

第四章 热传导问题的数值解法

- 本章教学内容

§ 4-1 导热问题数值求解基本思想

§ 4-2 内节点离散方程的建立

§ 4-3 边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

§ 4-4 非稳态导热问题的数值解法

Website: <http://www.allimagestool.com>

1、重点内容:

- ① 掌握导热问题数值解法的基本思路;
- ② 利用热平衡法和泰勒级数展开法建立节点的离散方程。

2、掌握内容:

数值解法的实质;

3、了解内容:

了解非稳态导热问题的两种差分格式及其稳定性。

4.1.1 基本思想

对物理问题进行数值解法的基本思路：

- ① 把原来在时间、空间坐标系中连续的物理量的场，如导热物体的温度场等，用有限个离散点上的值的集合来代替。
- ② 求解按一定方法建立起来的关于这些值的代数方程，来获得离散点上被求物理量的值。

这些离散点上被求物理量值的集合称为该物理量的数值解。

4.1.2 导热问题的数值求解基本步骤

1. 框图表示

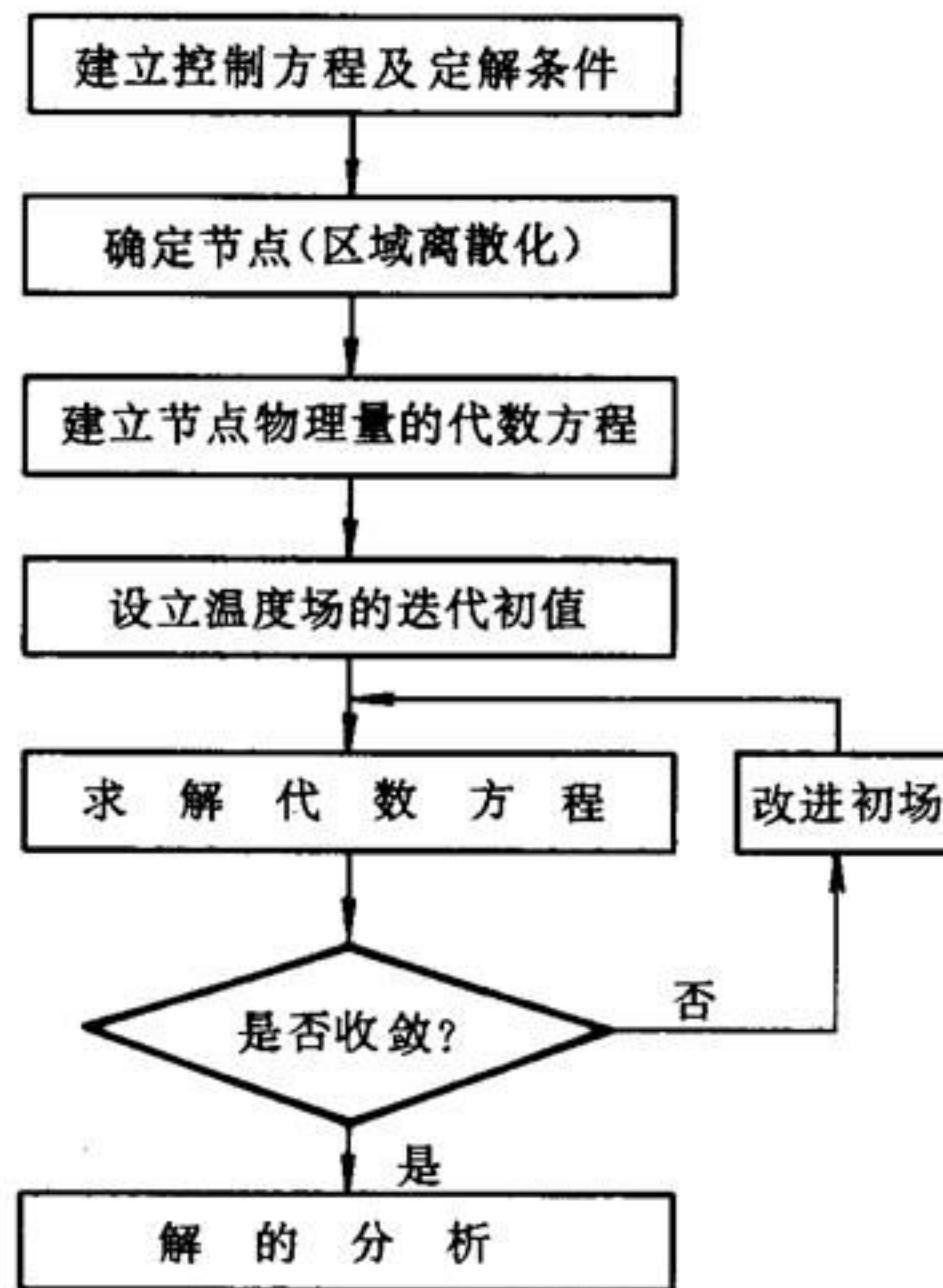
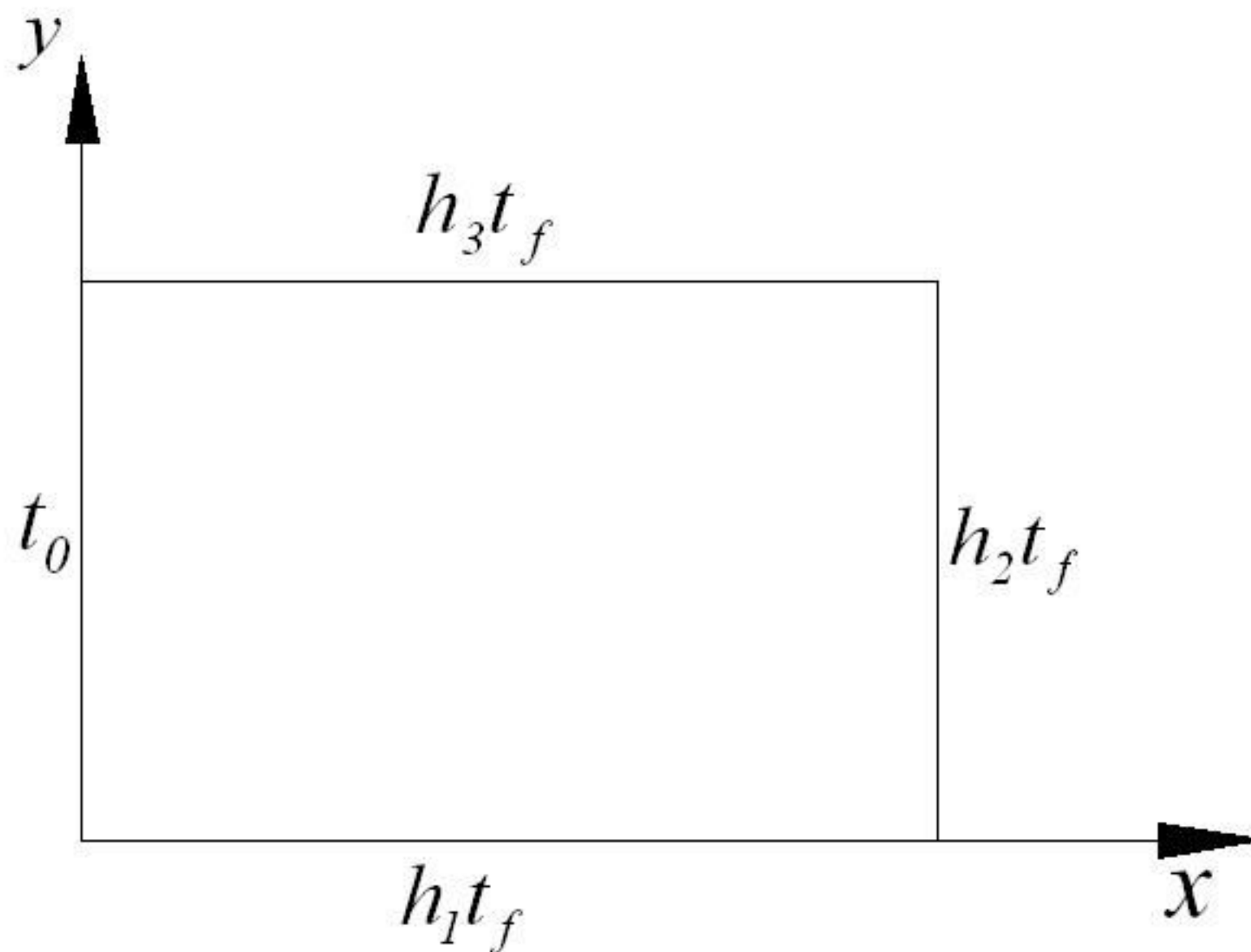


图 4-1 物理问题的数值求解过程

2. 例题条件



二维矩形域内
稳态无内热
源，常物性的
导热问题

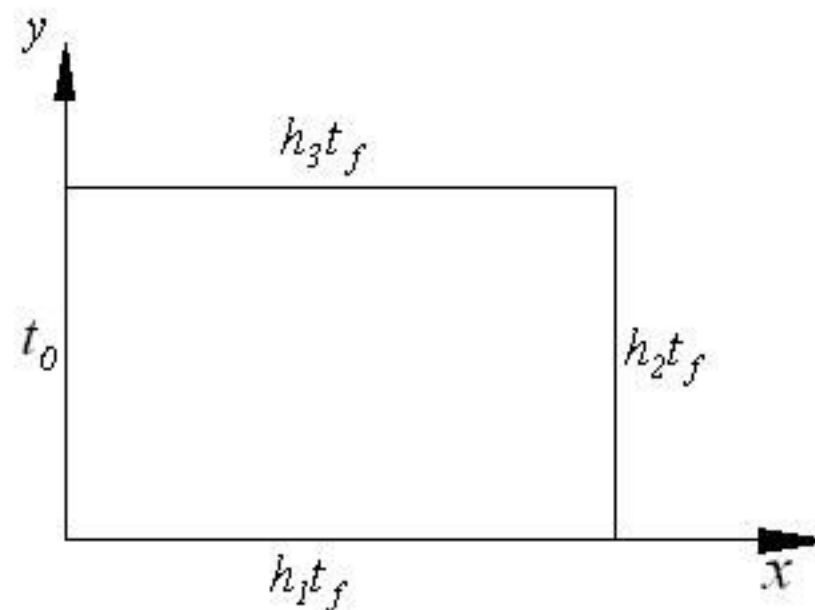
(a)

二维矩形域内无内热源、稳态、常物性的导热问题采用数值解法的步骤：

(1) 建立控制方程及定解条件

控制方程（即 **导热微分方程**）

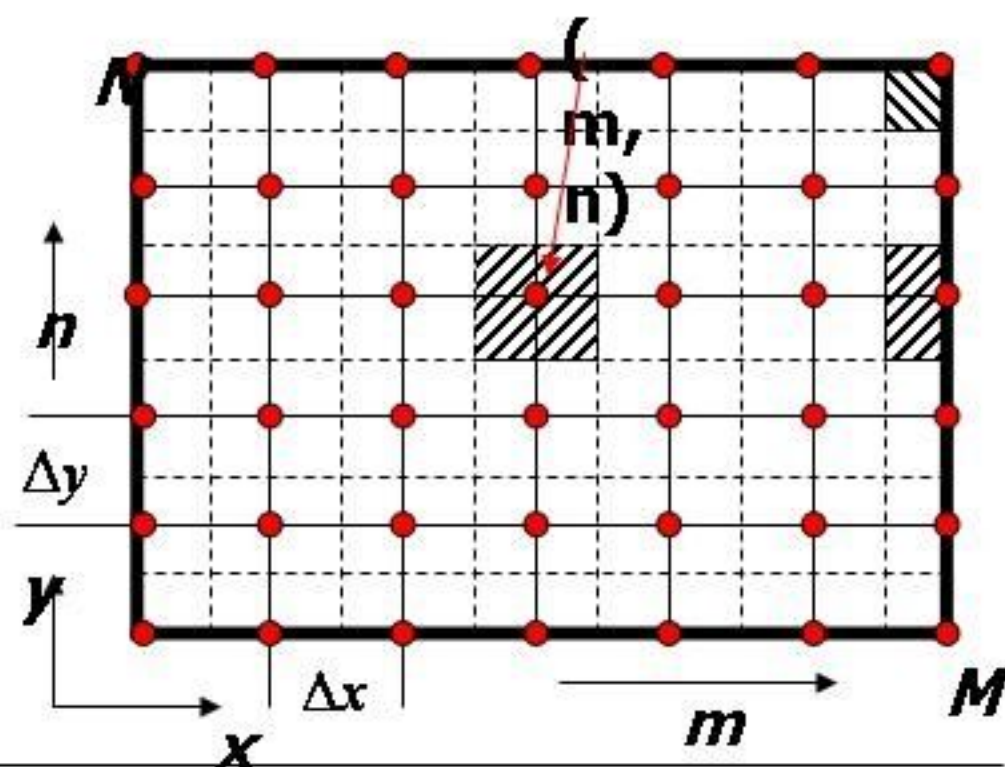
$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$$



(2) 区域离散化 (确立节点)

