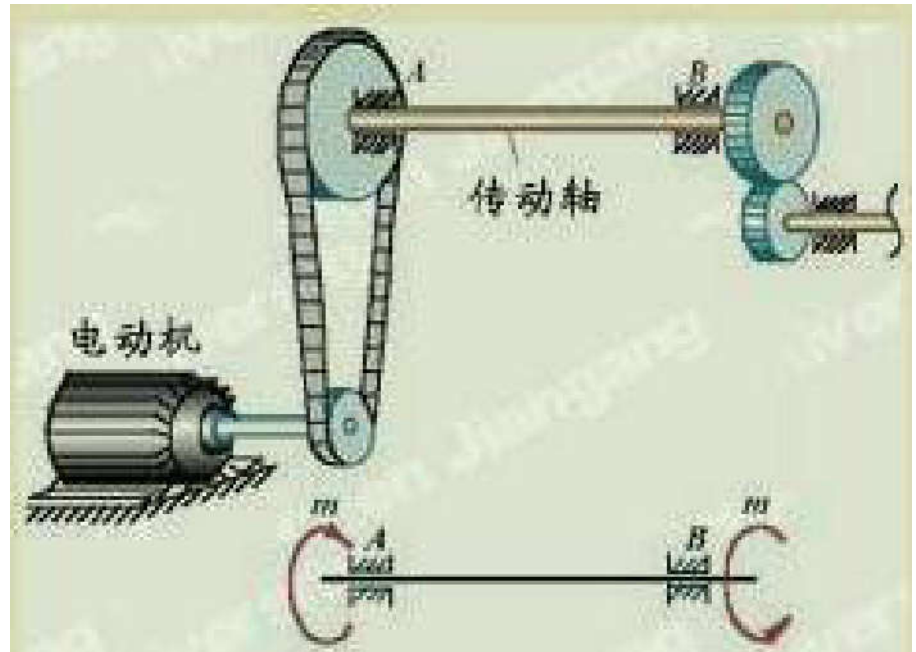
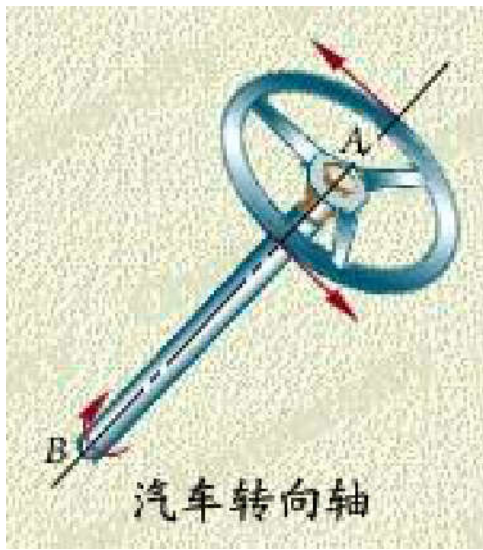


# 第九章

## 扭转与剪切

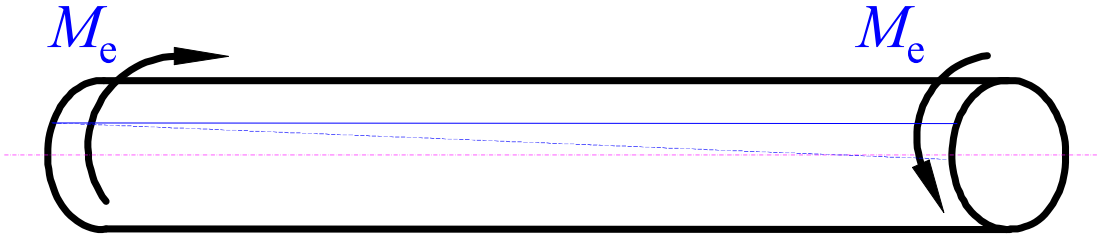
## § 8-1 外力偶矩、扭矩及扭矩图



实际构件工作时除发生扭转变形外，还常伴随有弯曲、拉压等其他变形。

受力特点:

圆截面直杆受到一对大小相等、转向相反、作用面垂直于杆的轴线的 $M_e$ 作用

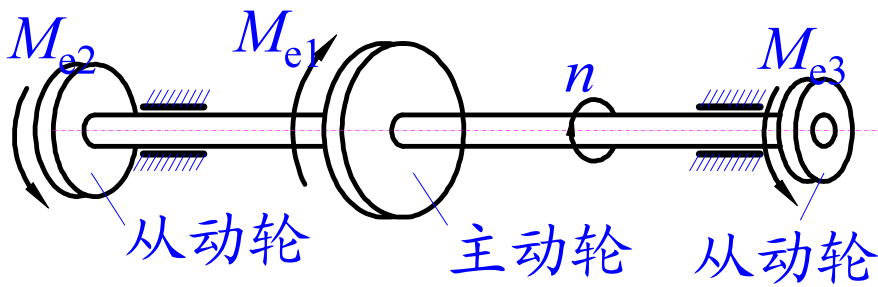


变形特点:

1. 圆杆各横截面绕杆的轴线作相对转动;
2. 杆表面上的纵向线变成螺旋线。

## I、传动轴的外力偶矩

已知:



传动轴的转速  $n$  ;  
某一轮上所传递的  
功率  $P$  (kW)

求: 作用在该轮上的外力偶矩  $M_e$ 。

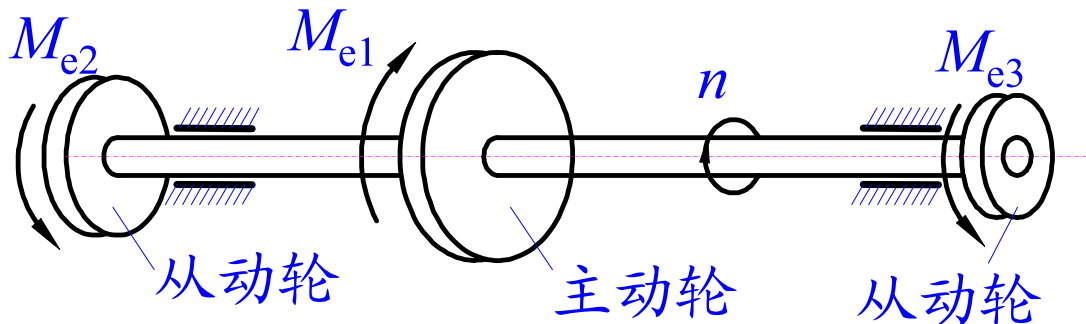
一分钟内该轮所传递的功率等于其上外力  
偶矩所作的功:

$$P \times 60 \times 10^3 \text{ (J)} = M_e \times 2\pi n \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$$P \times 60 \times 10^3 (\text{J}) = M_e \times 2\pi n (\text{N} \cdot \text{m})$$

传动轮的转速 $n$ 、功率 $P$ 及其上的外力偶矩 $M_e$ 之间的关系:

$$M_e = \frac{P \times 10^3 \times 60}{2\pi n} = 9549 \frac{P}{n} (\text{N} \cdot \text{m})$$

