力学的基本著作是1811年初版的“*Traité de Mécanique*”。在这部著作中, Poisson 在描述分析力学基础时,放弃了 Laplace 的描述,由 Lagrange 过渡到虚位移原理,作为静力学基本原理。”

在这里, Moiseyev 评介了 Poisson 的著作,将虚位移原理作为分析力学的基础。

4.2 武际可的评介

武际可在其《力学史》中写道^[5]:

“以著名数学家蒙日 (Monge G, 1746—1818) 为首的一批科学家与工程师向政府建议成立一所新的工程学校,以代替那些旧体制留下的学校。这个建议于1794年获得批准。1795年,新学校正式成立,被定名为巴黎综合工科大学 (École Polytechnique), 蒙日担任该校的校长。

“巴黎综合工科大学与以往的学校最大的不同是,由学校组织集中授课的方式进行教学,而以往学校则基本上还是师徒之间的个别传授。其次,这个学校规定学生在进入学习各个具体工程部门之前,都必须学好数学,力学,物理,化学等课程,开始了基础课与专业课的区分。它要求学生在头两年里学习基础课,第三年才开始学习专业课,后来干脆取消了

专业课的教学,这所学校变为一所只教授基础课的基础培训学校。学生在这里上两年基础课,然后被分入其他工程学校,如桥梁道路学院,矿业学院,军事学院等。这所学校的教学组织对世界上其他国家的教学影响很大,学校也培养造就了一大批杰出的科学家与工程师,如柯西 (Cauchy AL, 1789—1857), 泊松, 纳维 (Navier CLMH, 1785—1836) 等就是该校第一班的学生。后来其他国家的工业高等学校大多仿照这所学校建立,如维也纳技术大学,苏黎世联邦高等工业学校,俄国与美国的某些工业院校,都是按照它的模式建立的,有的则完全按照它的教学大纲教学。

“由于这所学校开创了对学生集体授课的教学方式,所以必须有相应的教材。于是,学校组织出版了一批影响很大的教科书,如1811年出版的泊松著的《力学教程》,普朗尼著的《力学分析讲义》等,这些教材奠定了后来理论力学的教材体系。”

武际可先生这段文字叙述了巴黎综合工科大学的形成,它的教学体系,并指出 Poisson 的《力学教程》奠定了后来理论力学的教学体系。这是中肯的。

5 结束语

粗略地拜读了 Poisson 的法文《力学教程》,体会到它是一部理论力学和分析力学教材的开创性工作。当然,其后还有 Appell 的《理性力学》第一、第二卷,更为有影响力,但是,那是 Poisson 这本书出版80多年后的事情了。Poisson 在这本书中仅给出第一类 Lagrange 方程,没有给出第二类 Lagrange 方程,而第二类 Lagrange 方程出现在 Lagrange 著作的第3版的附录中,那是1853年,即 Poisson 书初版后的42年, Poisson 去世后的13年。

了解学科史,包括了解教材史,十分必要。

读书要读原著,才不致人云亦云。

参考文献

- 1 中国大百科全书编辑委员会. 中国大百科全书·力学. 北京, 上海: 中国大百科全书出版社, 1985
- 2 Poisson SD. *Traité de Mécanique* (2nd edn). Paris: Bachelier, Imprimeur-Libraire, 1833
- 3 Полак ЛС. *Вариационные Принципы Механики*. Москва: ГИФМЛ, 1959
- 4 Моисеев НД. *Очерки Развития Механики*. Москва: ИЗД. МУ, 1961
- 5 武际可. 力学史. 上海: 上海辞书出版社, 2010