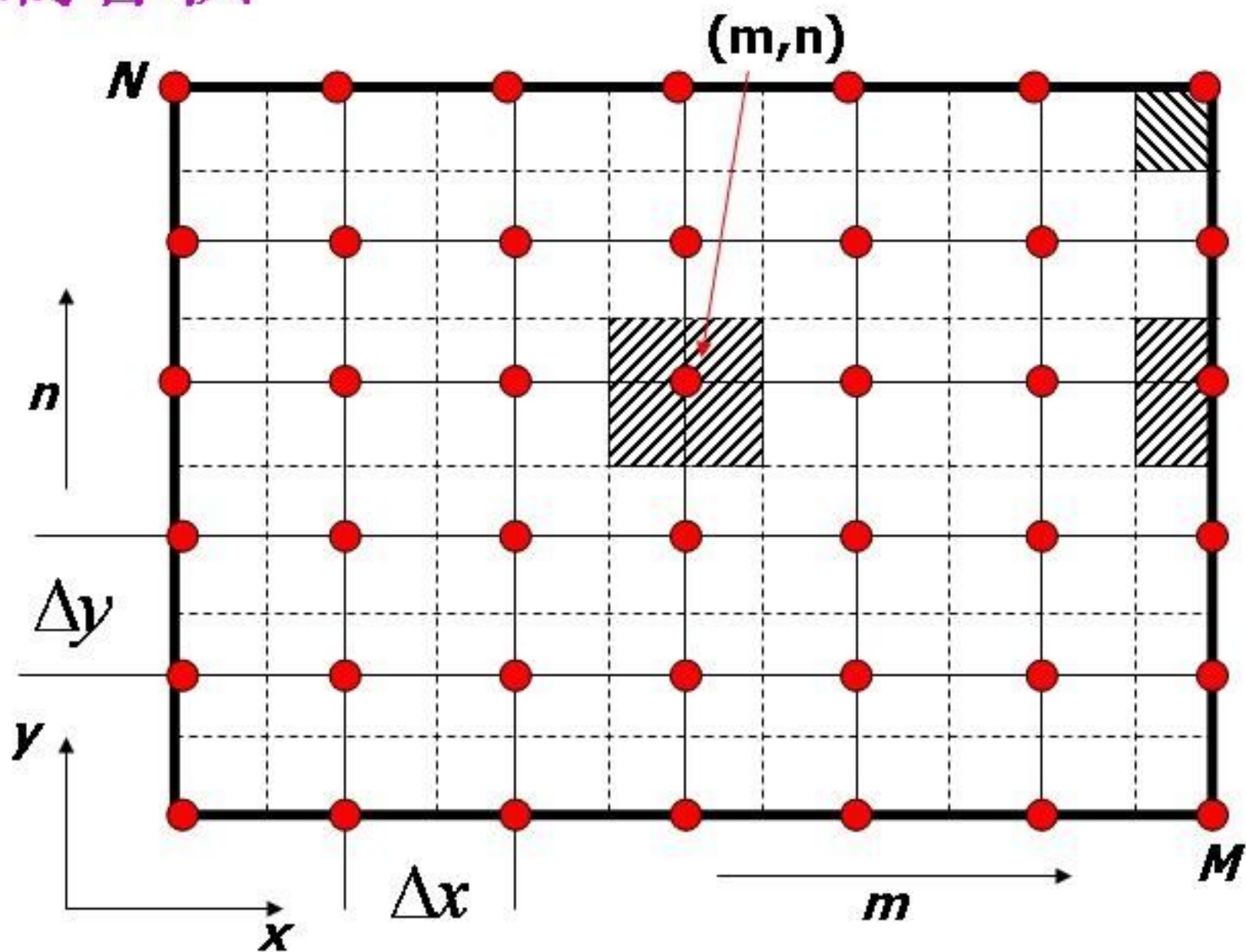
用一系列与坐标轴平行的网格线把求解区域划分成若干个子区域，用网格线的交点作为需要确定温度值的空间位置，称为**节点 (结点)**，节点的位置用该节点在两个方向上的标号 m ， n 表示。

相邻两节点间的距离称**步长**。



Website: <http://www.allimagestool.com>

基本概念：网格线、节点、界面线、步长、控制容积



二维矩形
域内稳态
无内热
源，常物
性的导热
问题

(b)

(3) 建立节点物理量的代数方程（离散方程）

节点上物理量的代数方程称离散方程。

- 首先划分各节点的类型；
- 其次，建立节点离散方程；
- 最后，代数方程组的形成。

对节点 (m, n) 的代数方程，当 $\Delta x = \Delta y$ 时，有：

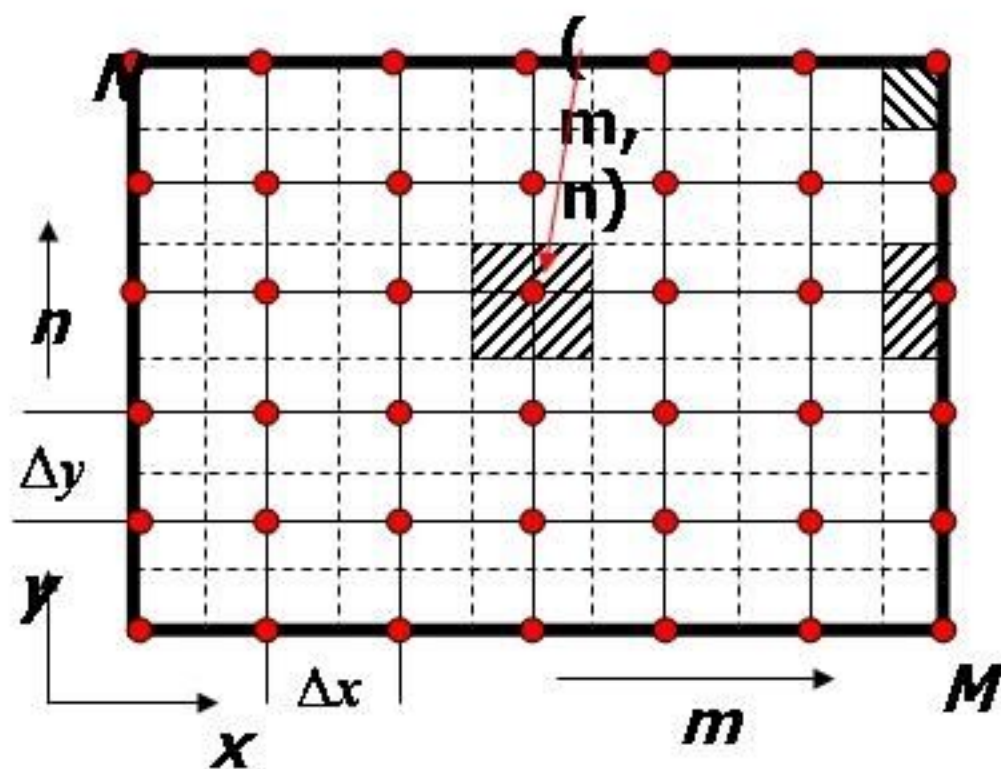
$$t_{m,n} = \frac{1}{4} (t_{m+1,n} + t_{m-1,n} + t_{m,n-1} + t_{m,n+1})$$

(4) 设立迭代初场

代数方程组的求解方法有直接解法与迭代解法，传热问题的有限差分法中主要采用迭代法。采用迭代法求解时，需对被求的温度场预先设定一个解，这个解称为初场，并在求解过程中不断改进。

(5) 求解代数方程组

本例中除 $m=1$ 的左边边界上各节点的温度已知外，其余 $(M-1)N$ 个节点均需建立离散方程，共有 $(M-1)N$ 个方程，则构成一个封闭的代数方程组。



求解时遇到的问题：

- ① 线性；
- ② 非线性；
- ③ 收敛性等。

- 1) **线性代数方程组**: 代数方程一经建立, 其中各项系数在整个求解过程中不再变化;
- 2) **非线性代数方程组**: 代数方程一经建立, 其中各项系数在整个求解过程中不断更新。
- 3) **是否收敛判断**: 是指用迭代法求解代数方程是否收敛, 即本次迭代计算所得之解与上一次迭代计算所得之解的偏差是否小于允许值。

(6) 解的分析

通过求解代数方程，获得物体中的温度分布，根据温度场应进一步计算通过的热流量，热应力及热变形等。

因此，对于数值分析计算所得的温度场及其它物理量应作详细分析，以获得定性或定量上的结论。

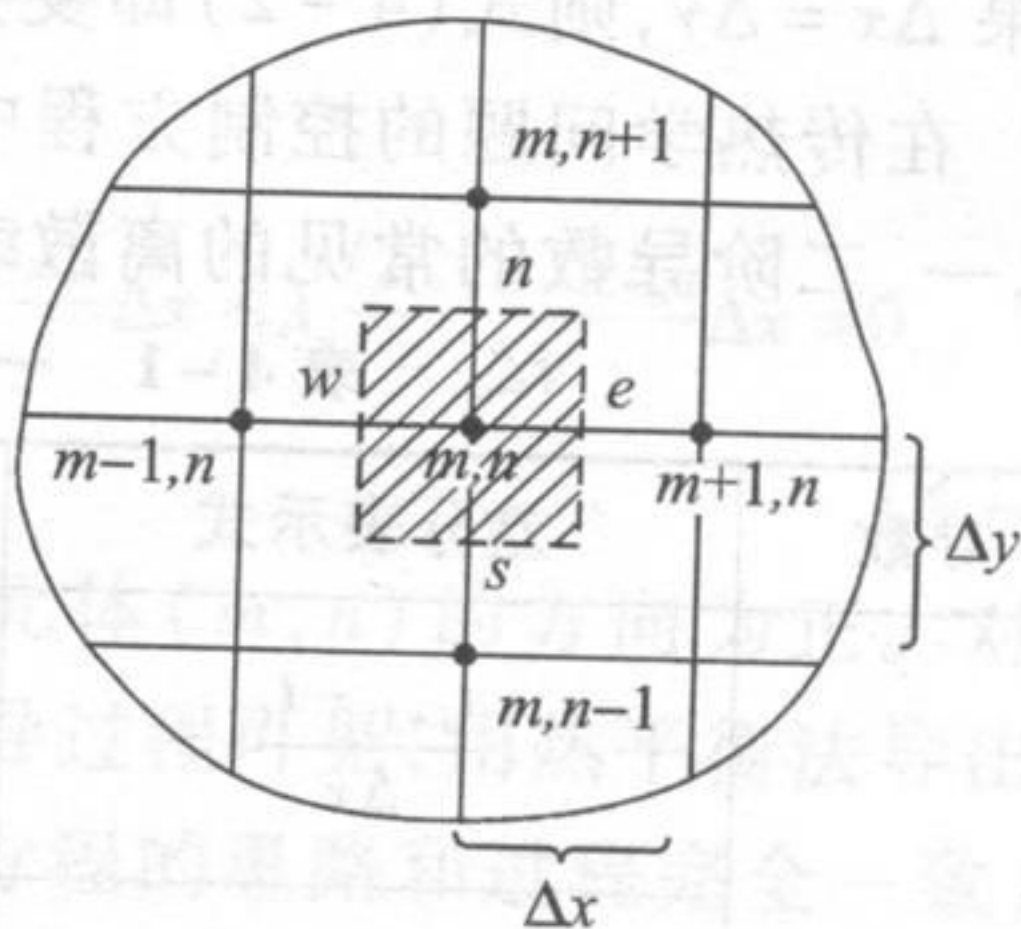
4-2 内节点离散方程的建立方法

Taylor (泰勒) 级数展开法;

控制容积平衡法(热平衡法)

4.2.1 泰勒级数展开法

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x)}{2!} \Delta x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \Delta x^n + \dots$$



根据泰勒级数展开式，用节点 (m, n) 的温度 $t_{m, n}$ 来表示节点 $(m+1, n)$ 的温度 $t_{m+1, n}$

$$t_{m+1, n} = t_{m, n} + \Delta x \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{m, n} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right|_{m, n} + \frac{\Delta x^3}{6} \left. \frac{\partial^3 t}{\partial x^3} \right|_{m, n} + \frac{\Delta x^4}{24} \left. \frac{\partial^4 t}{\partial x^4} \right|_{m, n} + \dots$$

用节点 (m, n) 的温度 $t_{m, n}$ 来表示节点 $(m-1, n)$ 的温度 $t_{m-1, n}$

$$t_{m-1, n} = t_{m, n} - \Delta x \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{m, n} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right|_{m, n} - \frac{\Delta x^3}{6} \left. \frac{\partial^3 t}{\partial x^3} \right|_{m, n} + \frac{\Delta x^4}{24} \left. \frac{\partial^4 t}{\partial x^4} \right|_{m, n} + \dots$$

Website: <http://www.allimagestool.com>

将上两式相加可得

$$t_{m+1,n} + t_{m-1,n} = 2t_{m,n} + \Delta x^2 \left. \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right|_{m,n} + \frac{\Delta x^4}{12} \frac{\partial^4 t}{\partial x^4} + \dots$$

将上式改写成 $\left. \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right|_{m,n}$ 的表达式, 有

$$\left. \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right|_{m,n} = \frac{t_{m+1,n} - 2t_{m,n} + t_{m-1,n}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2)$$

同样可得:

$$\left. \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right|_{m,n} = \frac{t_{m,n+1} - 2t_{m,n} + t_{m,n-1}}{\Delta y^2} + o(\Delta y^2)$$

表示未明确写出的
级数余项中的 ΔX
的最低阶数为2

Website: <http://www.allimagestool.com>

根据导热问题的控制方程（导热微分方程）

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$$

得

$$\frac{t_{m+1,n} - 2t_{m,n} + t_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{t_{m,n+1} - 2t_{m,n} + t_{m,n-1}}{\Delta y^2} = 0$$

若 $\Delta x = \Delta y$ 则有

$$t_{m,n} = \frac{1}{4} (t_{m+1,n} + t_{m-1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1})$$

表 4-1 一阶、二阶导数的常用差分表示式

导数	差分表示式	截断误差	备注
$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_i$	$\frac{t_{i+1} - t_i}{\Delta x}$	$O(\Delta x)$	称为 i 点的向前差分 (forward difference)
	$\frac{t_i - t_{i-1}}{\Delta x}$	$O(\Delta x)$	称为 i 点的向后差分 (backward difference)
	$\frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{2\Delta x}$	$O(\Delta x^2)$	称为 i 点的中心差分 (centered difference)
$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_i$	$\frac{t_{i+1} - 2t_i + t_{i-1}}{\Delta x^2}$	$O(\Delta x^2)$	称为 i 点的中心差分 (centered difference)

适用范围：直角坐标、圆柱坐标和极坐标适用

均匀非均匀网格均适用

4.2.2 控制容积平衡法(热平衡法)

基本思想: 对每个有限大小的控制容积应用能量守恒, 从而获得温度场的代数方程组, 它从基本物理现象和基本定律出发, 不必事先建立控制方程, 依据能量守恒和Fourier导热定律即可。

能量守恒:

流入控制体的总热流量 + 控制体内热源生成热
= 流出控制体的总热流量 + 控制体内能的增量



$$\Phi_i + \Phi_v = \Phi_o + \Phi_\tau$$

$$\Phi_i + \Phi_v = \Phi_o + \Phi_\tau \Rightarrow \Phi_i + (-\Phi_o) + \Phi_v = \Phi_\tau$$