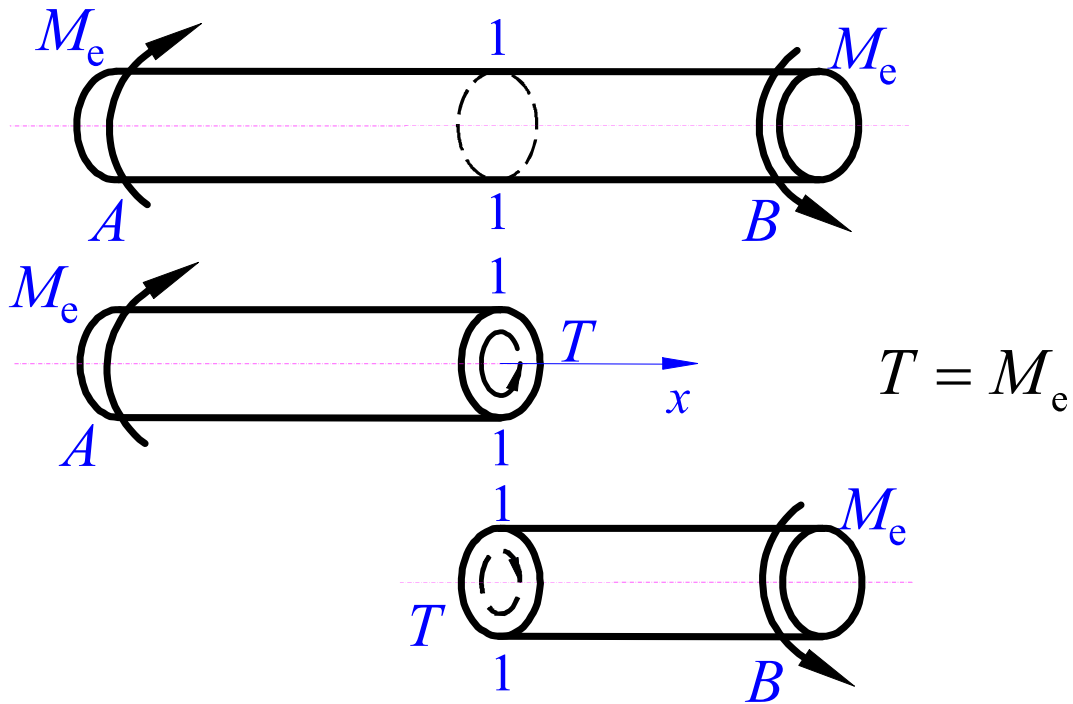


主动轮上的外力偶矩转向与传动轴的转向相同，从动轮上的外力偶矩转向与传动轴的转向相反。

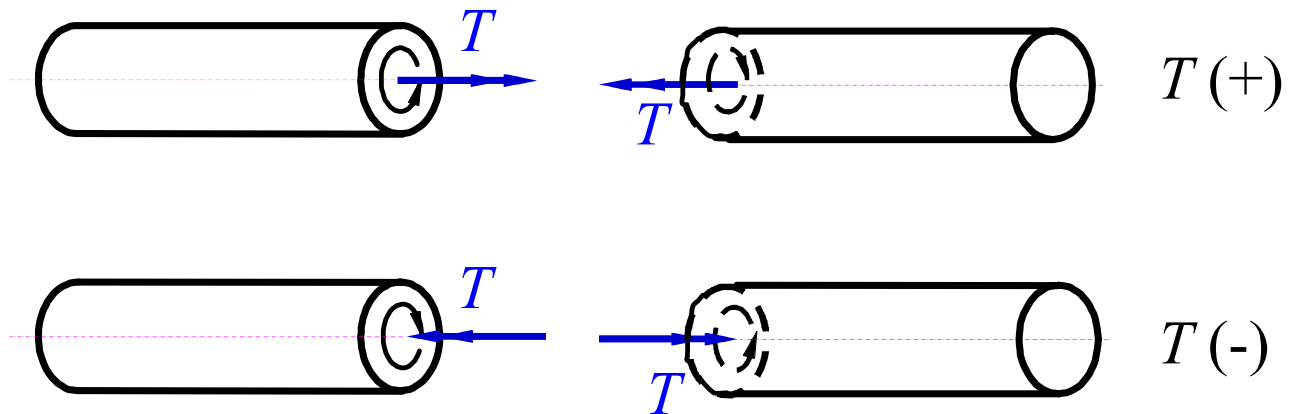
## II、扭矩及扭矩图

圆轴受扭时其横截面上的内力偶矩称为**扭矩**，用符号 $T$ 表示。

扭矩大小可利用**截面法**来确定。

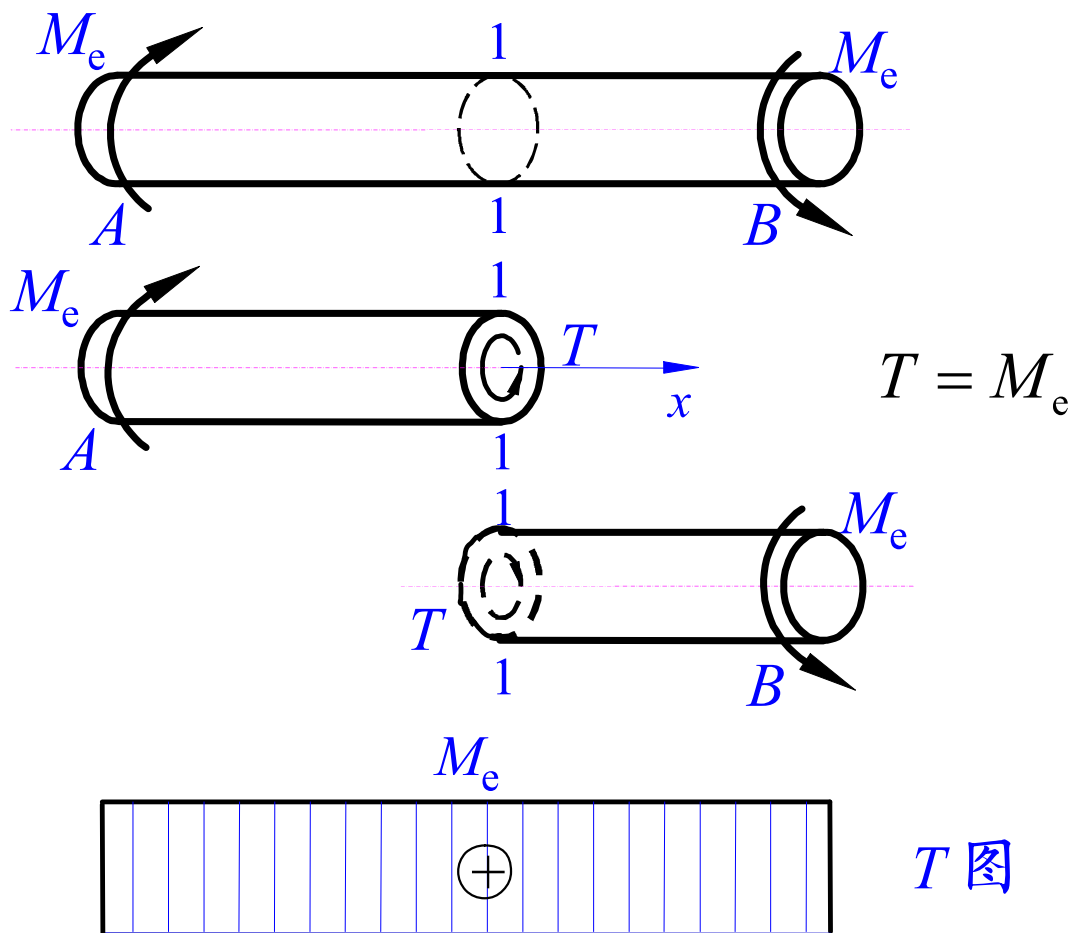


扭矩的符号规定 —— 按右手螺旋法则确定：  
扭矩矢量离开截面为正，指向截面为负。



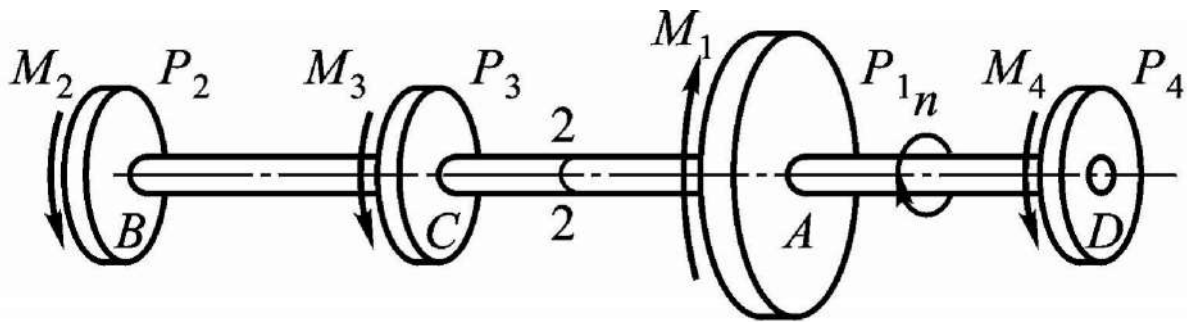
仿照轴力图的做法，可作**扭矩图**，表明沿杆轴线各横截面上扭矩的变化情况。

# 材料力学

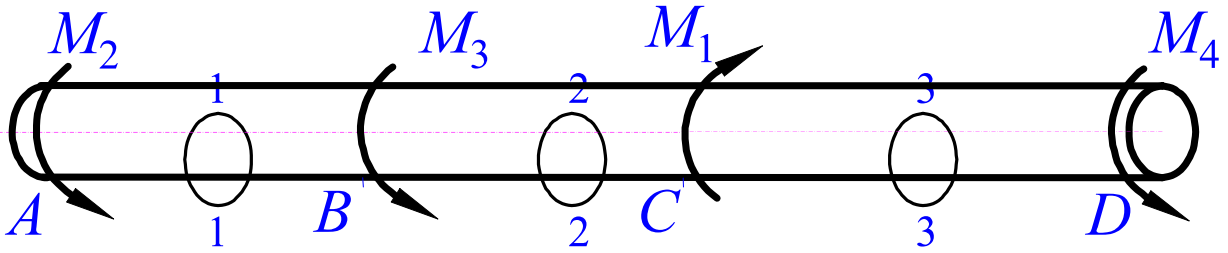




例：一传动轴如图，转速 $n = 300\text{r/min}$ ；主动轮输入的功率 $P_1 = 500\text{kW}$ ，三个从动轮输出的功率分别为： $P_2 = 150\text{kW}$ ， $P_3 = 150\text{kW}$ ， $P_4 = 200\text{kW}$ 。试作轴的扭矩图。



解： 首先必须计算作用在各轮上的外力偶矩



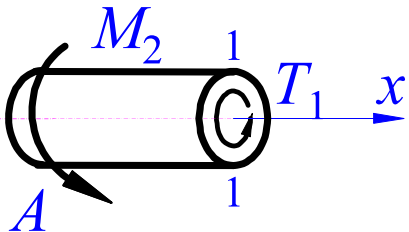
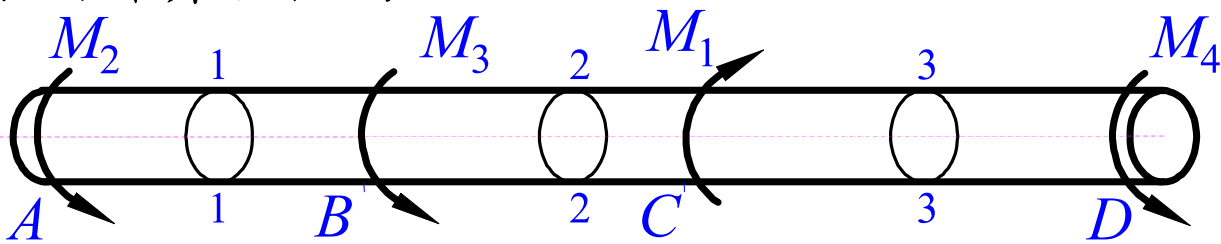
$$M_1 = (9.55 \times 10^3 \times \frac{500}{300}) \text{N} \cdot \text{m} = 15.9 \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = M_3 = (9.55 \times 10^3 \times \frac{150}{100}) \text{N} \cdot \text{m} = 4.78 \text{kN} \cdot \text{m}$$

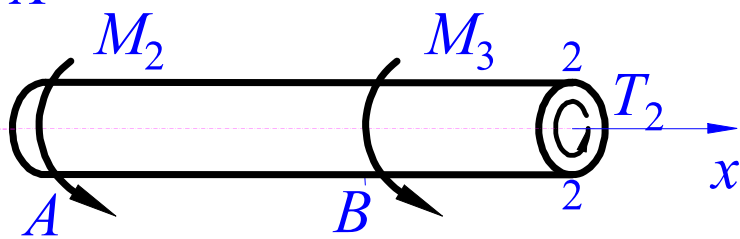
$$M_4 = (9.55 \times 10^3 \times \frac{200}{300}) \text{N} \cdot \text{m} = 6.37 \text{kN} \cdot \text{m}$$

# 材料力学

分别计算各段的扭矩

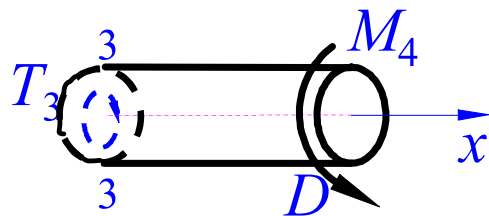


$$T_1 = -M_2 = -4.78 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



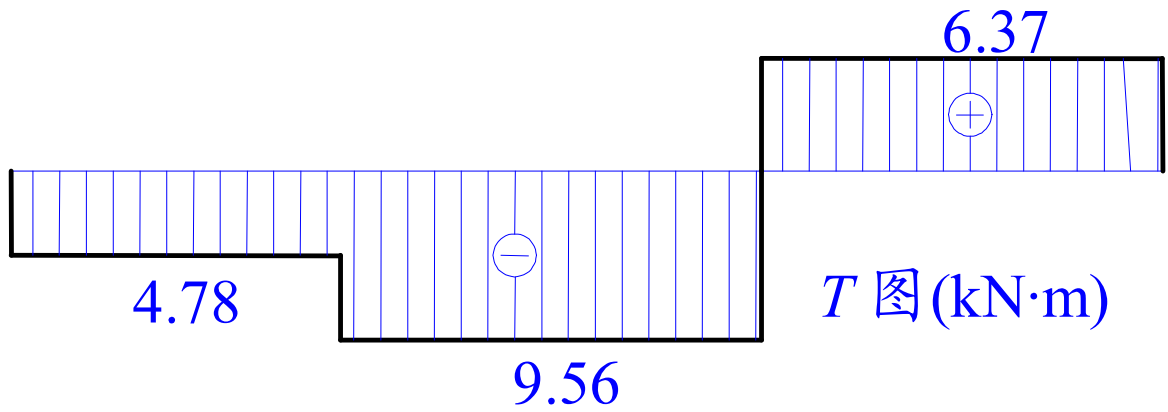
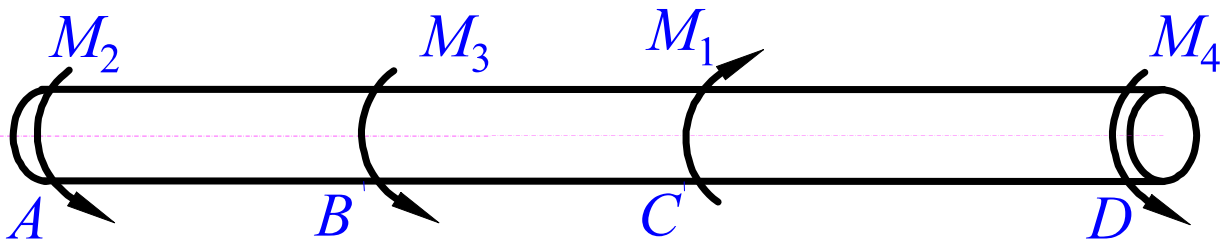
$$T_2 = -(M_2 + M_3) \\ = -9.56 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$T_3 = M_4 = 6.37 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