从所有方向流入控制体的净热流量 +
控制体内热源生成热 = 控制体内能的增量

注意：上面的公式对内部节点和边界节点均适用

稳态、无内热源时：

从所有方向流入控制体的总热流量 = 0

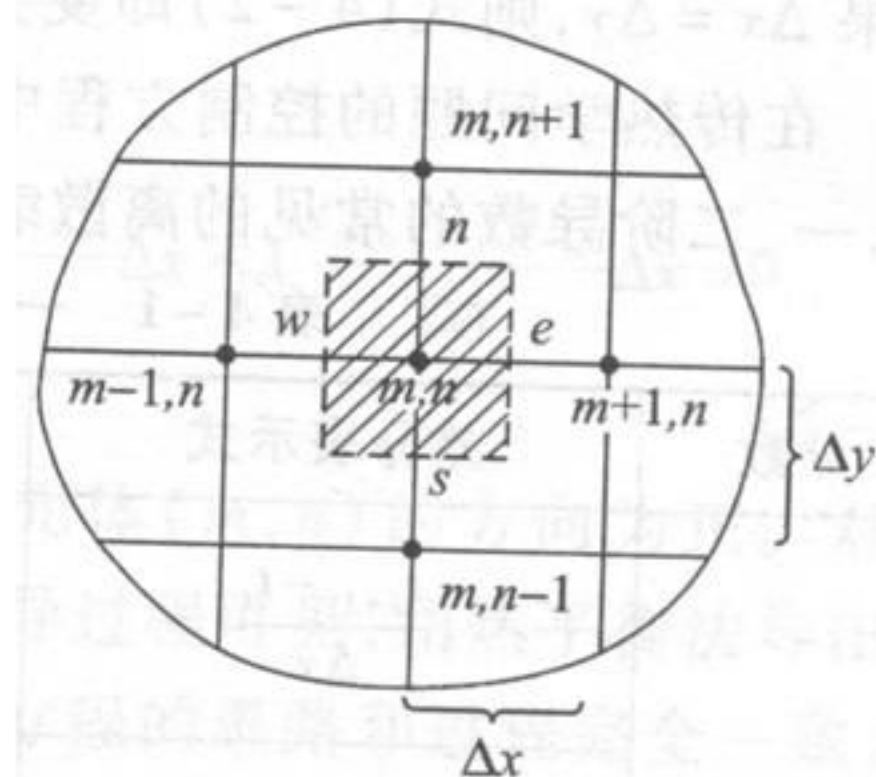
从节点通过界面传导到节点 (m, n) 的热流量:

$$\Phi_w = \lambda \Delta y \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\Phi_e = \lambda \Delta y \frac{t_{m+1,n} - t_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\Phi_n = \lambda \Delta x \frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\Phi_s = \lambda \Delta x \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y}$$




Website: <http://www.allimagestool.com>

稳态、无内热源时:

从所有方向流入控制体的总热流量=0

$$\Phi_e + \Phi_w + \Phi_n + \Phi_s = 0$$


$$\lambda \Delta y \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \lambda \Delta y \frac{t_{m+1,n} - t_{m,n}}{\Delta x}$$

$$+ \lambda \Delta x \frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \lambda \Delta x \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y} = 0$$

化简得

$$\frac{t_{m+1,n} - 2t_{m,n} + t_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{t_{m,n+1} - 2t_{m,n} + t_{m,n-1}}{\Delta y^2} = 0$$

说明:

- ① 上述分析与推导在笛卡儿坐标系中进行的;
- ② 热平衡法概念清晰, 过程简捷;
- ③ 热平衡法与建立微分方程的思路与过程一致, 但不同的是前者是有限大小的元体, 后者是微元体。

4.3 边界节点离散方程的建立 及代数方程的求解

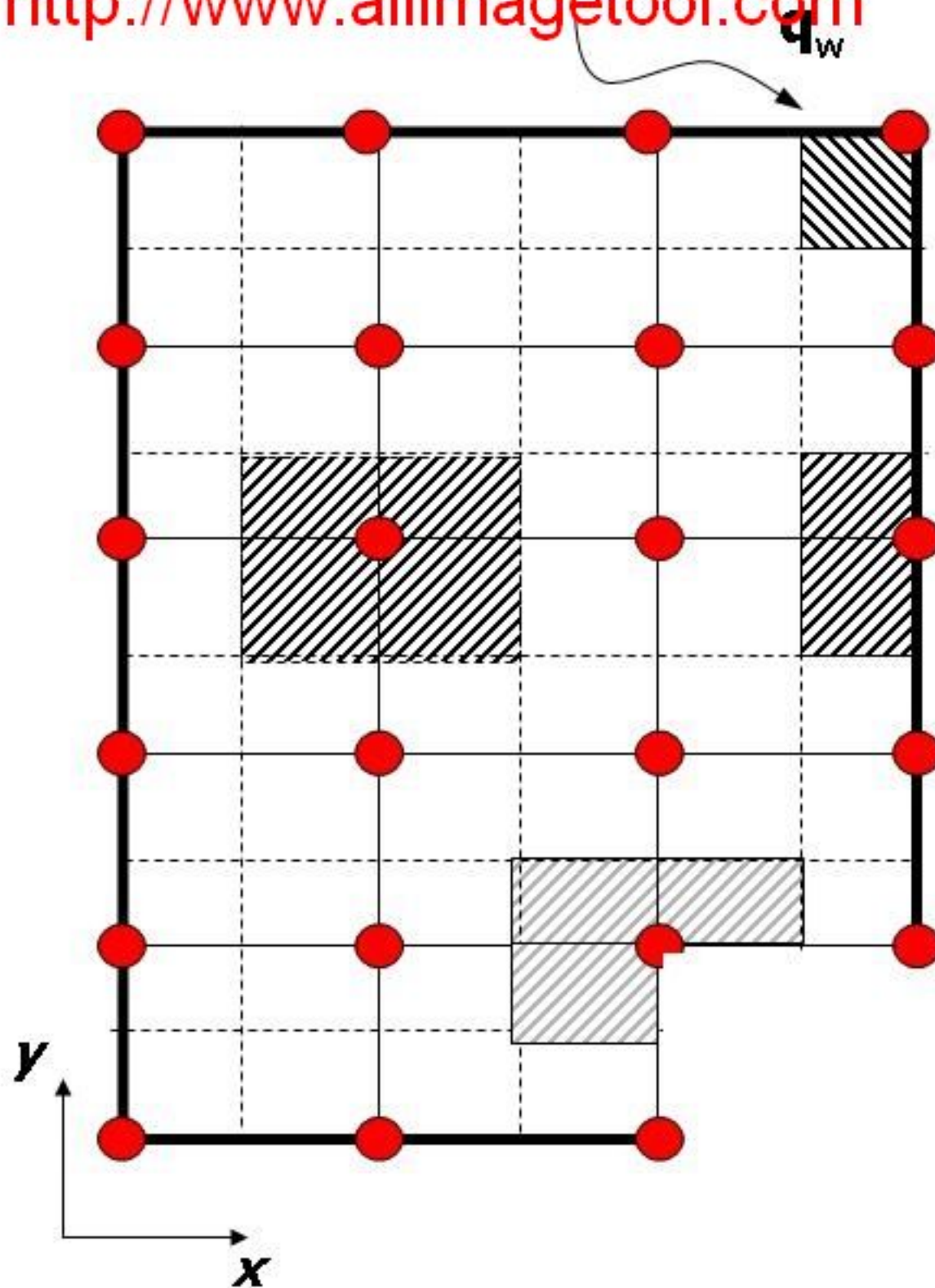
对于第一类边界条件的热传导问题，处理比较简单，因为已知边界的温度，可将其以数值的形式加入到内节点的离散方程中，组成封闭的代数方程组，直接求解。

对于第二类或第三类边界条件的导热问题，所有内节点的离散方程组成的代数方程组是不封闭的，因未知边界温度，因此应对边界上的节点补充相应的代数方程，才能使方程组封闭，以便求解。

→ 为了求解方便，将第二类边界条件及第三类边界条件合并起来考虑，用 q_w 表示边界上的热流密度或热流密度表达式。为使结果更具一般性，假设物体具有内热源 Φ （不必均匀分布）。

传热学 Heat Transfer

Website: <http://www.allimagestool.com>



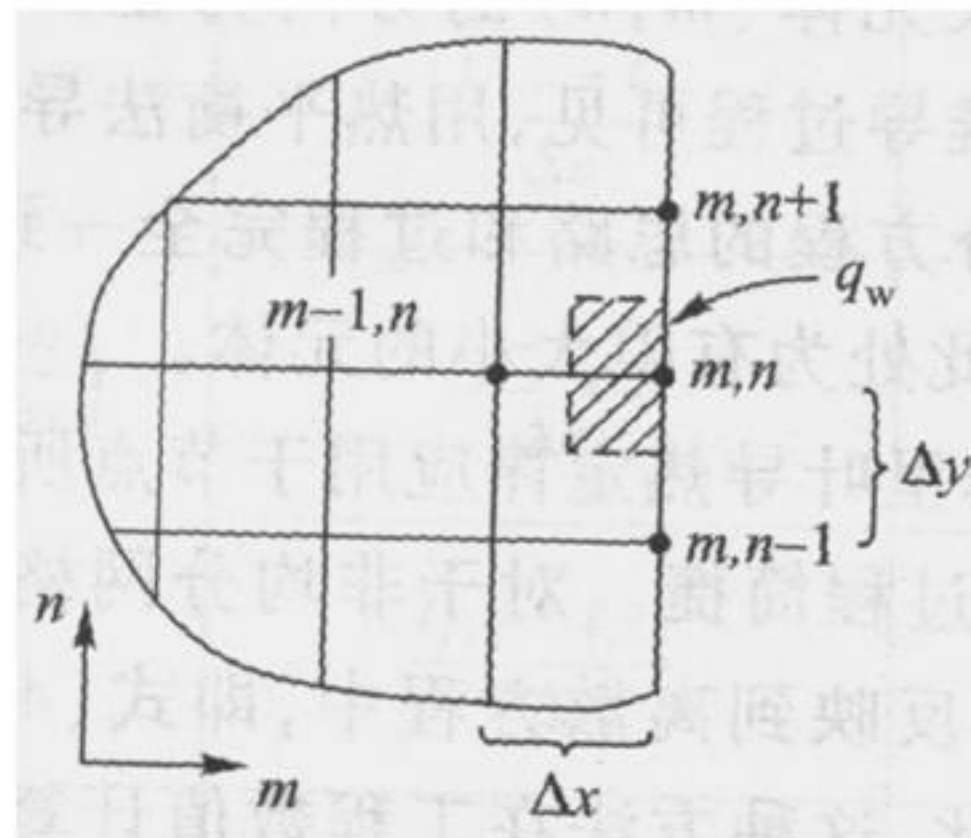
(1) 平直边界上的节点

边界节点 (m, n) 只代表半个元体，若边界上有向该元体传递的热流密度为 q_w ，据能量守恒定律：

$$\lambda \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} \Delta y + \lambda \frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} + \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \dot{\Phi}_{m,n} \frac{\Delta x}{2} \Delta y + \Delta y q_w = 0$$

$$\Delta x = \Delta y \Rightarrow$$

$$t_{m,n} = \frac{1}{4} \left(2t_{m-1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + \frac{\Delta x^2 \dot{\Phi}_{m,n}}{\lambda} + \frac{2\Delta x q_w}{\lambda} \right)$$



(3) 内部角点

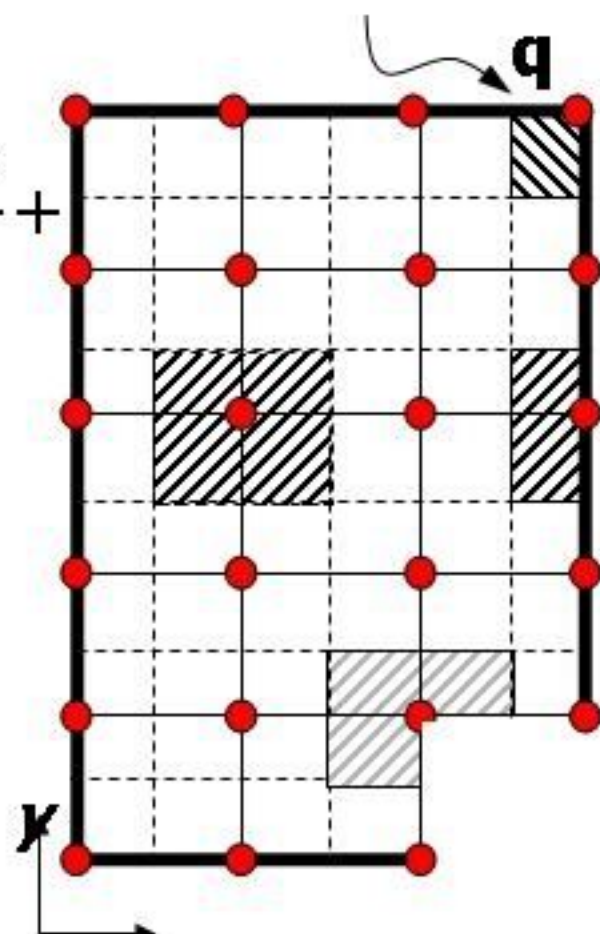
内部角点代表了 3/4 个元体，在同样的假设条件下

$$\lambda \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} \Delta y + \lambda \frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y} \Delta x + \lambda \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} +$$

$$\lambda \frac{t_{m+1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} \frac{\Delta y}{2} + \frac{3\Delta x \Delta y}{4} \dot{\Phi}_{m,n} + \frac{\Delta x + \Delta y}{2} q_w = 0$$

$$\Delta x = \Delta y \Rightarrow$$

$$t_{m,n} = \frac{1}{6} (2t_{m-1,n} + 2t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + t_{m+1,n} + \frac{3\Delta x^2 \dot{\Phi}}{2\lambda} + \frac{2\Delta x^2 q_w}{\lambda})$$



Website: <http://www.allimagestool.com>
讨论关于边界热流密度的三种情况:

(1) 绝热边界 即令上式 $q_w = 0$ 即可。

(2) q_w 值不为零

(3) 对流边界

此时 $q_w = h(t_f - t_{m,n})$, 将此表达式代入上述方程, 并将此项中的 $t_{m,n}$ 与等号前的 $t_{m,n}$ 合并。
对于 $\Delta x = \Delta y$ 的情况有:

流
入
体
取

(a) 平直边界

$$2\left(\frac{h\Delta x}{\lambda} + 2\right)t_{m,n} = 2t_{m-1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + \frac{\Delta x^2}{\lambda} \dot{\Phi}_{m,n} + \frac{2h\Delta x}{\lambda} t_f$$

(b) 外部角点

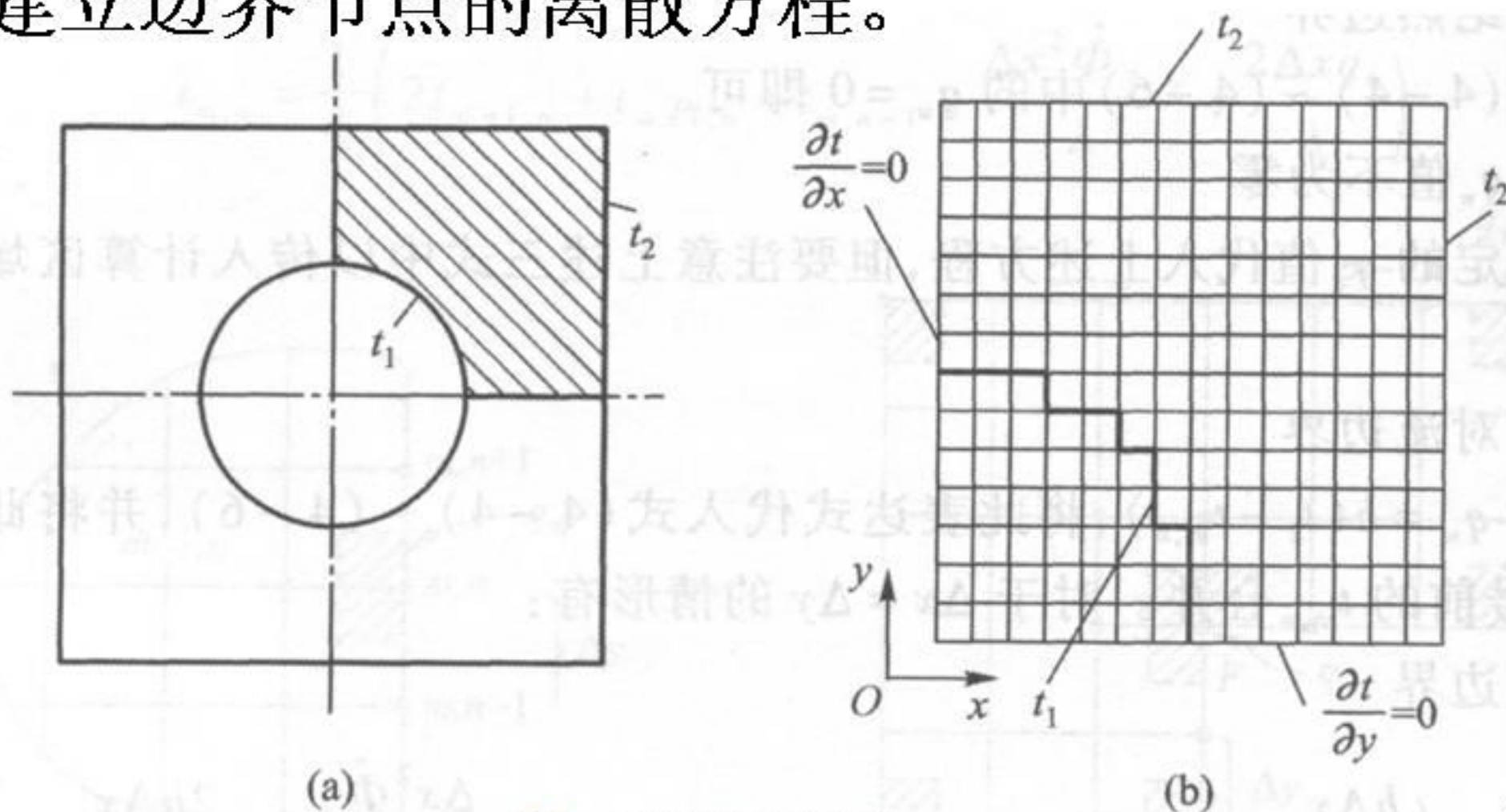
$$2\left(\frac{h\Delta x}{\lambda} + 1\right)t_{m,n} = t_{m-1,n} + t_{m,n-1} + \frac{\Delta x^2}{2\lambda} \dot{\Phi}_{m,n} + \frac{2h\Delta x}{\lambda} t_f$$

(c) 内部角点

$$2\left(\frac{h\Delta x}{\lambda} + 3\right)t_{m,n} = 2(t_{m-1,n} + t_{m,n+1}) + t_{m+1,n} + t_{m,n-1} + \frac{3\Delta x^2}{2\lambda} \dot{\Phi}_{m,n} + \frac{2h\Delta x}{\lambda} t_f$$

4.3.2 处理不规则区域的阶梯型逼近法

当计算区域出现曲线边界或倾斜边界时，常常采用**阶梯形的折线**来模拟真实边界，然后用上述方法建立边界节点的离散方程。



4.3.3 求解代数方程的迭代法

- 1) **直接解法**: 通过有限次运算获得精确解的方法, 如: 矩阵求解, 高斯消元法。
- 2) **迭代法**: 先对要计算的场作出假设 (设定初场), 在迭代计算中不断予以改进, 直到计算前的假定值与计算结果相差小于允许值为止的方法, 称迭代计算收敛。

2 迭代法目前应用较多的是:

1) 雅可比迭代法 (简单迭代): 每次迭代计算, 均用上一次迭代计算出的值。

2) 高斯——赛德尔迭代法: 每次迭代计算, 均是使用节点温度的最新值。

Website: <http://www.allimagestool.com>

例如：根据第 k 次迭代的数值 $t_1^{(k)}$ 、 $t_2^{(k)}$... $t_n^{(k)}$

可以求得节点温度：

$$t_1^{(k+1)} = a_{11}t_1^{(k)} + a_{12}t_2^{(k)} + \dots + a_{1n}t_n^{(k)} + b_1^{(k)}$$

在计算后面的节点温度时应按下式（采用最新值）

$$t_2^{(k+1)} = a_{21}t_1^{(k+1)} + a_{22}t_2^{(k)} + \dots + a_{2n}t_n^{(k)} + b_2^{(k)}$$

$$t_3^{(k+1)} = a_{31}t_1^{(k+1)} + a_{32}t_2^{(k+1)} + \dots + a_{3n}t_n^{(k)} + b_3^{(k)}$$

.....

$$t_n^{(k+1)} = a_{n1}t_1^{(k+1)} + a_{n2}t_2^{(k+1)} + \dots + a_{nn-1}t_{n-1}^{(k+1)} + a_{nn}t_n^{(k)} + b_n^{(k)}$$

设有一三元方程组：

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13}t_3 = b_1 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23}t_3 = b_2 \\ a_{31}t_1 + a_{32}t_2 + a_{33}t_3 = b_3 \end{cases}$$

其中 $a_{i,j}$ ($i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$) 及 b_i 及是已知的系数 (均不为零) 及常数。

采用高斯——赛德尔迭代法的步骤:

(1) 将三元方程变形为迭式方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}t_2 - a_{13}t_3) \\ t_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}t_1 - a_{23}t_3) \\ t_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}t_1 - a_{32}t_2) \end{array} \right.$$

(2) 假设一组解（迭代初场），记为：

$t_1^{(0)}$ 、 $t_2^{(0)}$ 、 $t_3^{(0)}$ 并代入迭代方程求得第一次解
 $t_1^{(1)}$ 、 $t_2^{(1)}$ 、 $t_3^{(1)}$ 每次计算均用最新值代入。

(3) 以新的初场重复计算，直到相邻两次迭代值之差小于允许值，则称迭代收敛，计算终止。

Website: <http://www.allimagestool.com>

判断迭代是否收敛的准则:

$$\max |t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}| \leq \varepsilon$$

$$\max \left| \frac{t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}}{t_i^{(k)}} \right| \leq \varepsilon$$

$$\max \left| \frac{t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}}{t_{\max}^{(k)}} \right| \leq \varepsilon$$

ε — 允许的偏差;
相对偏差 ε 值一般
取 $10^{-3} \sim 10^{-6}$

k及k+1表示迭代次数; $t_{\max}^{(k)}$ — 第k次迭代得到的最大值

当有接近于零的t时, 第三个较好

迭代能否收敛的判据

- 1) 对于一个代数方程组，若选用的迭代方式不合适，有可能导致发散，即称**迭代过程发散**；
- 2) 对于常物性导热问题，组成的差分方程组，迭代公式的选择应使一个迭代变量的系数总是大于或等于该式中其他变量系数绝对值的代数和，此时，结果一定收敛。

Website: <http://www.allimagestool.com>

这一条件数学上称主对角线占优（对角占优）；

$$\frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{a_{11}} \leq 1, \frac{|a_{21}| + |a_{23}|}{a_{22}} \leq 1, \frac{|a_{31}| + |a_{32}|}{a_{33}} \leq 1$$

3) 采用热平衡法导出差分方程时，若每一个方程都选用导出该方程中心节点的温度作为迭代变量，则上述条件必满足，迭代一定收敛。

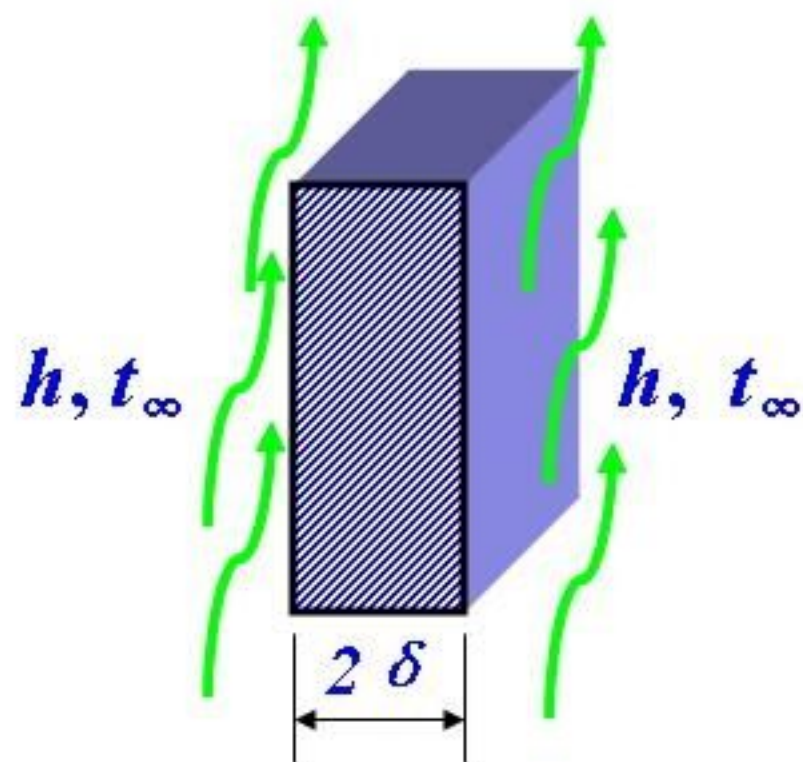
§ 4-4 一维非稳态导热问题的数值求解

在非稳态导热问题中，不但需要对空间区域进行离散，还需要对时间变量进行离散，接下来以一个一维非稳态导热问题为例，重点介绍对非稳态项的离散方法，以及不同离散方法对计算带来的影响等。

一、物理问题和数学描述

厚度 2δ 的无限大平壁， λ 、 a 为已知常数， $\tau=0$ 时温度为 t_0 ，突然将其放置于两侧温度为 t_∞ 并保持不变的流体中，两侧表面与流体之间的表面传热系数为 h 。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \\ \tau = 0, \quad t = t_0 \\ x = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \\ x = \delta, \quad -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = h(t|_{\delta} - t_\infty) \end{array} \right.$$

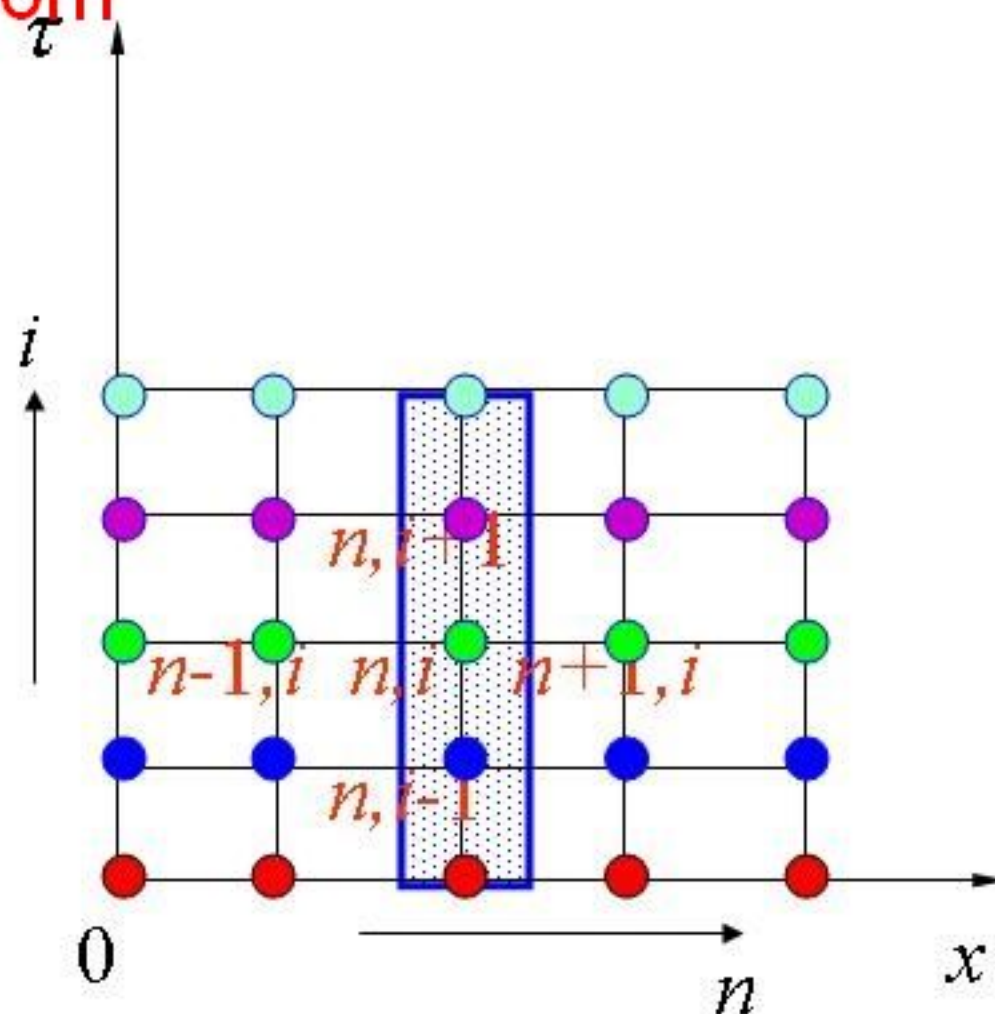


二、离散方程的建立

1. 热平衡法

① 内节点

对于节点 n 在 i 时刻的所代表的控制容积建立热平衡关系。



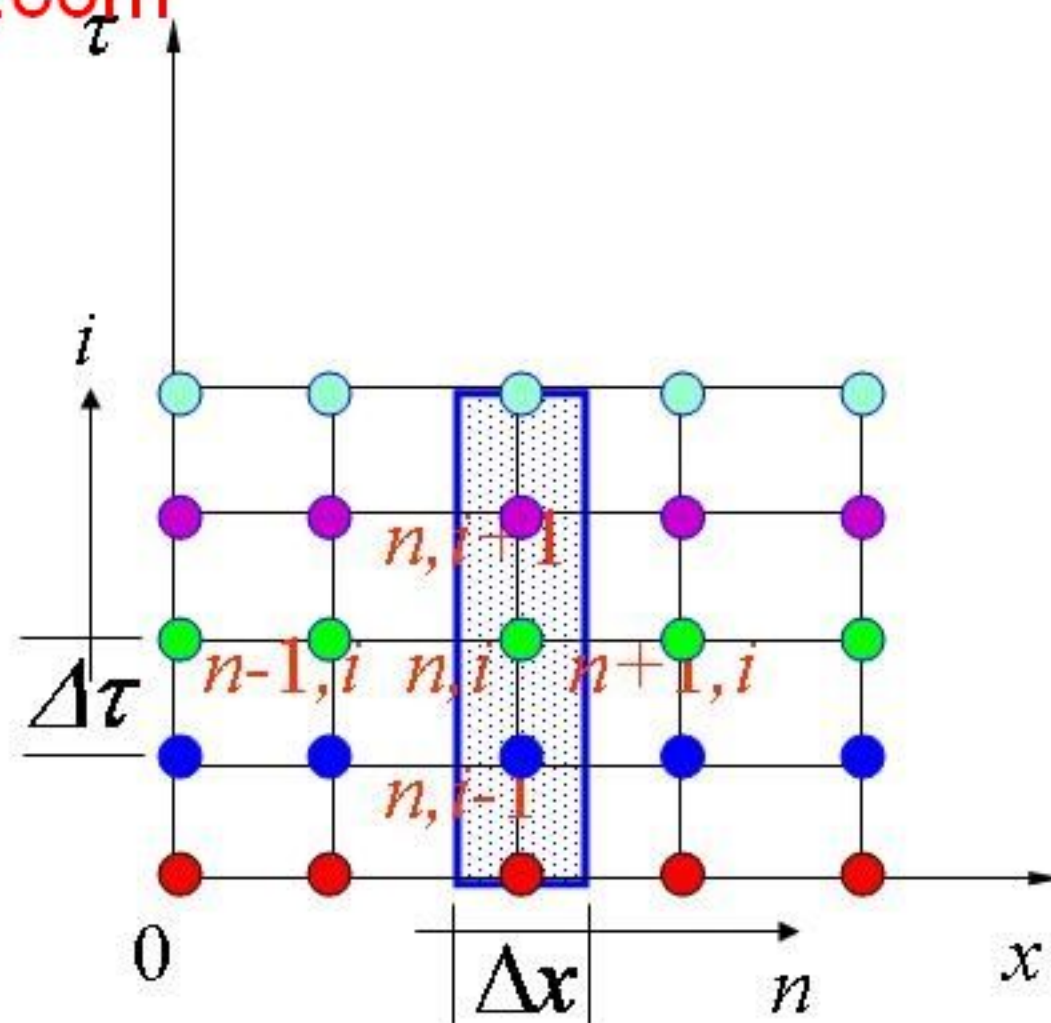
从左右两侧导入的热量等于单位时间容积的内能增量。

Website: <http://www.allimagestool.com>

$$\Phi_w = \lambda \cdot 1 \frac{t_{n-1}^{(i)} - t_n^{(i)}}{\Delta x}$$

$$\Phi_e = \lambda \cdot 1 \frac{t_{n+1}^{(i)} - t_n^{(i)}}{\Delta x}$$

$$\Delta E = \rho V c \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \rho \Delta x c \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau}$$



同时有: $\Delta E = \Phi_w + \Phi_e$



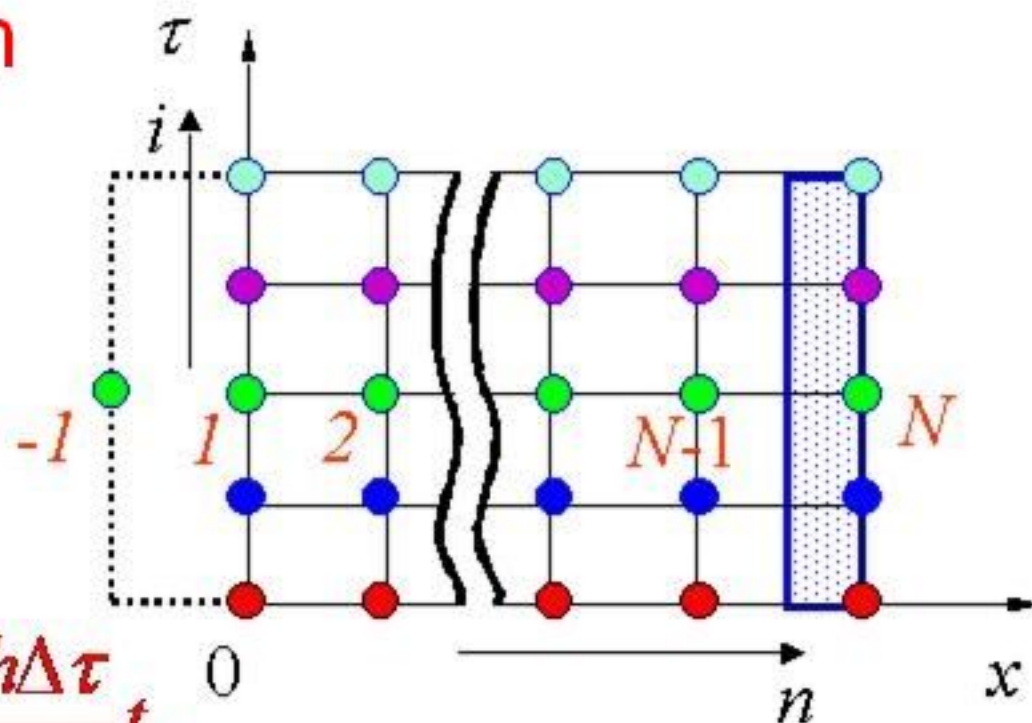
$$\frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau} = a \frac{t_{n+1}^{(i)} - 2t_n^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}}{\Delta x^2}$$

② 右端边界节点

$$\lambda \cdot 1 \frac{t_{N-1}^{(i)} - t_N^{(i)}}{\Delta x} + h(t_f - t_N^{(i)}) = \frac{\Delta x \rho c}{2} \frac{(t_N^{(i+1)} - t_N^{(i)})}{\Delta \tau}$$



$$t_N^{(i+1)} = t_N^{(i)} \left(1 - 2 \frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} - \frac{2h \Delta \tau}{\rho c \Delta x} \right) + 2 \frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} t_{N-1}^{(i)} + \frac{2h \Delta \tau}{\rho c \Delta x} t_f$$



③ 左端对称

$$\frac{t_1^{(i+1)} - t_1^{(i)}}{\Delta \tau} = a \frac{t_{-1}^{(i)} - 2t_1^{(i)} + t_2^{(i)}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{t_1^{(i+1)} - t_2^{(i)}}{\Delta x} = 0$$

$$t_1^{(i+1)} = \left(1 - 2 \frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} \right) t_1^{(i)} + 2 \left(\frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} \right) t_2^{(i)}$$

$$t_1^{(i+1)} = t_2^{(i)}$$

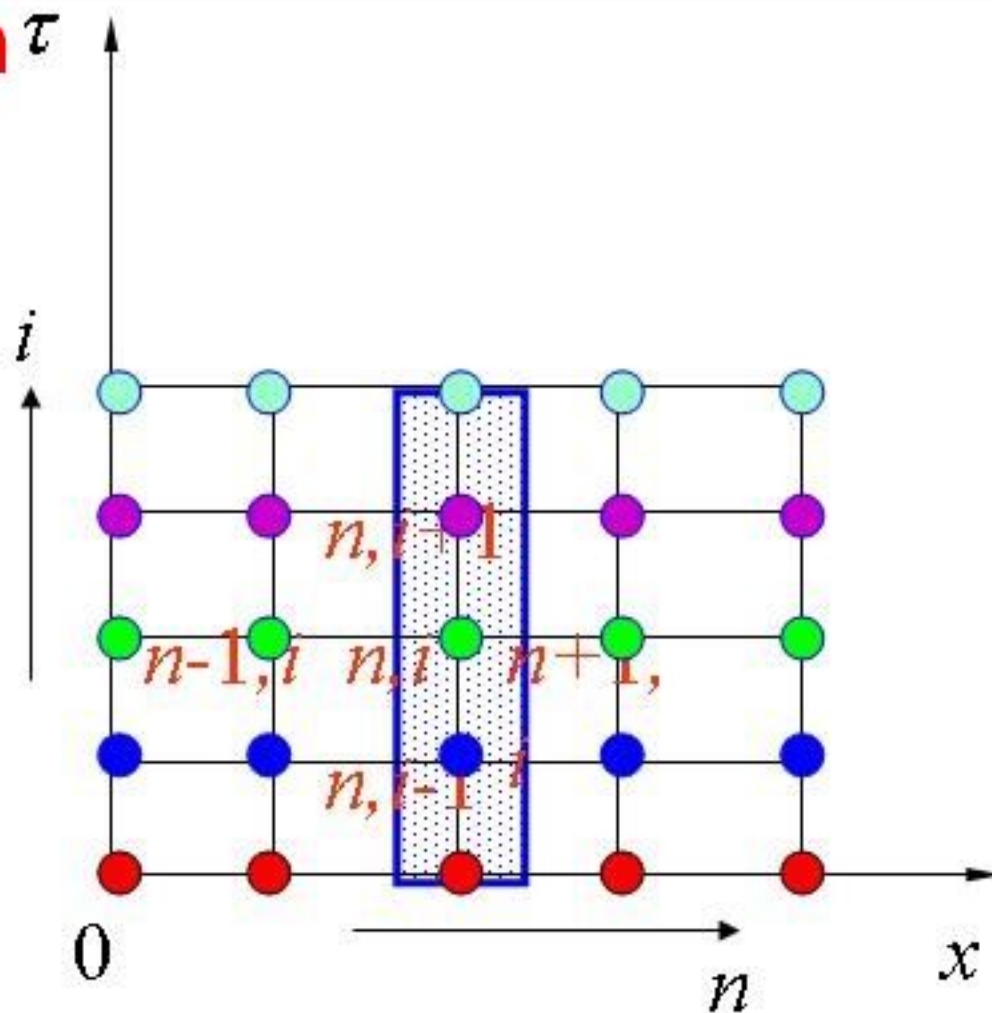
Website: <http://www.allimagestool.com>

2. 直接用差分代替微分

① 向前差分 (forward difference)

$$\left. \frac{\partial t}{\partial \tau} \right|_{n,i} \approx \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau}$$

$$\frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau} = a \frac{t_{n+1}^{(i)} - 2t_n^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}}{\Delta x^2}$$



整理成显式格式:

$$t_n^{(i+1)} = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} (t_{n+1}^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}) + \left[1 - \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] t_n^{(i)}$$

Website: <http://www.allimagestool.com>

② 向后差分 (backward difference)