# 材料力学

## 扭矩图



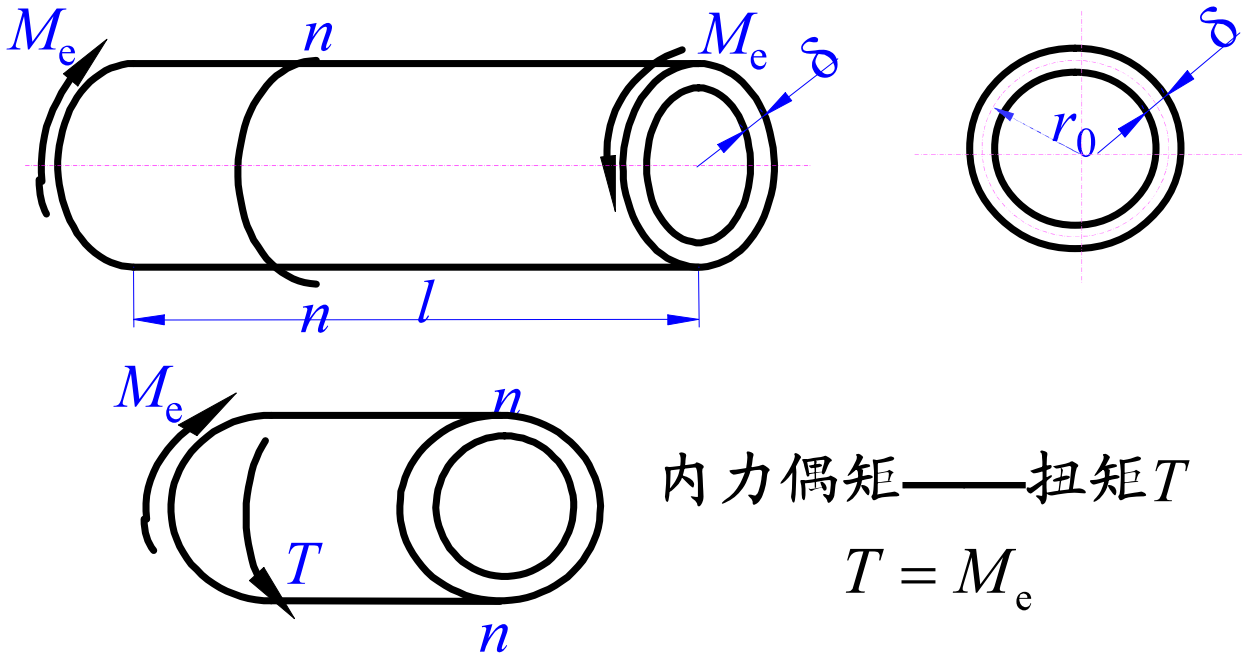
$$T_{\max} = 9.56 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

在CA段内

## § 8-2 圆轴扭转时强度计算

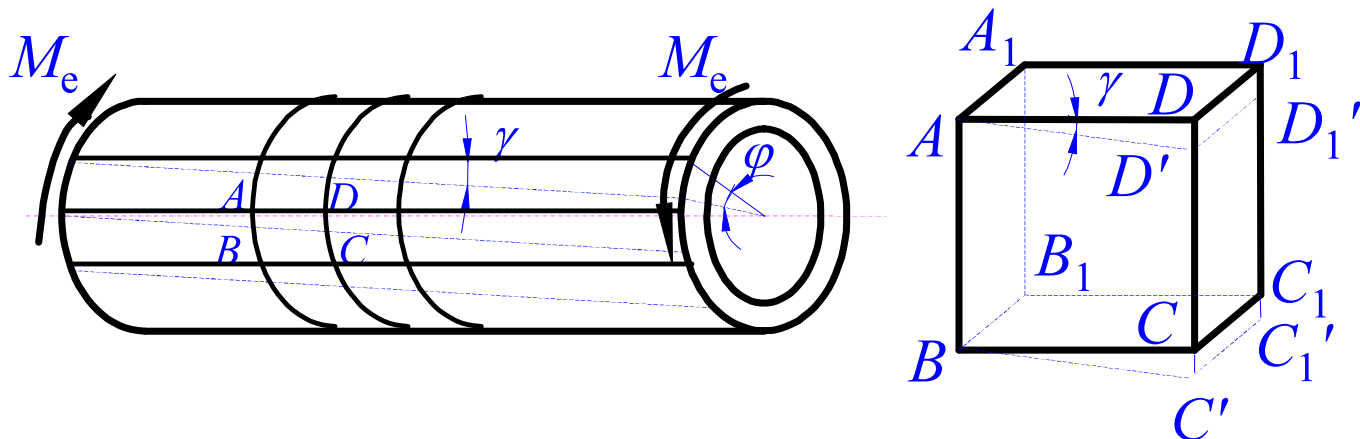
### 一、薄壁圆筒扭转

薄壁圆筒 —— 通常指  $\delta \leq \frac{r_0}{10}$  的圆筒，可假定其应力沿壁厚方向均匀分布



# 材料力学

薄壁圆筒受扭时变形情况:



表面正方格子倾斜的角度—  
直角的改变量  $\gamma$

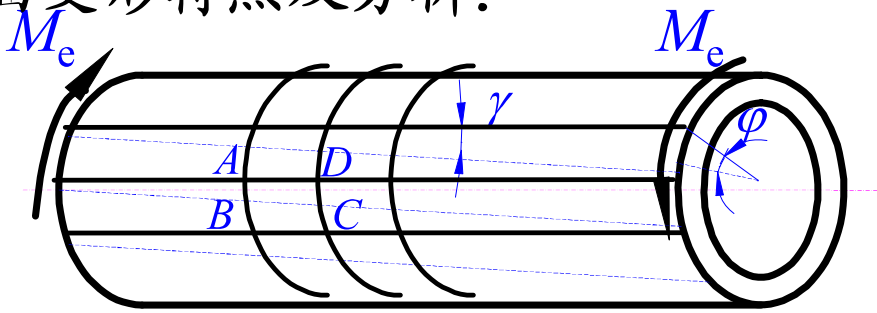
$\Rightarrow$  切应变  $\gamma$

圆筒两端截面之间相对转过  
的圆心角  $\varphi$

$\Rightarrow$  相对扭转角  $\varphi$

$$r \times \varphi = l \times \tan \gamma \approx l \times \gamma \quad \text{即} \quad \gamma = \varphi r / l$$

表面变形特点及分析:



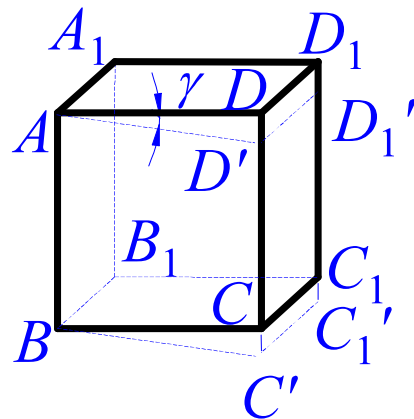
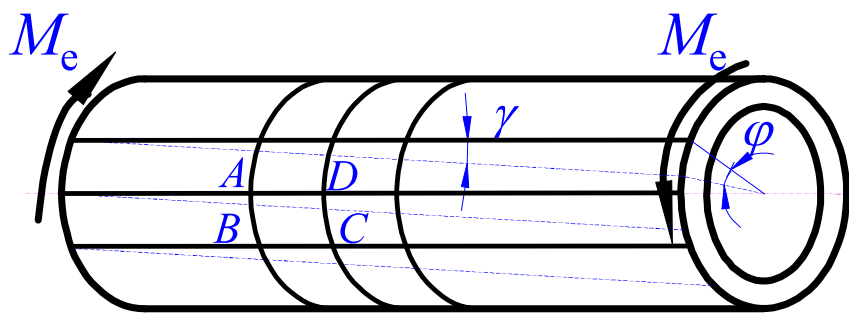
圆周线只是绕圆筒轴线转动，其形状、大小、间距不变；

——横截面在变形前后都保持为形状、大小未改变的平面，没有正应力产生

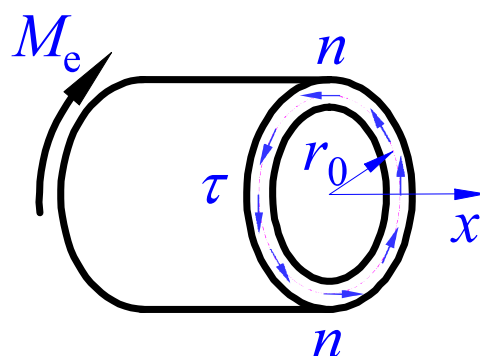
所有纵向线发生倾斜且倾斜程度相同。

——横截面上有与圆轴相切的切应力且沿圆筒周向均匀分布

薄壁圆筒横截面上应力的分布规律分析:



- 1、横截面上无正应力;
- 2、只有与圆周相切的切应力,且沿圆筒周向均匀分布;
- 3、对于薄壁圆筒,可认为切应力沿壁厚也均匀分布。

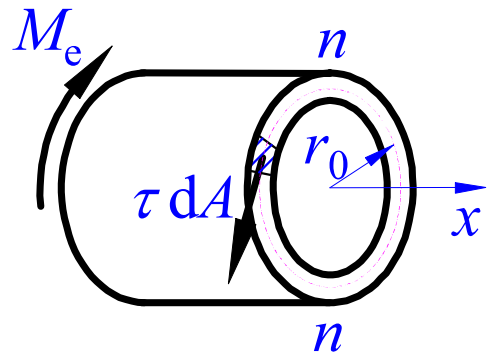




# 材料力学

薄壁圆筒横截面上切应力的计算公式:

静力学条件  $\int_A \tau dA \times r_0 = T$



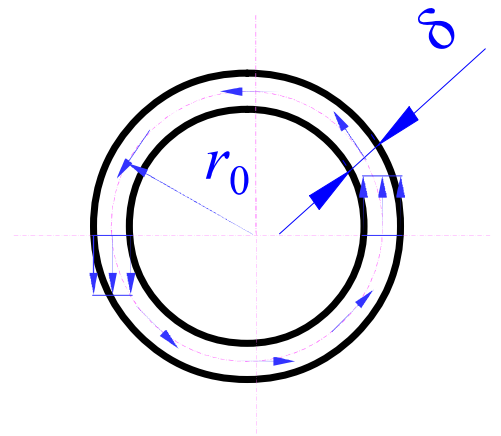
因薄壁圆环横截面上各点处的切应力相等

$$T = \tau r_0 \int_A dA = \tau r_0 A$$

$$A = 2\pi r_0 \delta$$

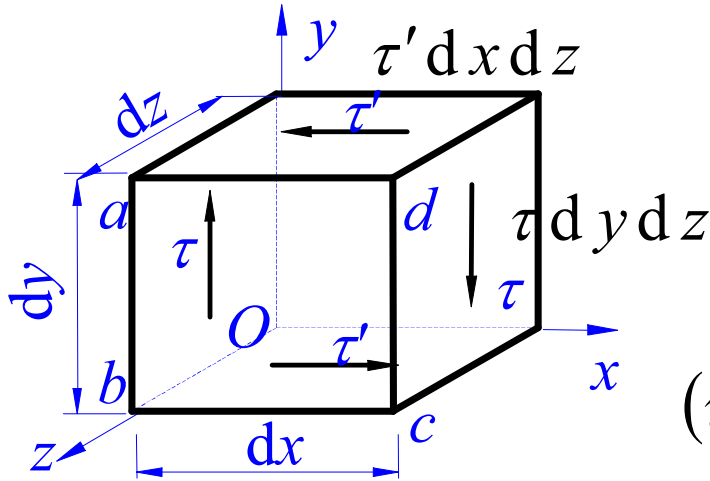
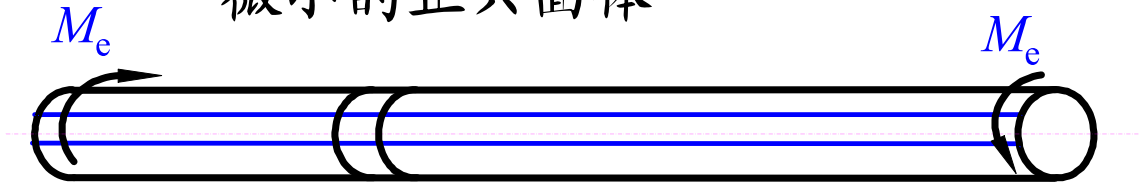
得