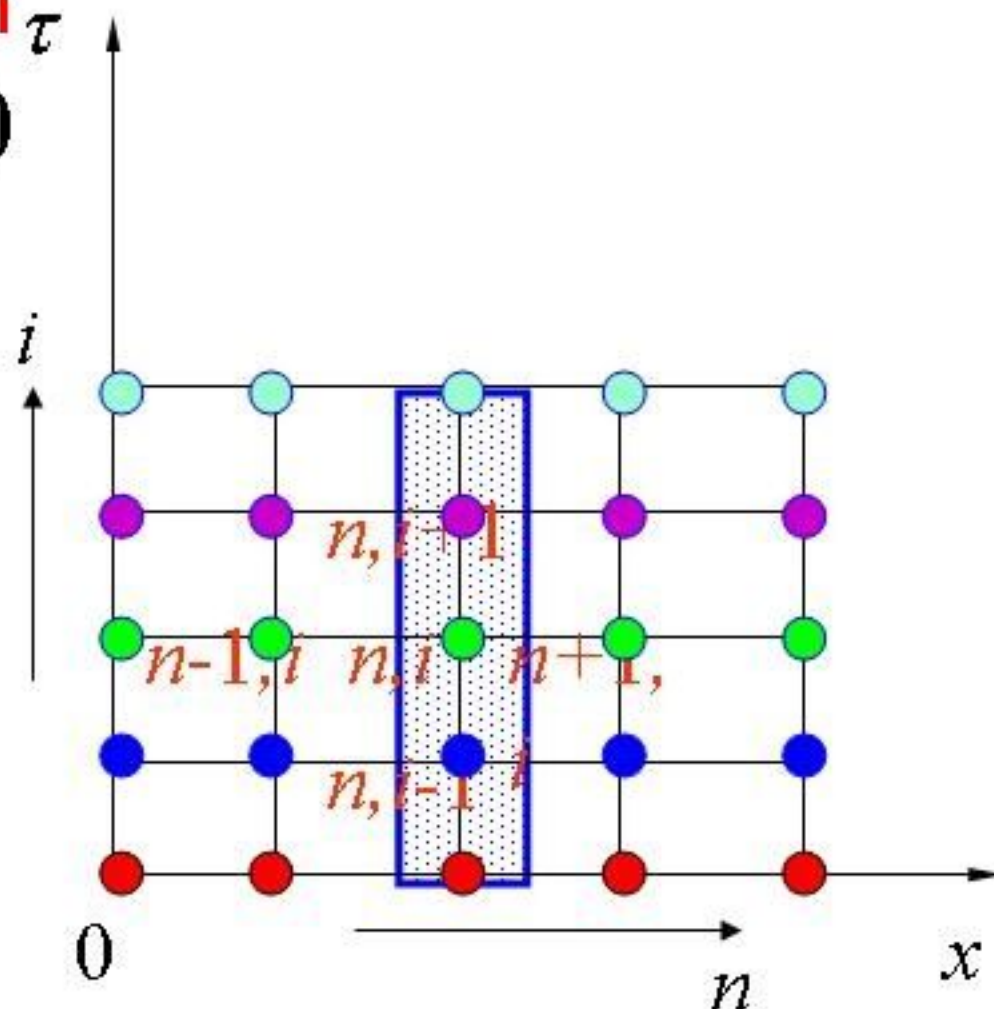
$$\left. \frac{\partial t}{\partial \tau} \right|_{n,i} \approx \frac{t_n^{(i)} - t_n^{(i-1)}}{\Delta \tau}$$

$$\frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau} = a \frac{t_{n+1}^{(i+1)} - 2t_n^{(i+1)} + t_{n-1}^{(i+1)}}{\Delta x^2}$$



整理成隐式格式:

$$\left(1 + \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} \right) t_n^{(i+1)} = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} (t_{n-1}^{(i+1)} + t_{n+1}^{(i+1)}) + t_n^{(i)}$$



三、稳定性分析(stability)

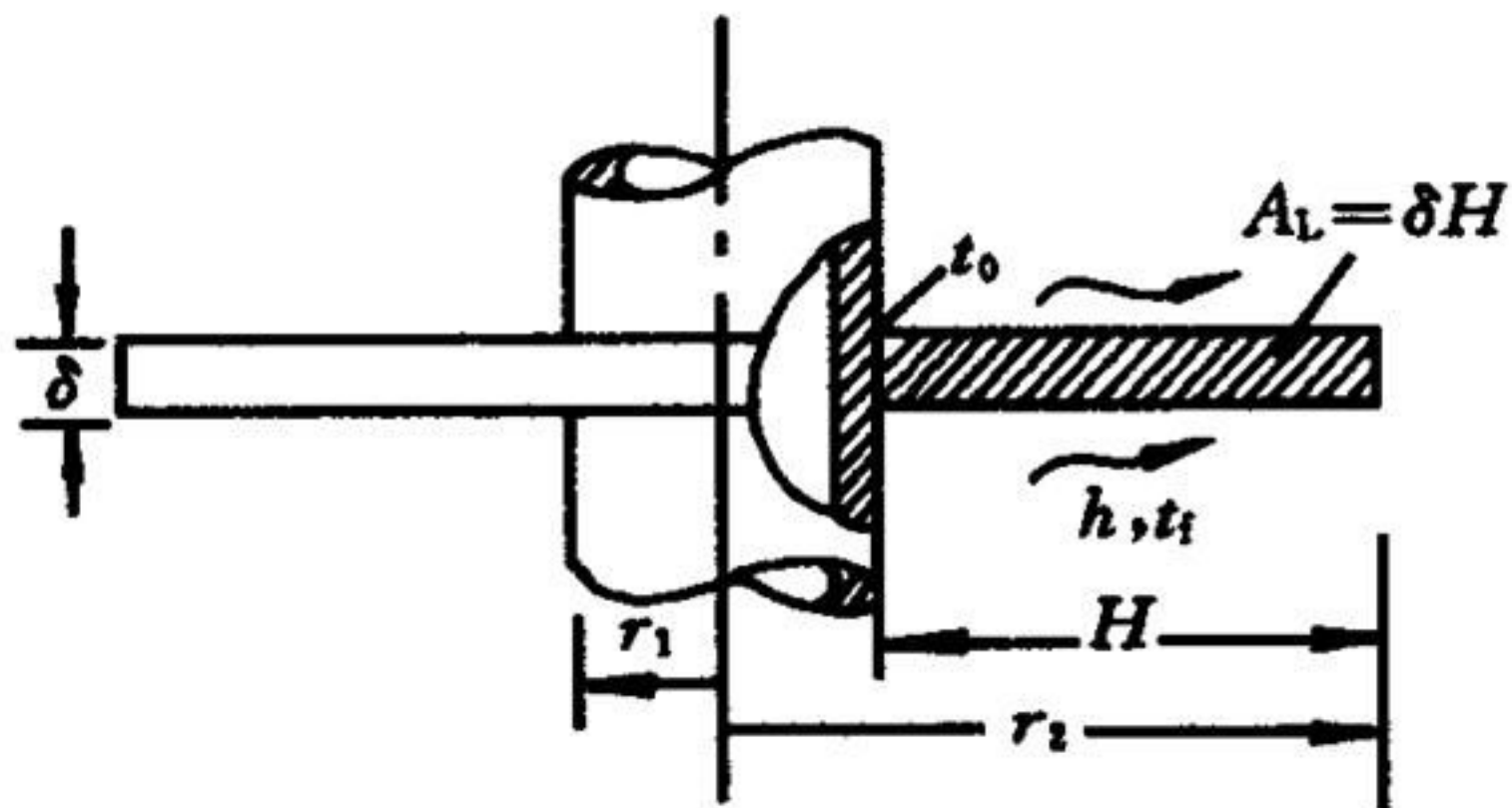
扩散项用*i*时层值表示得到的离散方程又称为**显式格式**。该格式的优点是**求解方便**，但是**对时间步长和空间步长有限制**，否则会出现不合理的结果。根据稳定性要求，限制条件为节点 $t_n^{(i)}$ 前面的系数 ≥ 0 ， $\left[1 - \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2}\right] \geq 0$ 而且边界节点要求更苛刻

内点:
$$F_o \leq \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

边界点:
$$F_o \leq \frac{1}{2(1 + Bi_\Delta)}$$

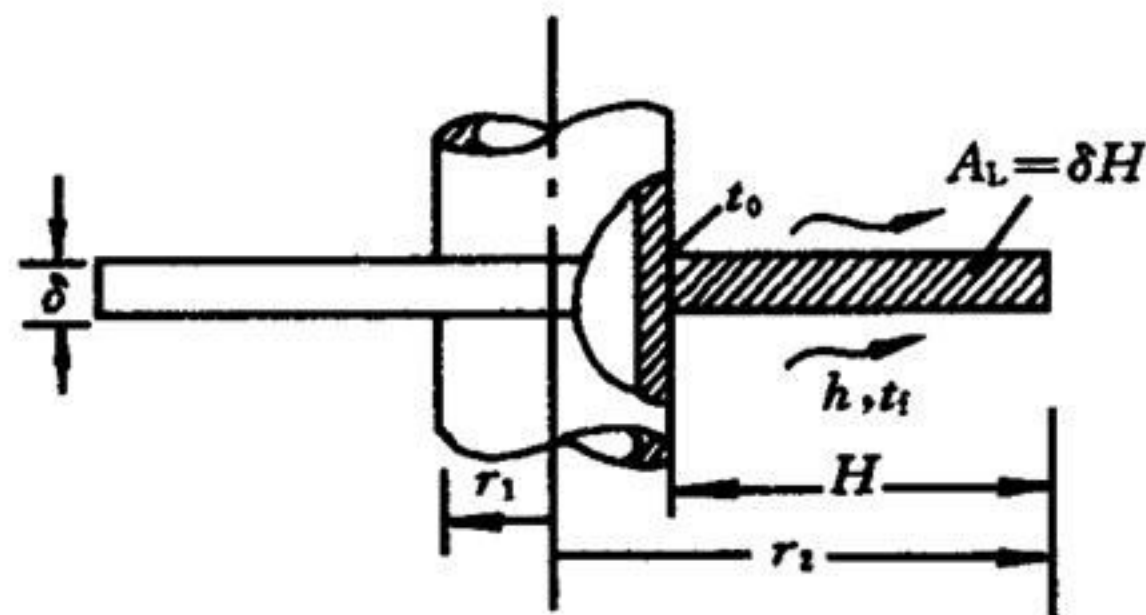
扩散项用 $i+1$ 时层值得到的离散方程又称为**隐式格式**。该格式的优点是无条件稳定，但缺点是需对每一个时间层进行联立求解。

Example 4-4 环肋效率计算 $r_2/r_1=2,3,4$.



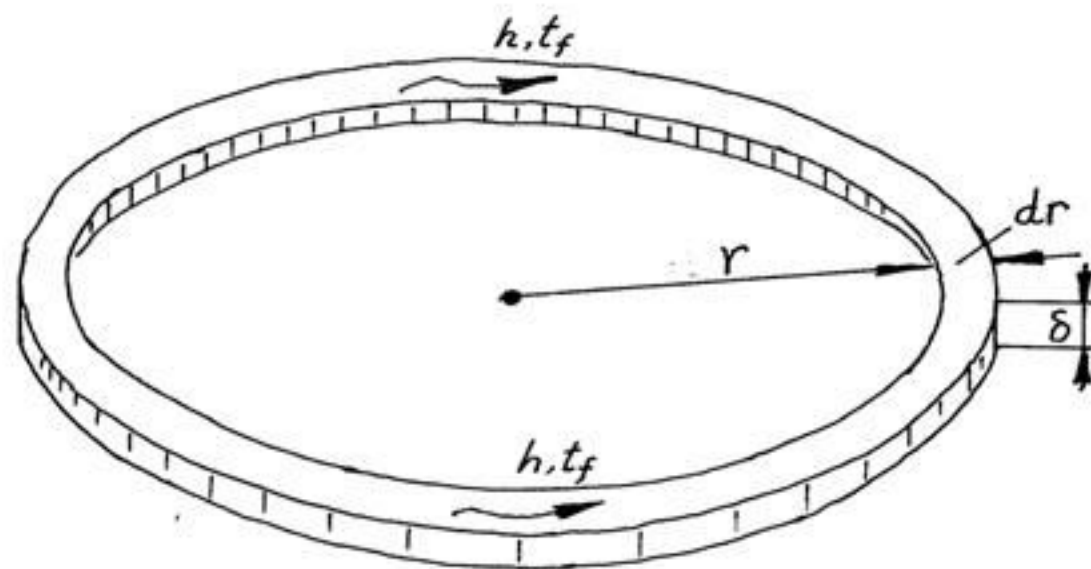
假设：1维，稳态，无内热源，常物性

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dt}{dr} \right) + \frac{\dot{\phi}}{\lambda} = 0 \\ r = r_1, t = t_0; \\ r = r_2, \frac{dt}{dr} = 0 \end{array} \right.$$



折合内热源的计算

$$\dot{\phi} = \frac{2 \times (2\pi r dr) h (t - t_f)}{(2\pi r dr) \delta} = \frac{h(t - t_f)}{\delta}$$



$$\Theta = \frac{t - t_f}{t_0 - t_f} \quad R = \frac{r}{H} \quad m = \sqrt{\frac{h}{\lambda A_L}} H^{3/2}$$

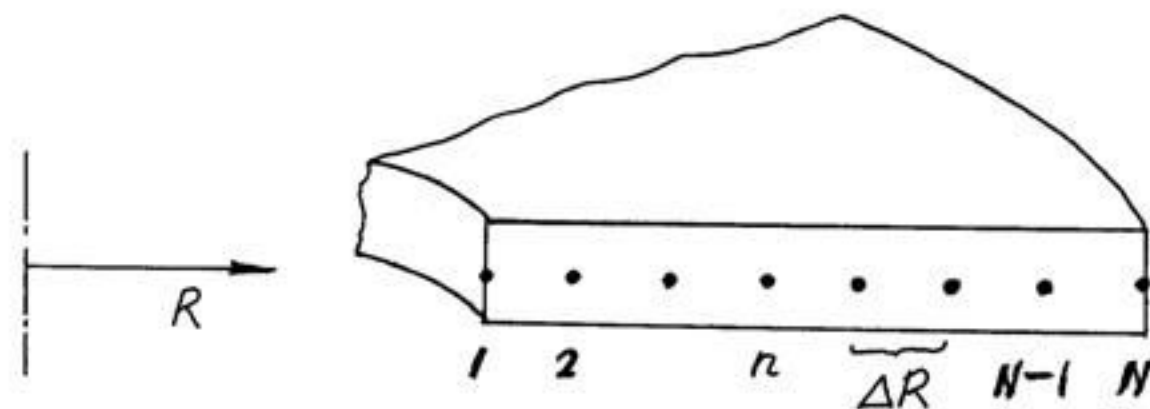
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dt}{dr} \right) + \frac{\phi}{\lambda} = 0 \\ r = r_1, t = t_0; \\ r = r_2, \frac{dt}{dr} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \Theta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\Theta}{dR} - 2m^2 \Theta = 0; \\ R = R_1, \Theta = 1; \\ R = R_2, \frac{d\Theta}{dR} = 0 \end{array} \right.$$

Website: <http://www.allimagestool.com>

$$\frac{d^2 \Theta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\Theta}{dR} - 2m^2 \Theta = 0;$$

$$R = R_1, \Theta = 1;$$

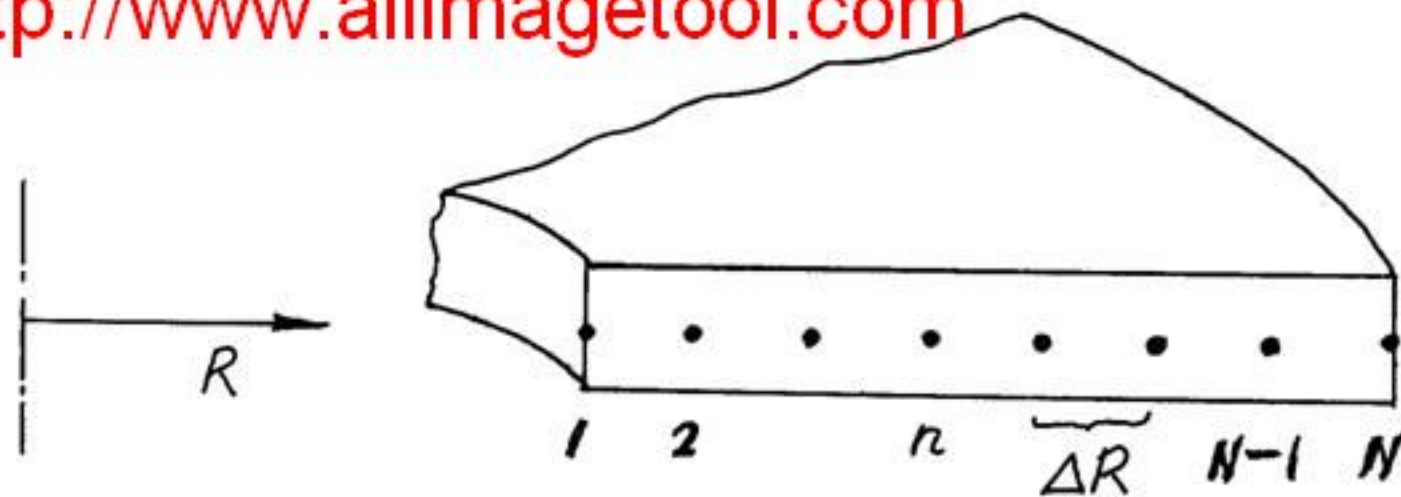
$$R = R_2, \frac{d\Theta}{dR} = 0$$



$$\frac{\Theta_{n+1} - 2\Theta_n + \Theta_{n-1}}{\Delta R^2} + \frac{1}{R_n} \frac{\Theta_{n+1} - \Theta_{n-1}}{2\Delta R} - 2m^2 \Theta_n = 0$$

$$n = 2, 3, \dots, N-1$$

$$\Theta_1 = 1; \quad \Theta_N = \Theta_{N-1}$$



$$\Theta = \frac{t - t_f}{t_0 - t_f} \quad \eta = \frac{\sum_{n=1}^N \Delta A_n \Theta_n h}{\sum_{n=1}^N \Delta A_n \times 1 \times h} = \frac{\sum_{n=1}^N \Delta A_n \Theta_n}{\sum_{n=1}^N \Delta A_n}$$

$$\Delta A_n = 2\pi r_n \Delta R, \quad n = 2, 3 \dots N-1$$

$$\Delta A_1 = 2\pi r_1 \frac{\Delta R}{2} \quad \Delta A_N = 2\pi r_N \frac{\Delta R}{2}$$

数值结果分析

表 4-1 节点数对肋效率的影响($r_2/r_1=2, m=2$)

N	8	16	20	36	64	100
η	0.263 57	0.270 82	0.271 49	0.272 38	0.272 44	0.272 49

网格独立解: $N \geq 36$

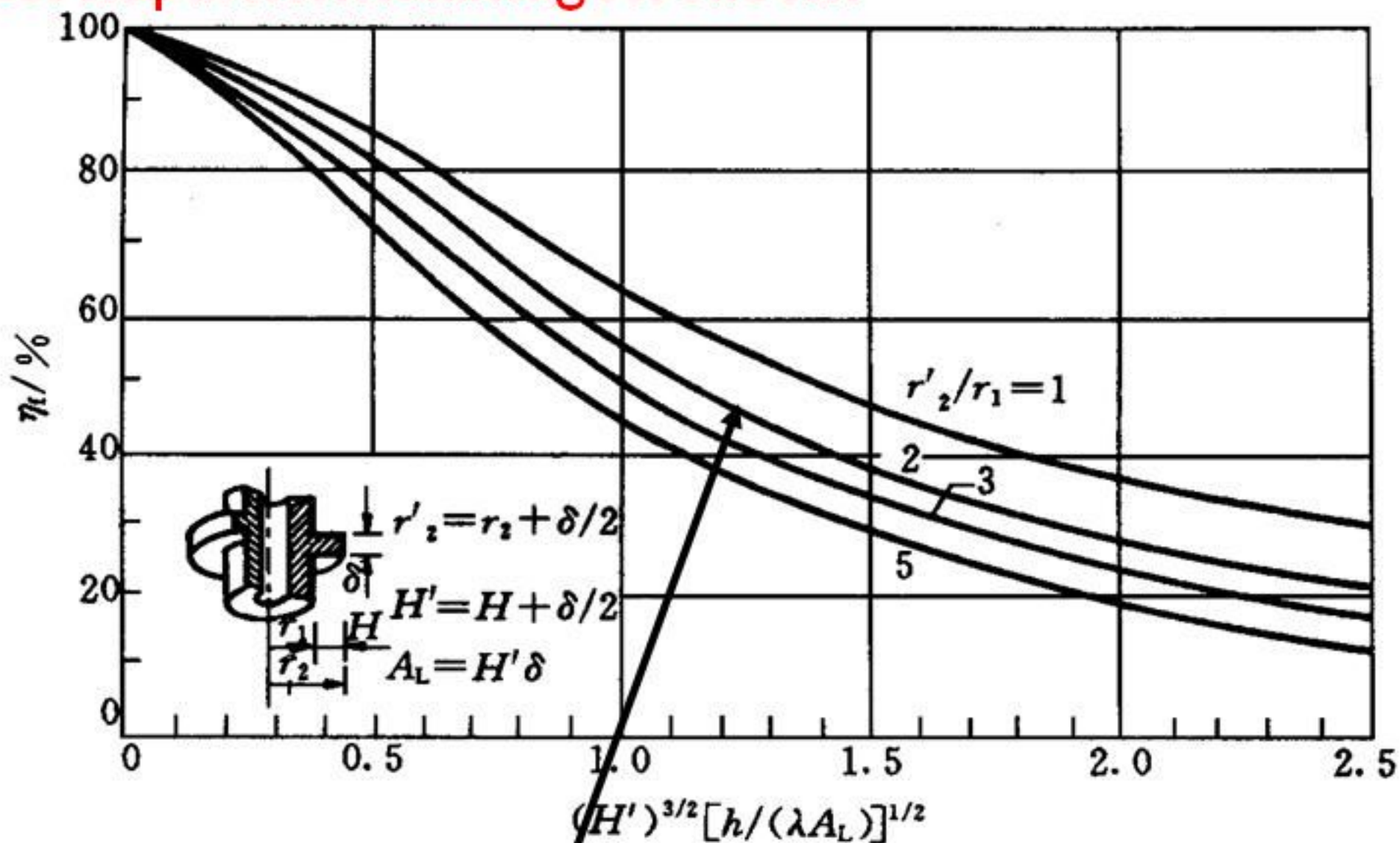
表 4-2 环肋肋效率随 r_2/r_1 及 m 的变化

η r_2/r_1 \ m	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
2	0.991	0.813	0.542	0.370	0.272	0.213
3	0.989	0.781	0.490	0.321	0.230	0.177
4	0.987	0.756	0.454	0.290	0.204	0.154

$$m = \sqrt{\frac{h}{\lambda A_L}} H^{3/2}$$

传热学 Heat Transfer

Website: <http://www.allimagestool.com>

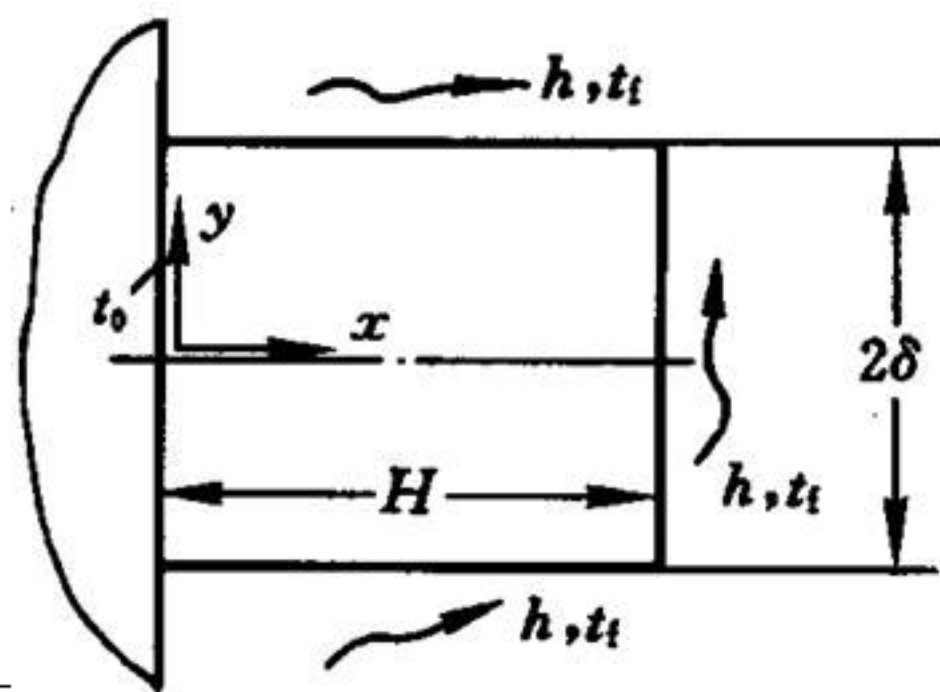


η	m					
r_2/r_1	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
2	0.991	0.813	0.542	0.370	0.272	0.213

Website: <http://www.allimagestool.com>

Example 4-5 短直肋效率的计算

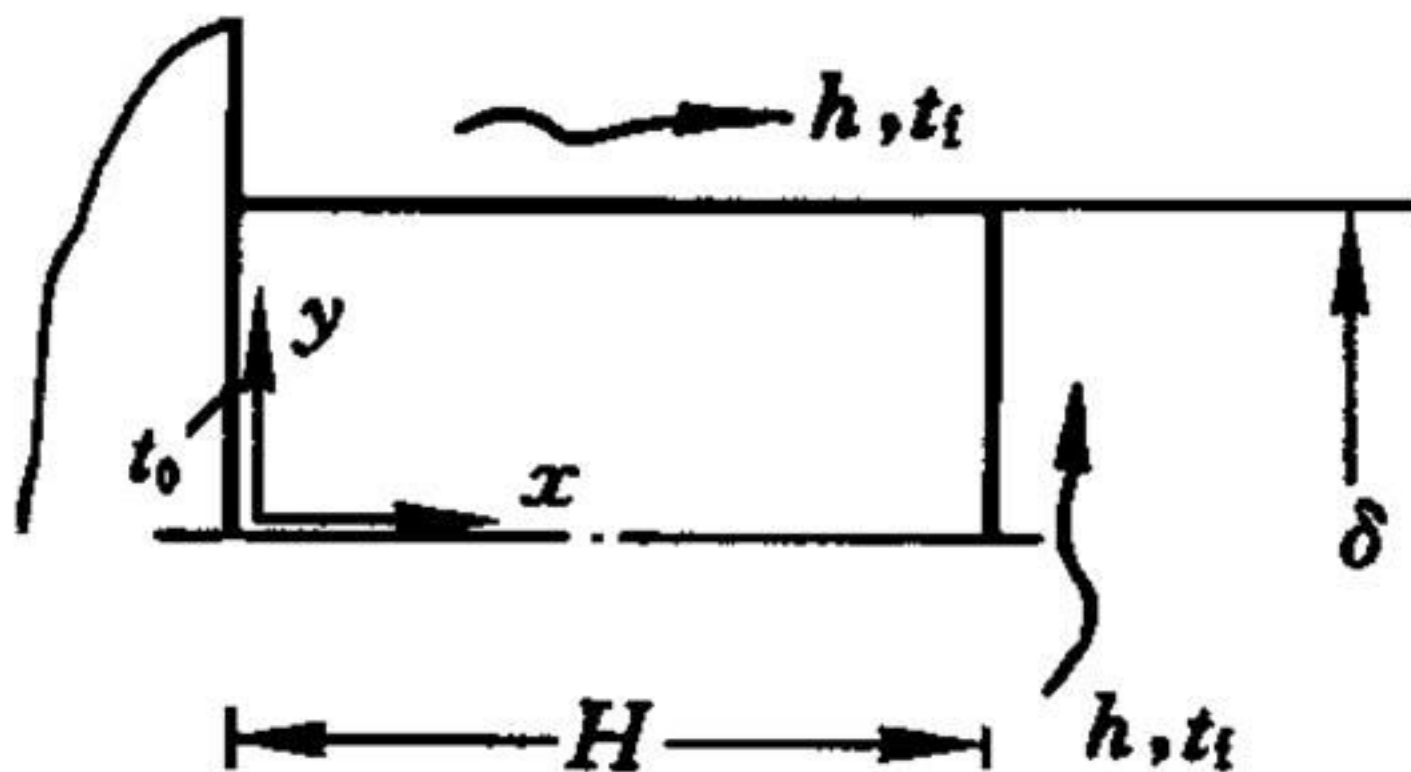
工况	$t_0/^\circ\text{C}$	$t_f/^\circ\text{C}$	$h/[\text{W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})]$	$\lambda/[\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})]$	δ/m	H/m
1	100	20	50	100	0.02	0.04
2	100	20	400	8	0.02	0.08



$$\text{Bi}_1 = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{50 \times 0.02}{100} = 0.01$$

$$\text{Bi}_2 = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{400 \times 0.02}{8} = 1$$