$$\tau = \frac{T}{r_0 A} = \frac{T}{2\pi r_0^2 \delta}$$



## 二、剪应力互等定理

单元体——此处为以横截面、径截面以及与表面平行的面从受扭的等直圆杆表面处截取一微小的正六面体



$$\sum F_y = 0 \quad \text{自动满足}$$

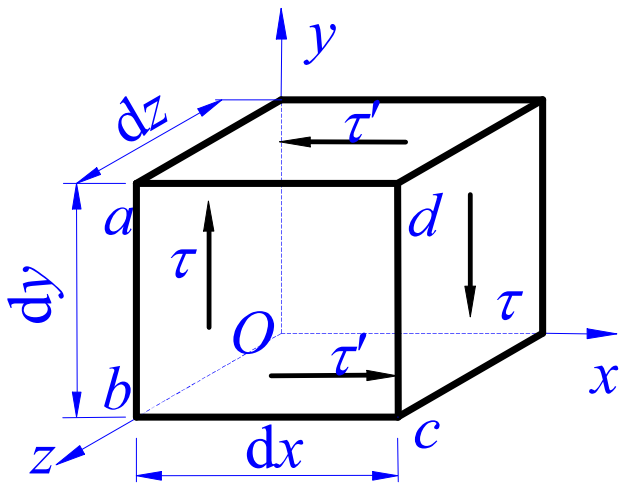
$$\sum F_x = 0 \quad \text{存在 } \tau'$$

$$\sum M_z = 0$$

$$(\tau dy dz) dx = (\tau' dx dz) dy$$

$$\text{得} \quad \tau' = \tau$$

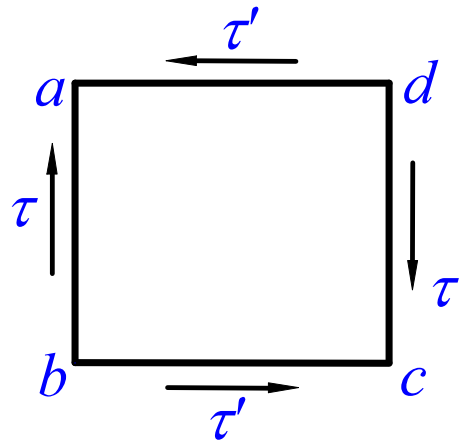
## 切应力互等定理



$$\tau = \tau'$$

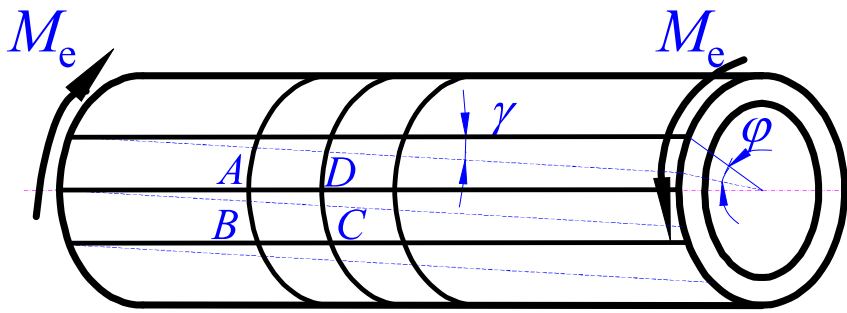
单元体的两个相互垂直的截面上，与该两个面的交线垂直的切应力数值相等，且均指向（或背离）两截面的交线。