计算区域



离散方程及其种类

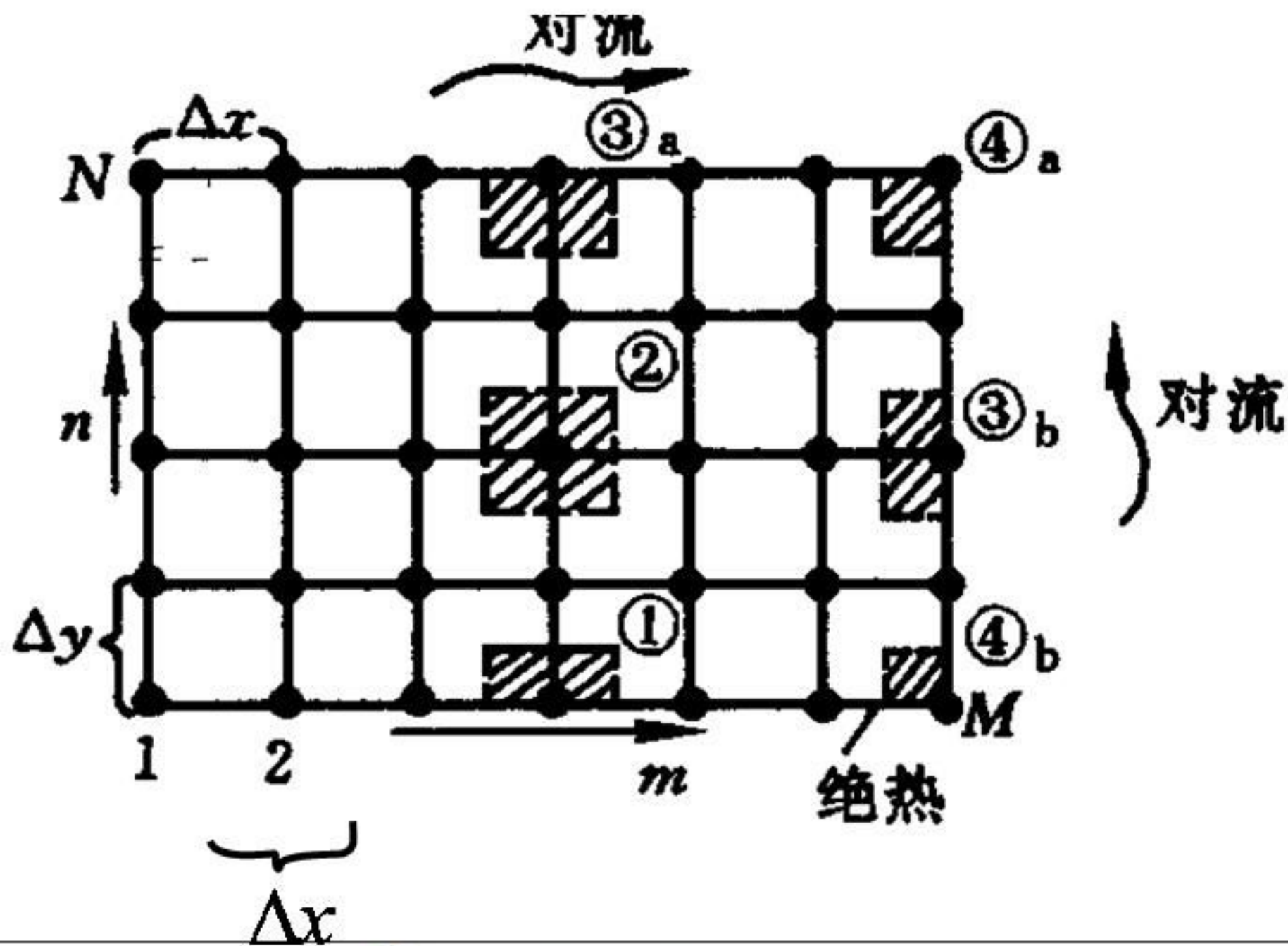
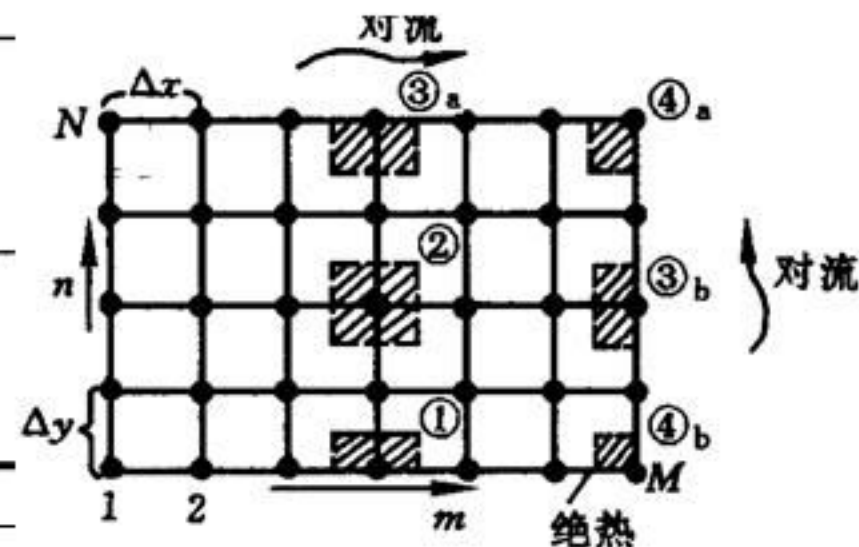


表 4-3 例题 4-6 的节点离散方程

类别	下标变化范围	离散方程
①	$m = 2, \dots, M-1$ $n = 1$	$\theta_{m,1} = \frac{1}{4}(\theta_{m-1,1} + \theta_{m+1,1} + 2\theta_{m,2})$
②	$m = 2, \dots, M-1$ $n = 2, \dots, N-1$	$\theta_{m,n} = \frac{1}{4}(\theta_{m+1,n} + \theta_{m-1,n} + \theta_{m,n+1} + \theta_{m,n-1})$
③ _a	$m = 2, \dots, M-1$ $n = N$	$\theta_{m,N} = \frac{1}{4 + 2Bi_{\Delta}}(\theta_{m-1,N} + \theta_{m+1,N} + 2\theta_{m,N-1})$
③ _b	$m = M$ $n = 2, \dots, N-1$	$\theta_{M,n} = \frac{1}{4 + 2Bi_{\Delta}}(\theta_{M,n+1} + \theta_{M,n-1} + 2\theta_{M-1,n})$
④ _a	$m = M$ $n = N$	$\theta_{M,N} = \frac{1}{2 + 2Bi_{\Delta}}(\theta_{M,N-1} + \theta_{M-1,N})$
④ _b	$m = M$ $n = 1$	$\theta_{M,1} = \frac{1}{2 + Bi_{\Delta}}(\theta_{M-1,1} + \theta_{M,2})$



Website: <http://www.allimagestool.com>

- Computation of fin efficiency

$$\eta = \frac{0.5(\theta_{1,N} + \theta_{M,1}) + \sum_{m=2}^M \theta_{m,N} + \sum_{n=2}^{N-1} \theta_{M,n}}{[(M-1) + (N-1)]\theta_0}$$

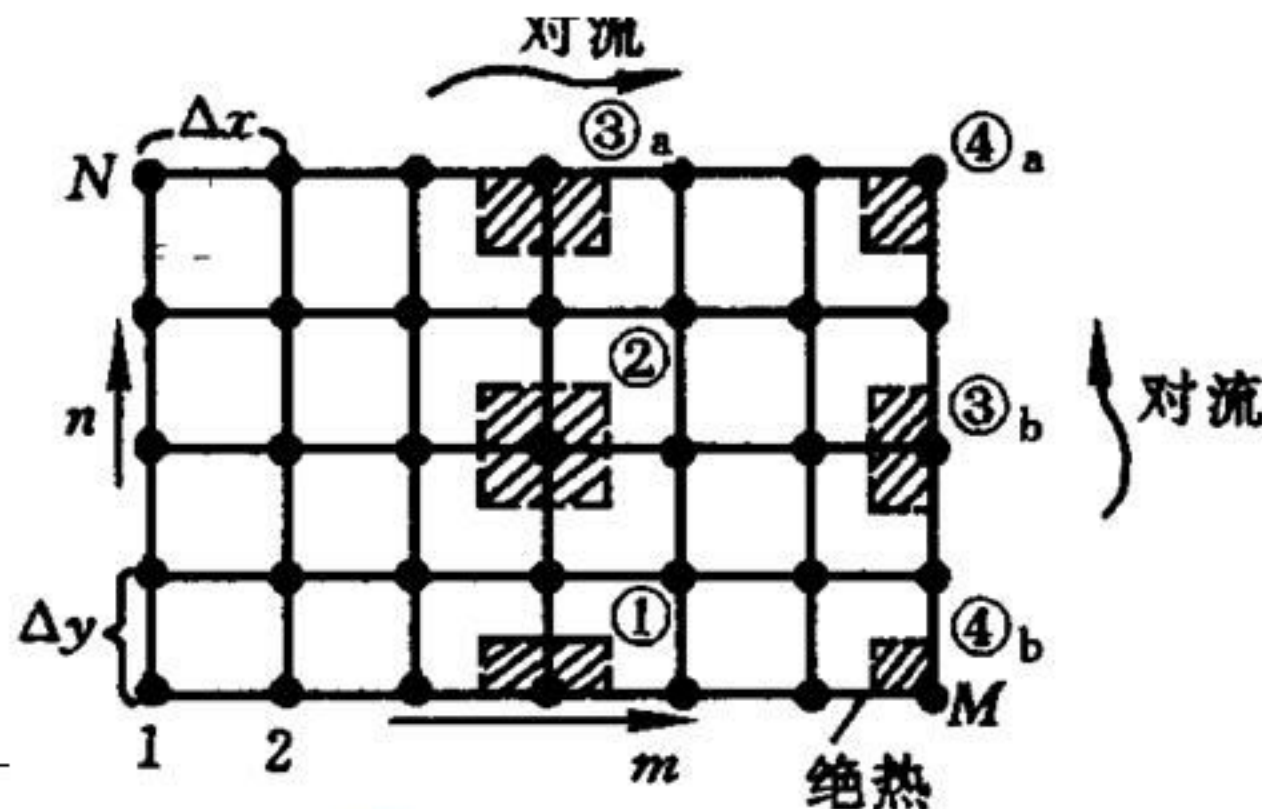
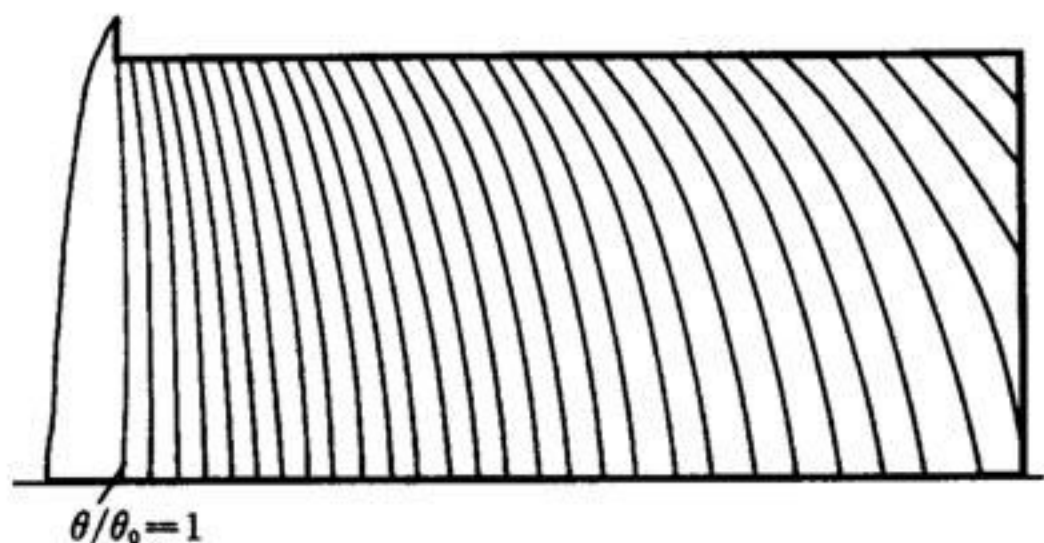
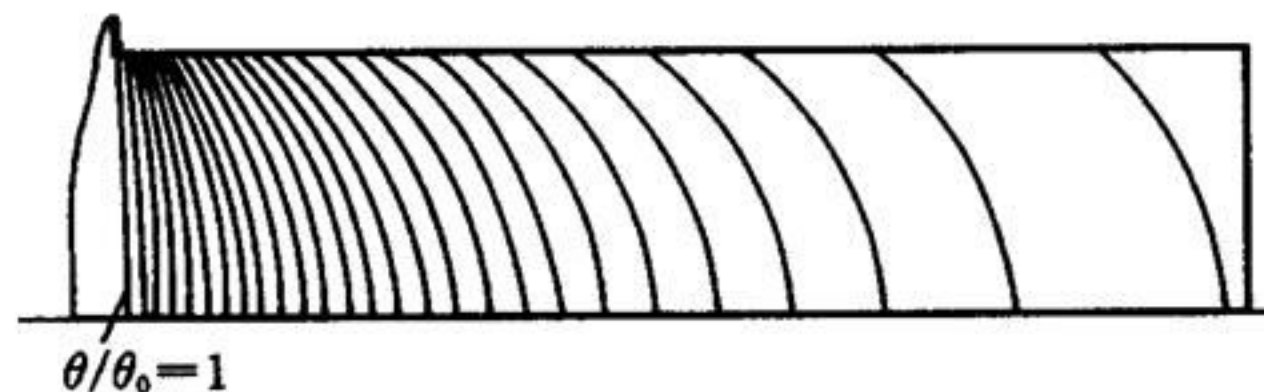


表 4-4 肋效率的数值计算结果

工况	节点数 $M \times N$	Bi	二维数值计算的 η 值	按一维计算的 η 值	相对偏差
1	9×5	0.01	0.973	0.971	0.21%
2	17×5	1.0	0.186	0.206	10.8%



(a) 工况1 ($Bi=0.01$)



(b) 工况2 ($Bi=1.0$)

小结

- 1.应用条件:

(1) 物体几何形状复杂;

(2) 物体的热物性是温度的函数

eg: $\lambda \sim \lambda(t)$

(3) 边界条件复杂

eg: 对辐射边界条件有 $q \propto T^4$

(4) 物理过程复杂

Website: <http://www.allimagestool.com>

- 2. 应用热平衡法建立离散方程: 包括边界节点和内节点（有限差分法）。

eg: 对不均匀网格有

• 3.数值求解方法的讨论:

稳定性:
$$F_o \leq \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

收敛性: 主对角线占优

精度: 离散格式的截断误差: 空间导数二阶
时间导数一阶

本章作业

4-3、4-5、4-6、4-9、4-10