单元体在其两对互相垂直的平面上只有切应力而无正应力的状态称为**纯剪切应力状态**。



# 材料力学

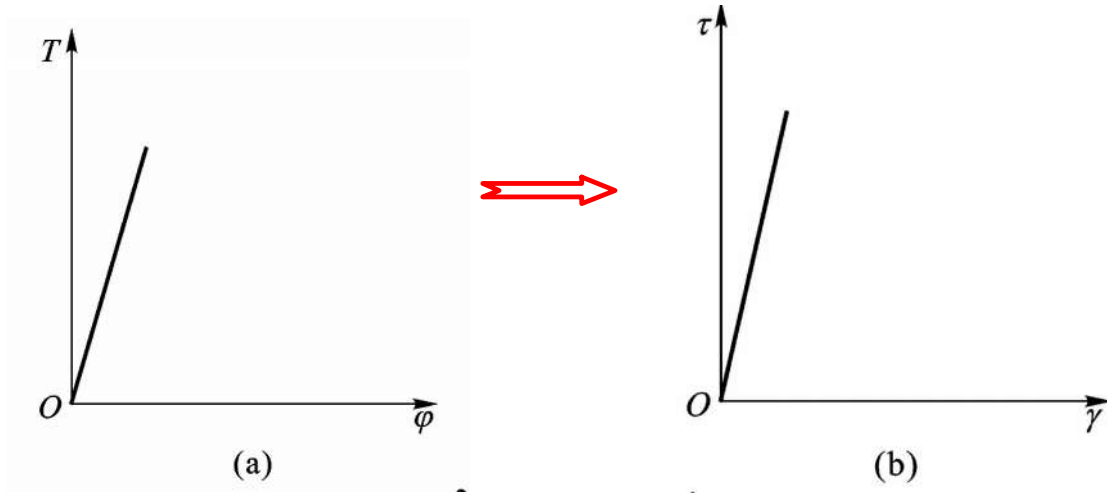
## 三、剪切胡克定律



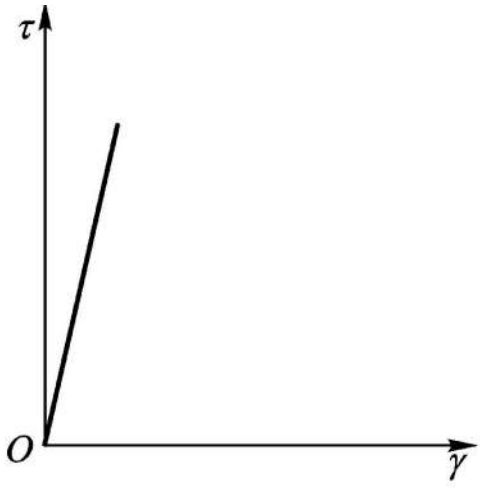
由前述推导可知

$$\gamma = \varphi r_0 / l$$
$$\tau = \frac{T}{2\pi r_0^2 \delta}$$

### 薄壁圆筒的扭转实验曲线



# 材料力学



即  $\tau \leq \tau_p$  时

$$\tau = G\gamma$$

这就是剪切胡克定律

其中： $G$ ——材料的切变模量

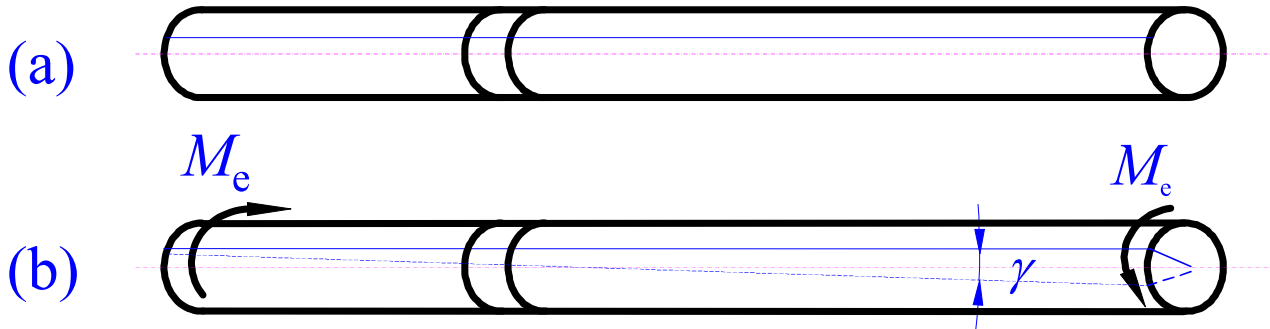
$\tau_p$ ——剪切比例极限

钢材的切变模量值约为： $G = 80\text{GPa}$

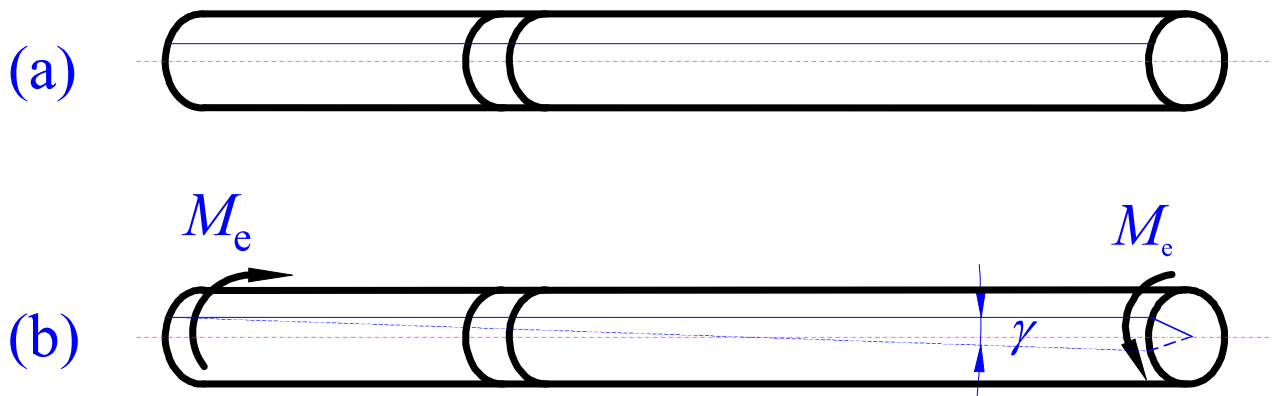
## 四、圆轴扭转时横截面上应力计算

### I、横截面上的应力

几何方面——表面变形情况



相邻圆周线绕杆的轴线相对转动，但圆周的大小、形状、间距都未变；  
纵向线倾斜了同一个角度 $\gamma$ ，表面上所有矩形均变成平行四边形。



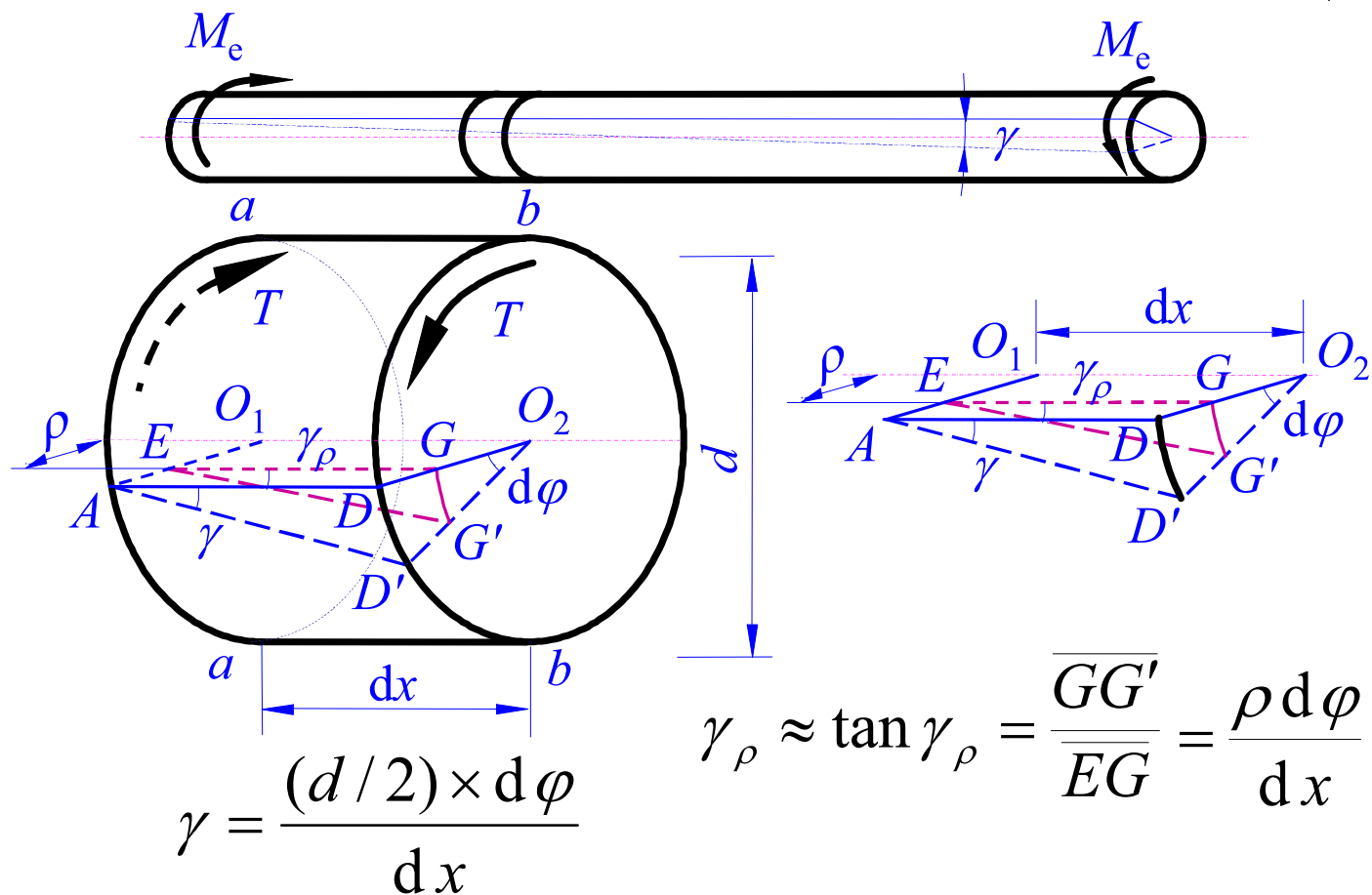
## 平面假设

等直圆杆受扭转时其横截面如同刚性平面一样绕杆的轴线转动。

推论：

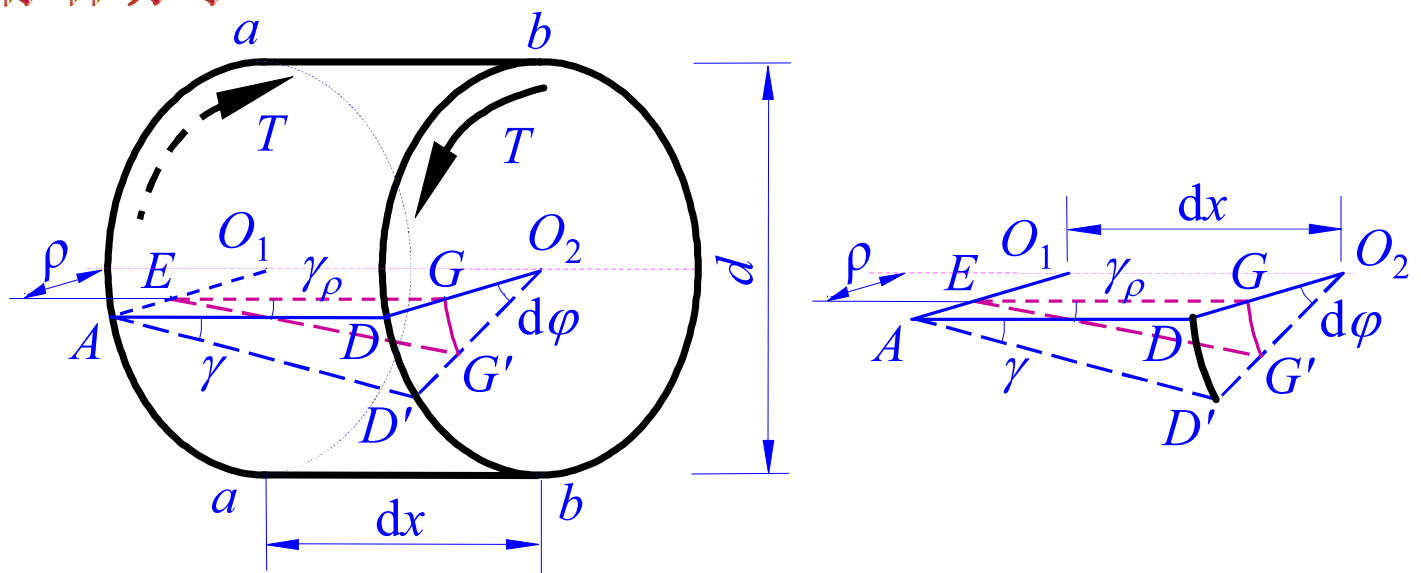
杆的横截面上只有垂直于半径的切应力，没有正应力产生。

横截面上任一点处的切应变随点的位置的变化规律





# 材料力学



即  $\gamma_{\rho} = \rho \frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \gamma_{\rho} \propto \rho$

$\frac{d\varphi}{dx}$  — 相对扭转角沿杆长的变化率，对于给定的横截面为常量

# 材料力学

物理方面

剪切胡克定律

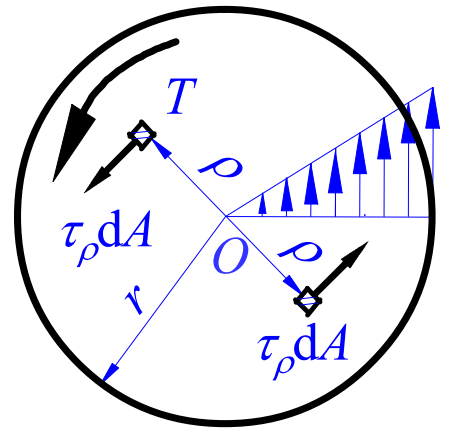
$$\left. \begin{aligned} \tau &= G\gamma \\ \gamma_\rho &= \rho \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned} \right\} \tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \tau_\rho \propto \rho$$

静力学方面

$$\int_A \rho \tau_\rho dA = T \Rightarrow G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA = T$$

令  $I_p = \int_A \rho^2 dA$  称为横截面的极惯性矩

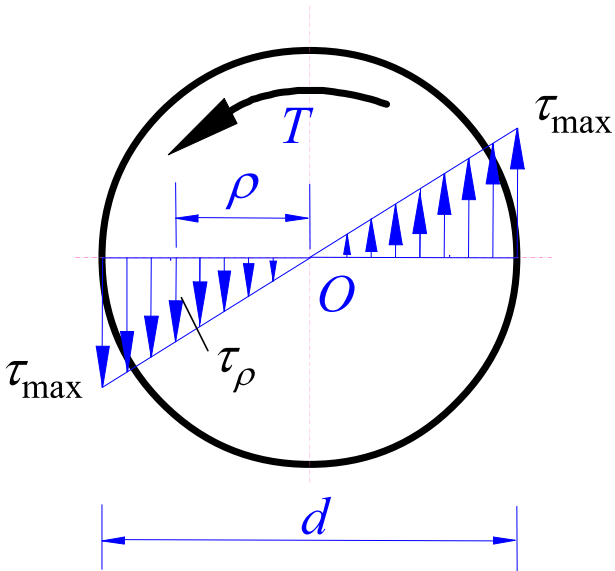
得 
$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$$



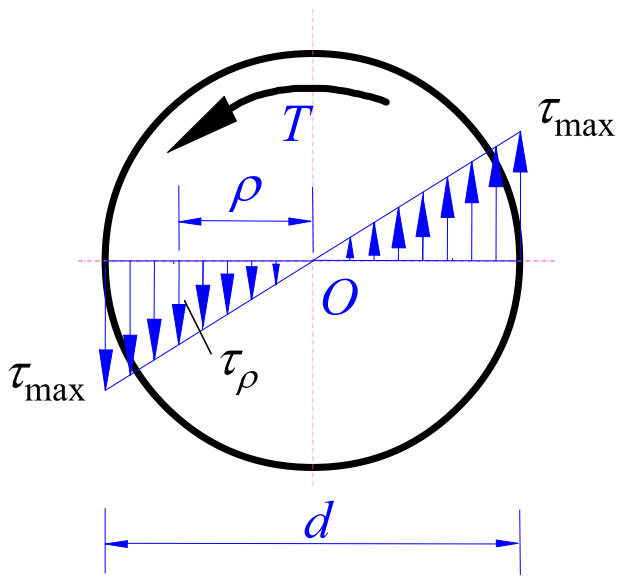
# 材料力学

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{T}{GI_p} \\ \tau_\rho &= G\rho \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned} \right\} \tau_\rho = G\rho \left( \frac{T}{GI_p} \right) = \frac{T\rho}{I_p}$$

等直圆杆扭转时横截面上切应力计算公式



$$\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p}$$



最大切应力  $\rho = r$

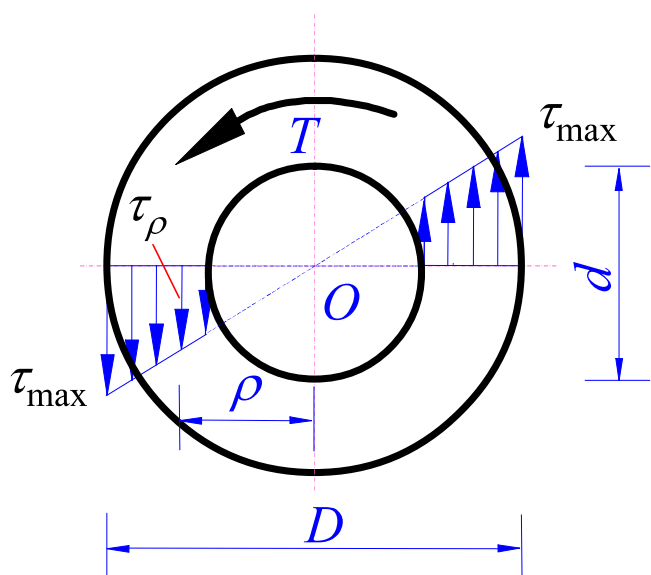
$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{I_p} = \frac{T}{\underbrace{I_p / r}} = \frac{T}{W_p}$$

令  $W_p = \frac{I_p}{r}$  称为扭转截面系数

即 
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$$

发生在横截面周边上各点处。

同样适用于空心圆截面杆受扭的情形

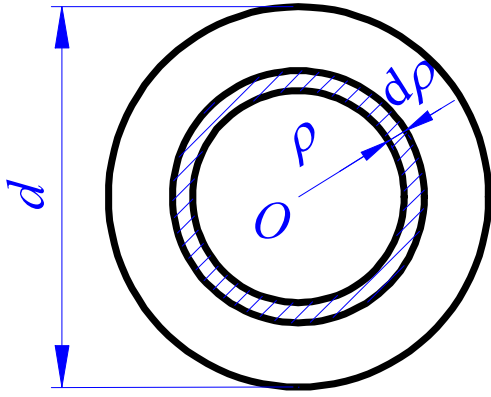


$$\tau_{\rho} = \frac{T\rho}{I_p}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$$

圆截面的极惯性矩 $I_p$ 和扭转截面系数 $W_p$  — 几何性质

实心圆截面:



$$dA = 2\pi\rho d\rho$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 (2\pi\rho d\rho)$$

$$= 2\pi \left( \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$W_p = \frac{I_p}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}$$

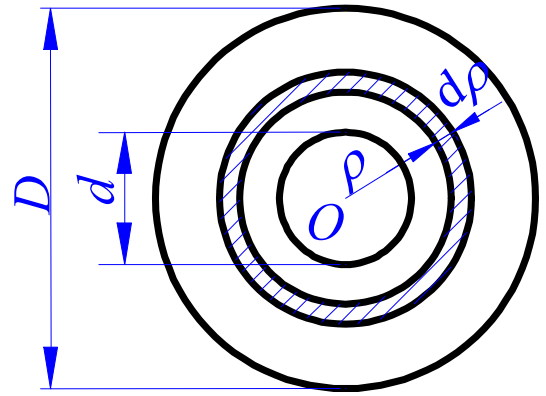
空心圆截面:

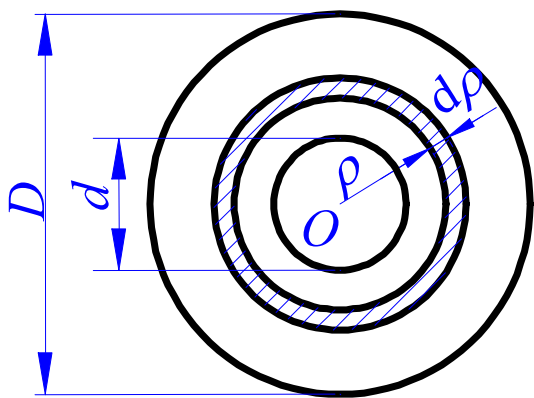
$$I_p = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} 2\pi\rho^3 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \quad \alpha = \frac{d}{D}$$

$$= \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$$

$$W_p = \frac{I_p}{D/2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$





注意：对于空心圆截面

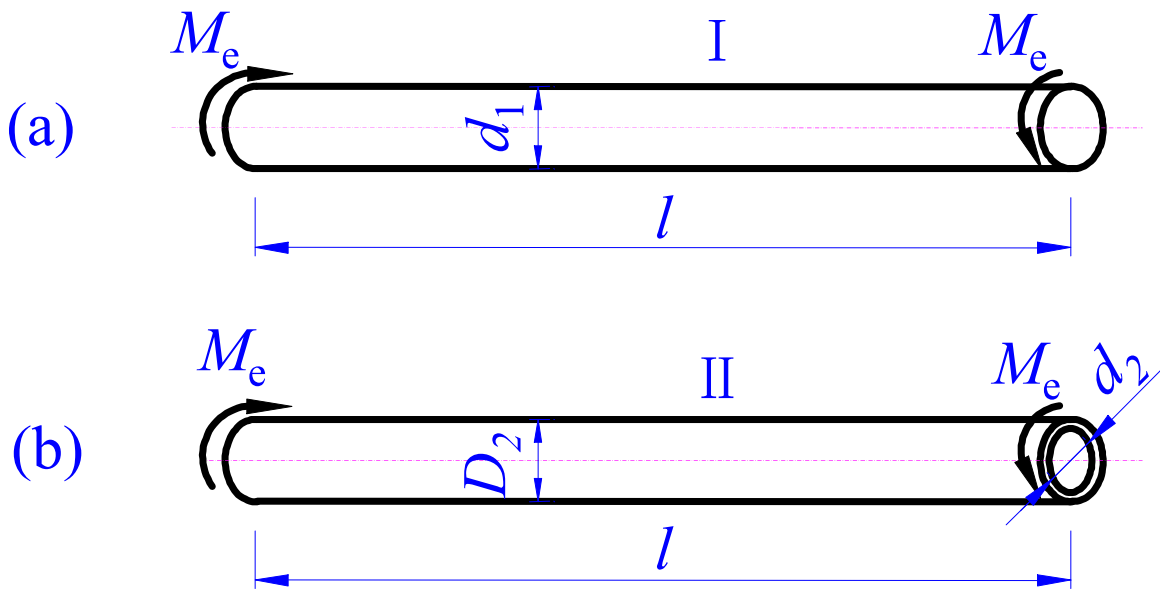
$$I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

$$W_p \neq \frac{\pi}{16} (D^3 - d^3)$$



# 材料力学

例 实心圆截面轴 I 和空心圆截面轴 II ( $\alpha = d_2/D_2 = 0.8$ ) 的材料、扭转力偶矩  $M_e$  和长度  $l$  均相同。试求在两圆轴横截面上最大切应力相等的情况下,  $D_2/d_1$  之比以及两轴的重量比。



# 材料力学

$$\text{解: } W_{p1} = \frac{\pi d_1^3}{16} \quad W_{p2} = \frac{\pi D_2^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

$$\tau_{1,\max} = \frac{T_1}{W_{p1}} = \frac{M_e}{W_{p1}} = \frac{16M_e}{\pi d_1^3}$$

$$\tau_{2,\max} = \frac{T_2}{W_{p2}} = \frac{M_e}{W_{p2}} = \frac{16M_e}{\pi D_2^3 (1 - \alpha^4)}$$

$$\tau_{1,\max} = \tau_{2,\max}$$

已知  $\alpha = 0.8$

得  $\frac{D_2}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{1}{1 - 0.8^4}} = 1.194$

两轴的重量比

$$\begin{aligned}\frac{W_2}{W_1} &= \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{\pi}{4}(D_2^2 - d_2^2)}{\frac{\pi}{4}d_1^2} = \frac{D_2^2(1 - \alpha^2)}{d_1^2} \\ &= 1.194^2 \times (1 - 0.8^2) = 0.512\end{aligned}$$

可见空心圆轴的自重比实心圆轴轻。

讨论:

为什么说空心圆轴比实心圆轴更适合于做受扭构件?

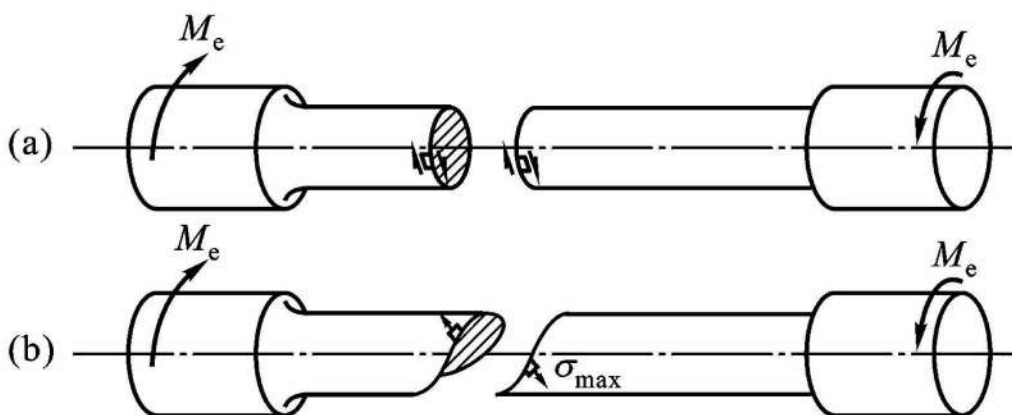
## 五、圆轴扭转时强度条件

强度条件

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \Rightarrow \text{材料的许用切应力}$$

等直圆轴

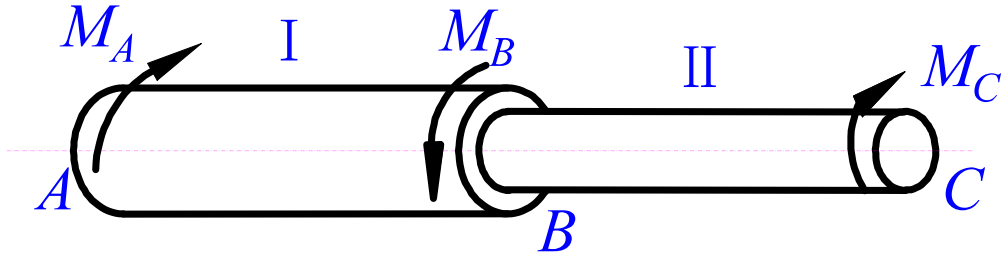
$$\frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau]$$



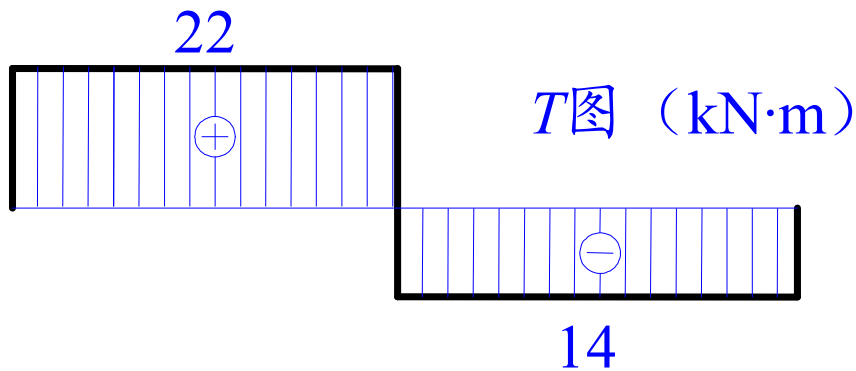
$$\sigma_{\max} = \tau$$

# 材料力学

例 图示阶梯状圆轴， $AB$ 段直径  $d_1=120\text{mm}$ ， $BC$ 段直径  $d_2=100\text{mm}$ 。扭转力偶矩  $M_A=22\text{ kN}\cdot\text{m}$ ， $M_B=36\text{ kN}\cdot\text{m}$ ， $M_C=14\text{ kN}\cdot\text{m}$ 。材料的许用切应力  $[\tau]=80\text{MPa}$ ，试校核该轴的强度。

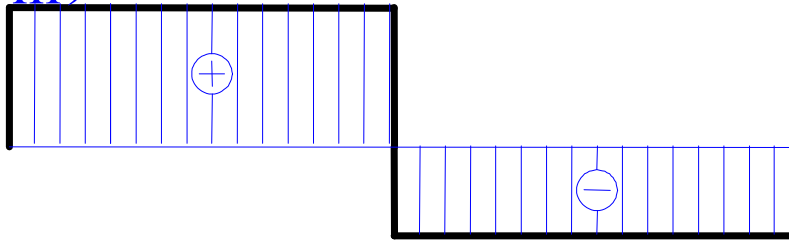


解： 1、求内力，作出轴的扭矩图



## 2、计算轴横截面上的最大切应力并校核强度

T图 (kN·m) 22



14

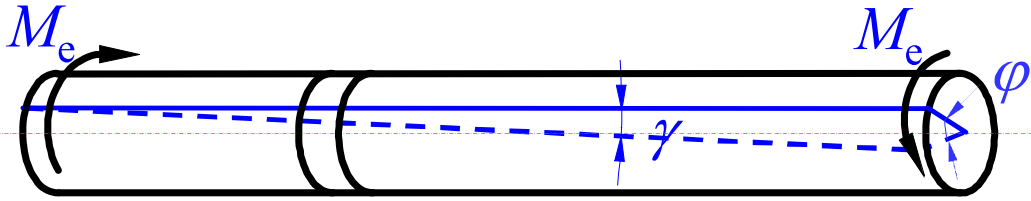
$$AB段 \quad \tau_{1,\max} = \frac{T_1}{W_{p1}} = \frac{22 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\frac{\pi}{16} (120 \text{ mm})^3} = 64.8 \text{ MPa}$$

$$BC段 \quad \tau_{2,\max} = \frac{T_2}{W_{p2}} = \frac{14 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\frac{\pi}{16} (100 \text{ mm})^3} = 71.3 \text{ MPa} < [\tau] = 80 \text{ MPa}$$

即该轴满足强度条件。

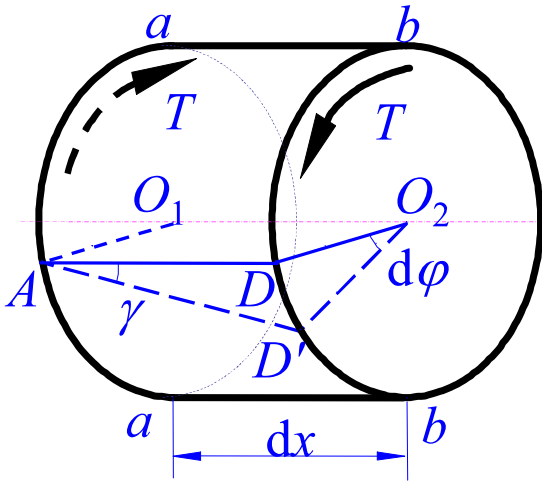
## § 8-3 圆轴扭转时的变形及刚度条件

I、扭转时的变形 —— 两个横截面的相对扭转角  $\varphi$



扭转角沿杆长的变化率

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$$

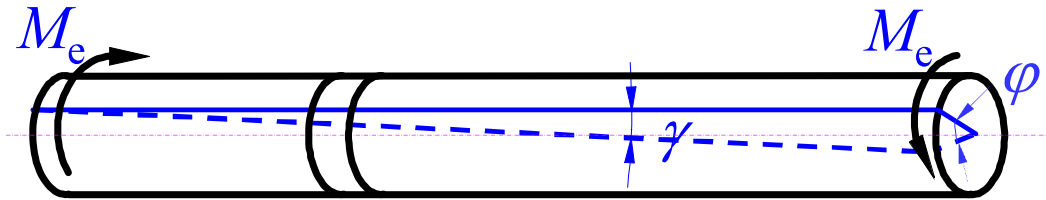


相距  $dx$  的微段两端截面间  
相对扭转角为

$$d\varphi = \frac{T}{GI_p} dx$$

相距 $l$ 的两横截面间相对扭转角为

$$\varphi = \int_l d\varphi = \int_0^l \frac{T}{GI_p} dx$$



等直圆杆仅两端截面受外力偶矩  $M_e$  作用时

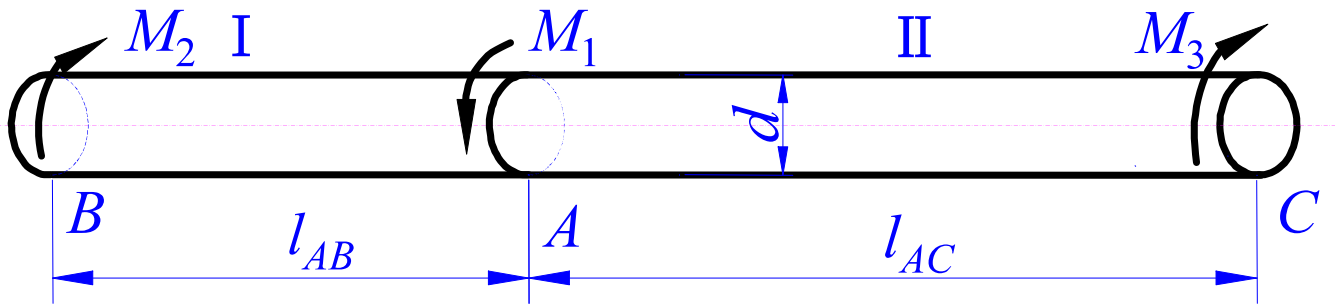
$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} = \frac{M_e l}{GI_p} \quad (\text{单位: rad})$$

↪ 称为等直圆杆的扭转刚度



# 材料力学

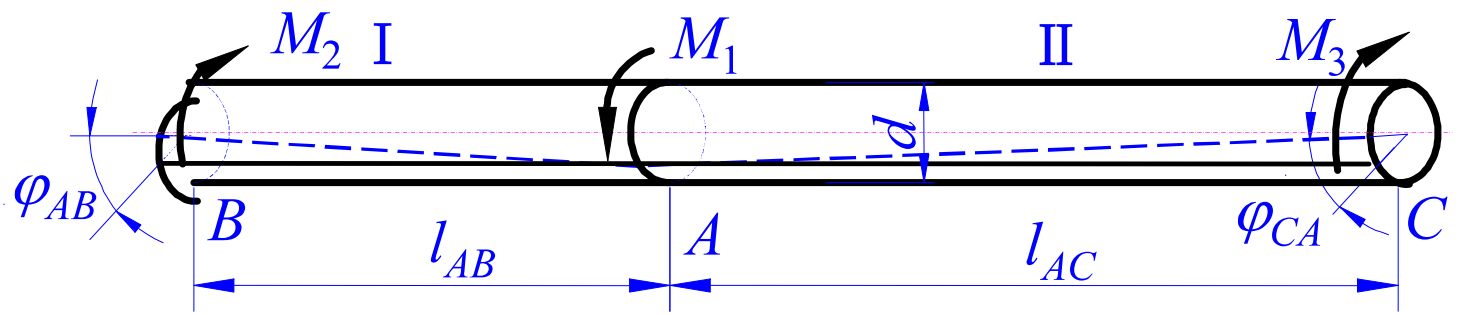
例 图示钢制实心圆截面轴，已知： $M_1=1592\text{N}\cdot\text{m}$ ， $M_2=955\text{N}\cdot\text{m}$ ， $M_3=637\text{N}\cdot\text{m}$ ， $d=70\text{mm}$ ， $l_{AB}=300\text{mm}$ ， $l_{AC}=500\text{mm}$ ，钢的切变模量 $G=80\text{GPa}$ 。求横截面C相对于B的扭转角 $\varphi_{CB}$ 。



解： 1、 先用截面法求各段轴的扭矩：

$$BA\text{段} \quad T_1 = 955\text{N}\cdot\text{m}$$

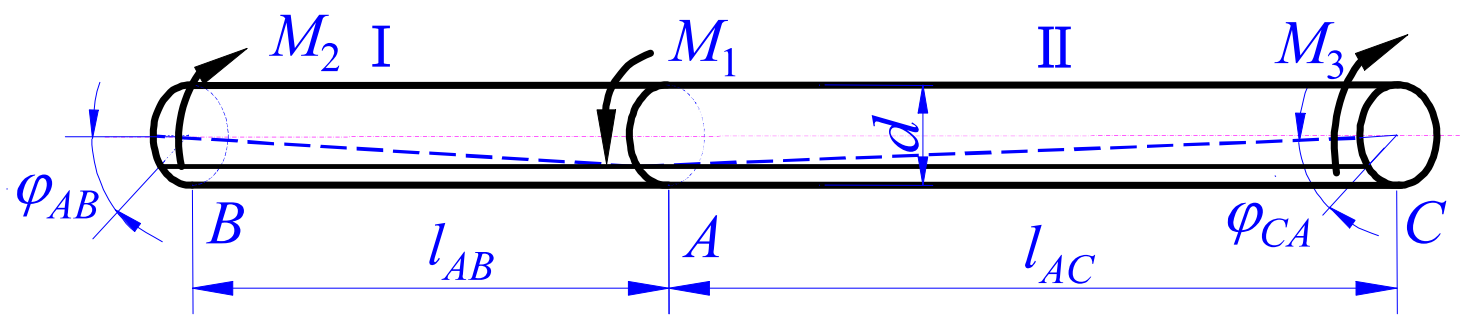
$$AC\text{段} \quad T_2 = -637\text{N}\cdot\text{m}$$



2、各段两端相对扭转角：

$$\begin{aligned} \varphi_{AB} &= \frac{T_1 l_{AB}}{GI_P} = \frac{(955 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm})(300 \text{ mm})}{(80 \times 10^3 \text{ MPa}) \frac{\pi}{32} (70 \text{ mm})^4} \\ &= 1.52 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{CA} &= \frac{T_2 l_{AC}}{GI_P} = \frac{(-637 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm})(500 \text{ mm})}{(80 \times 10^3 \text{ MPa}) \frac{\pi}{32} (70 \text{ mm})^4} \\ &= -1.69 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$



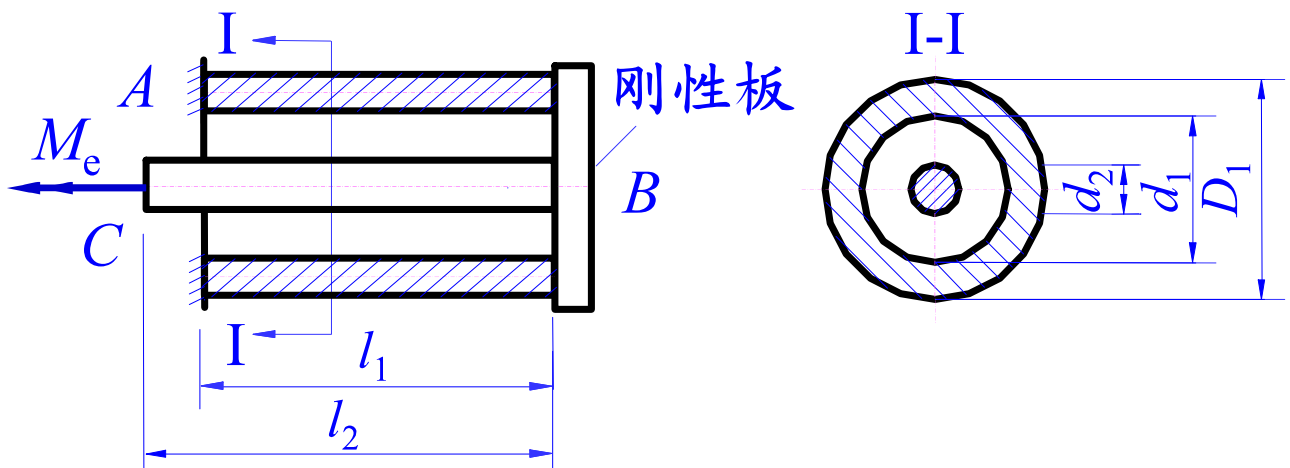
3、横截面  $C$  相对于  $B$  的扭转角：

$$\begin{aligned}\varphi_{CB} &= \varphi_{AB} + \varphi_{CA} = [1.52 + (-1.69)] \times 10^{-3} \\ &= -0.17 \times 10^{-3} \text{ rad}\end{aligned}$$

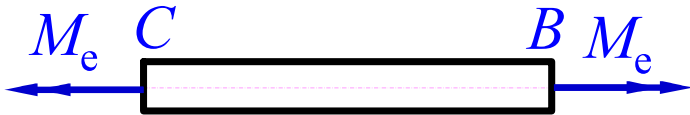
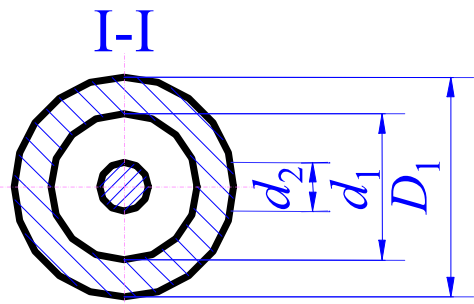
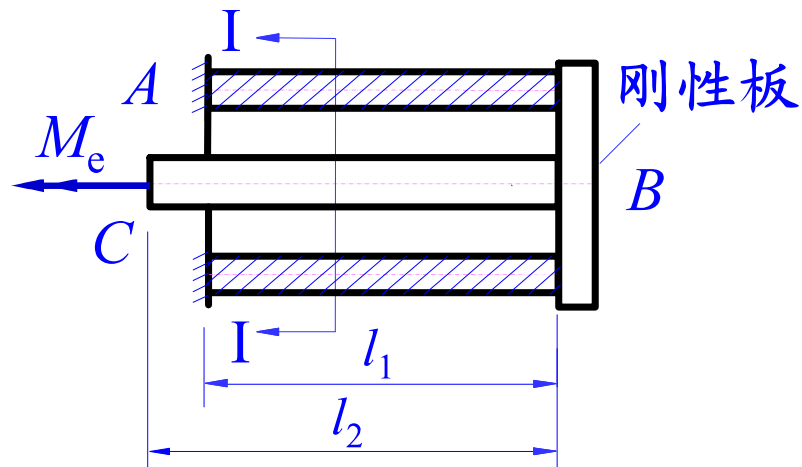
# 材料力学

例 图示空心圆杆  $AB$ ， $A$ 端固定，底板  $B$ 为刚性杆，在其中心处焊一直径为  $d_2$ 的实心圆杆  $CB$ 。空心杆的内、外径分别为  $D_1$ 和  $d_1$ ，外力偶矩  $M_e$ 、两杆的长度  $l_1$ 、 $l_2$ 及材料的切变模量  $G$ 均为已知。试求：

- 1、两杆横截面上的切应力分布图；
- 2、实心杆  $C$ 端的绝对扭转角  $\varphi_C$ 。



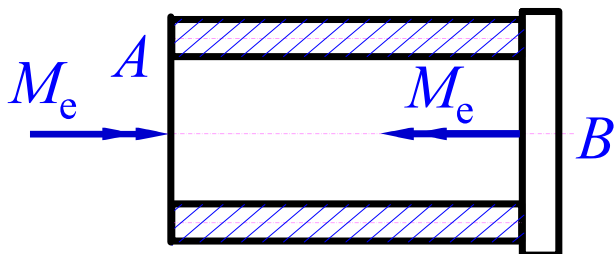
# 材料力学



解：1、分析两轴的受力如图，求出其扭矩分别为

$$T_1 = -M_e$$

$$T_2 = M_e$$



## 2、求横截面上的切应力

### 空心圆轴

$$\tau_{1,\max} = \frac{T_1}{W_{p1}} = \frac{-M_e}{\pi D_1^3 (1-\alpha^4)/16} = -\frac{16M_e}{\pi D_1^3 (1-\alpha^4)}$$

$$\tau_{1,\min} = \frac{T_1 \times d_1 / 2}{I_{p1}} = \frac{-M_e \times d_1 / 2}{\pi D_1^4 (1-\alpha^4)/32} = -\frac{16M_e \alpha}{\pi D_1^3 (1-\alpha^4)}$$

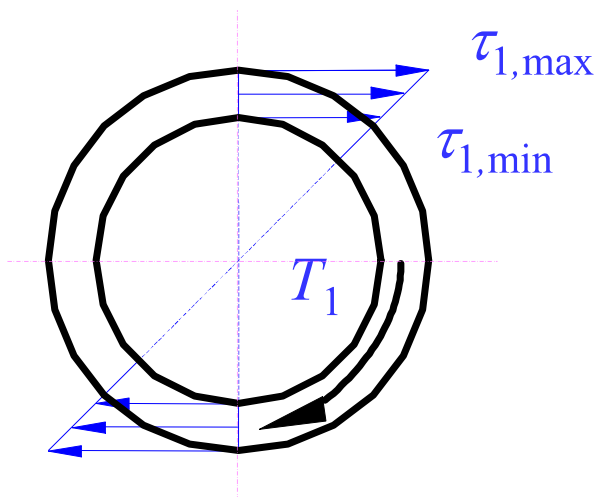
### 实心圆轴

$$\tau_{2,\max} = \frac{T_2}{W_{p2}} = \frac{M_e}{\pi d_2^3 / 16} = \frac{16M_e}{\pi d_2^3}$$

## 空心圆轴

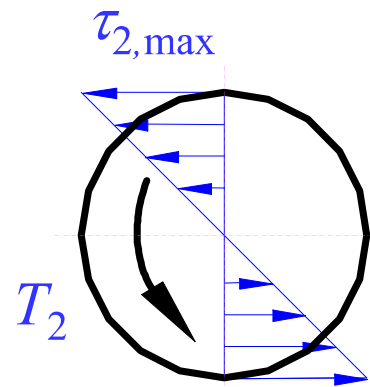
$$\tau_{1,\max} = -\frac{16M_e}{\pi D_1^3 (1-\alpha^4)}$$

$$\tau_{1,\min} = -\frac{16M_e \alpha}{\pi D_1^3 (1-\alpha^4)}$$

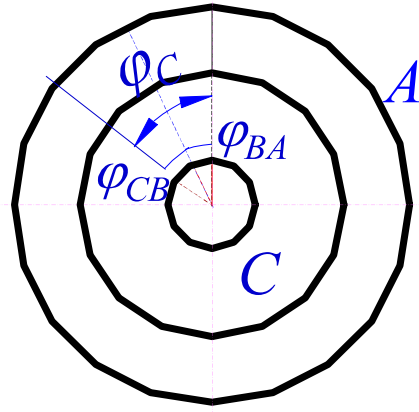
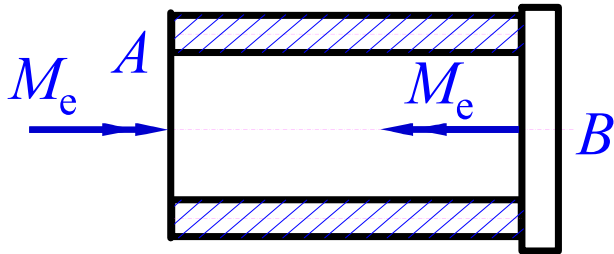
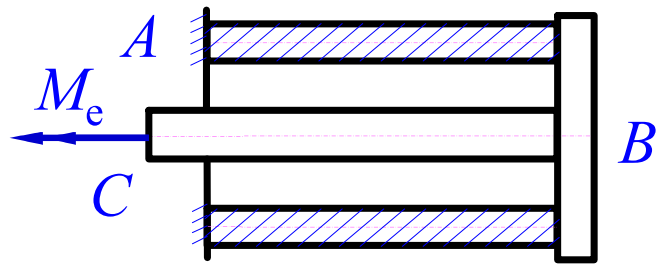


## 实心圆轴

$$\tau_{2,\max} = \frac{16M_e}{\pi d_2^3}$$



## 3、计算绝对扭转角 $\varphi_C$



$$\begin{aligned}
 \varphi_C &= |\varphi_{AB}| + \varphi_{BC} \\
 &= \frac{T_1 l_1}{GI_{p1}} + \frac{T_2 l_2}{GI_{p2}} \\
 &= \frac{32M_e l_1}{G\pi D_1^4 (1-\alpha^4)} + \frac{32M_e l_2}{G\pi d_2^4}
 \end{aligned}$$



## II、刚度条件

$$\varphi'_{\max} \leq [\varphi'] \Rightarrow \text{常用单位: } ^\circ/\text{m}$$

等直圆杆在扭转时的刚度条件:

$$\varphi'_{\max} = \frac{|T_{\max}|}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} \leq [\varphi']$$

对于精密机器的轴  $[\varphi'] \approx 0.15 \sim 0.30^\circ / \text{m}$

对于一般的传动轴  $[\varphi'] \approx 2^\circ / \text{m}$

例 由45号钢制成的某空心圆截面轴，内、外直径之比 $\alpha=0.5$ 。已知材料的许用切应力 $[\tau]=40\text{MPa}$ ，切变模量 $G=80\text{GPa}$ 。轴的横截面上最大扭矩为 $T_{\max}=9.56\text{ kN}\cdot\text{m}$ ，轴的许可单位长度扭转角 $[\varphi']=0.3\text{ }^\circ/\text{m}$ 。试选择轴的直径。

解：1、按强度条件确定外直径 $D$

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} = \frac{T_{\max}}{\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)} \leq [\tau]$$
$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 9.56 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}}{\pi(1-0.5^4) \times 40 \text{ MPa}}}$$
$$= 109 \text{ mm}$$

## 2、由刚度条件确定所需外直径D

$$\varphi'_{\max} = \frac{|T_{\max}|}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} = \frac{|T_{\max}|}{G \frac{\pi D^4}{32} (1-\alpha^4)} \times \frac{180}{\pi} \leq [\varphi']$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32T_{\max}}{G\pi(1-\alpha^4)} \times \frac{180}{\pi} \times \frac{1}{[\varphi']}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{32 \times 9.56 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{80 \text{ GPa} \times \pi (1-0.5^4)} \times \frac{180}{\pi} \times \frac{1}{0.3^\circ / \text{m}}}$$

$$= 125.5 \text{ mm}$$

## 3、确定内外直径

$$D \geq 125.5 \text{ mm}$$

$$d = \alpha D \geq 63.75 \text{ mm}$$

## § 8-5 结论与讨论

### I：圆轴强度与刚度设计的一般过程

- 根据轴传递的功率以及轴每分钟的转数，确定作用在轴上的外加力偶的力偶矩。

- 应用截面法确定轴的横截面上的扭矩，当轴上同时作用有两个以上的绕轴线转动的外加扭力矩时，**需要画出扭矩图**。

- 根据轴的扭矩图，确定可能的**危险面**以及危险面上的扭矩数值。校核、设计轴的直径以及确定许用载荷。

- 计算危险截面上的**最大剪应力**或单位长度上的**相对扭转角**。

- 根据需要，应用强度设计准则与刚度设计准则对圆轴进行强度与刚度校核、设计轴的直径以及确定许用载荷。

## I：圆轴强度与刚度设计的一般过程

需要指出的是，工程结构与机械中有些传动轴都是通过与之连接的零件或部件承受外力作用的。这时需要首先将作用在零件或部件上的力向轴线简化，得到轴的受力图。这种情形下，圆轴将同时承受扭转与弯曲，而且弯曲可能是主要的。这一类圆轴的强度设计比较复杂。

此外，还有一些圆轴所受的外力(大小或方向)随着时间的改变而变化。这些问题将在以后的章节中介绍。

## II：关于公式的应用条件

扭转剪应力公式是圆轴在弹性范围内导出的，其适用条件是：

1、必须是圆轴—否则横截面将不再保持平面，变形协调公式

$$\gamma(\rho) = \rho \frac{d\varphi}{dx}$$

将不再成立。

2、材料必须满足胡克定律，而且必须在弹性范围内加载—只有这样，剪应力和剪应变的正比关系才成立

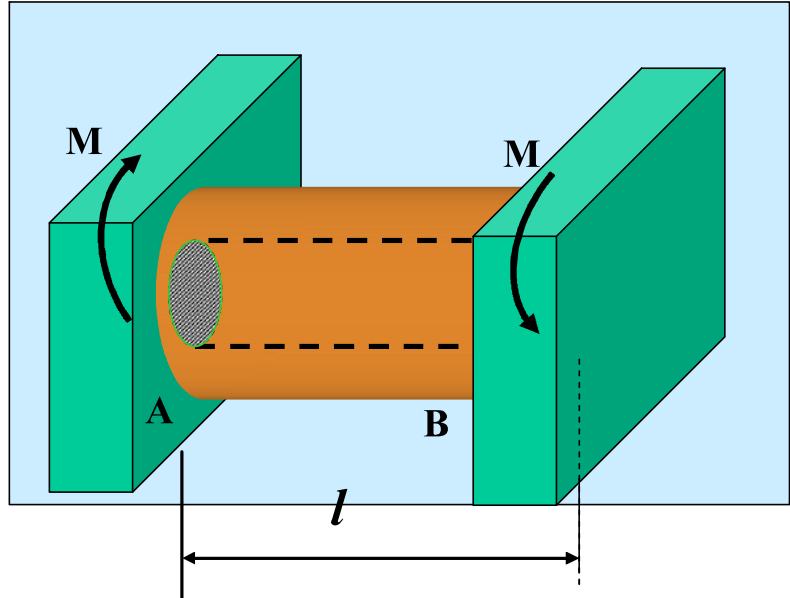
$$\tau = G\gamma \quad \gamma(\rho) = \rho \frac{d\varphi}{dx} \quad \tau(\rho) = \frac{M_x \rho}{I_p}$$

二者结合才会得到剪应力沿半径方向线性分布的结论，才会得到反映学习分布的剪应力公式

# 材料力学

## III: 超静定问题:

图 示一长为  $l$  的组合杆，由不同材料的实心圆截面杆和空心圆截面杆组成,内外两杆均在线弹性范围内工作，其抗扭刚度  $GI_{Pa}$ ， $GI_{Pb}$ 。当此组合杆的两端各自固定在刚性板上，并在刚性板处受一对矩为  $M$  的扭转力偶的作用试求分别作用于内、外杆上的扭转偶矩。



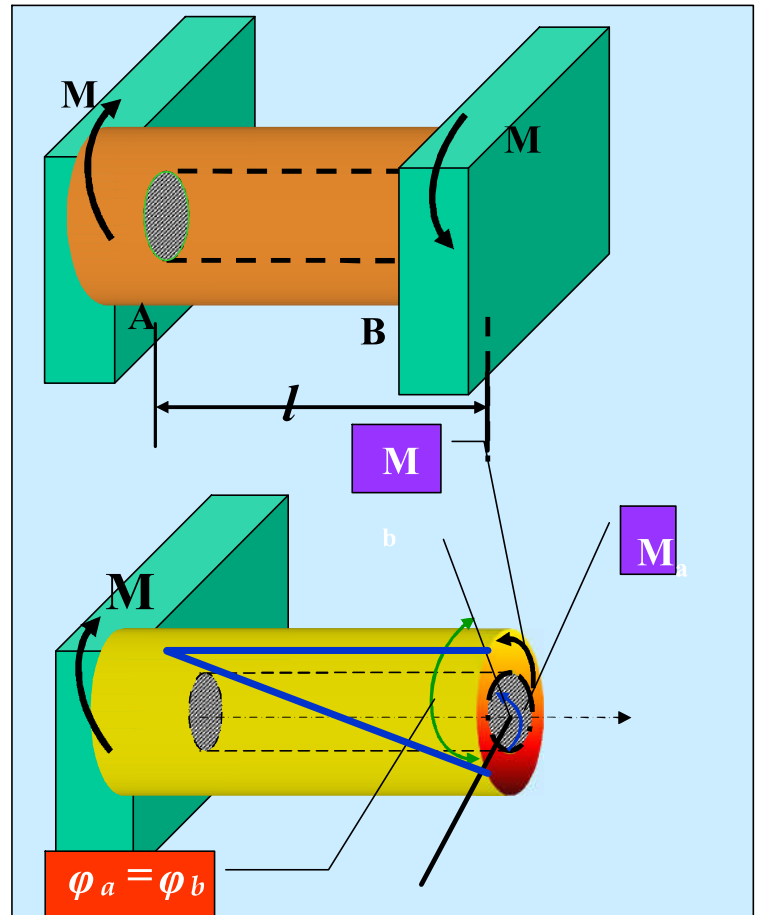
物理关系是

$$\varphi_a = \frac{m_a l}{G_a I_{Pa}}$$

$$\varphi_b = \frac{m_b l}{G_b I_{Pb}}$$

代入变形几何方程，得  
补充方程

$$m_a = \frac{G_a I_{Pa}}{G_b I_{Pb}} m_b$$



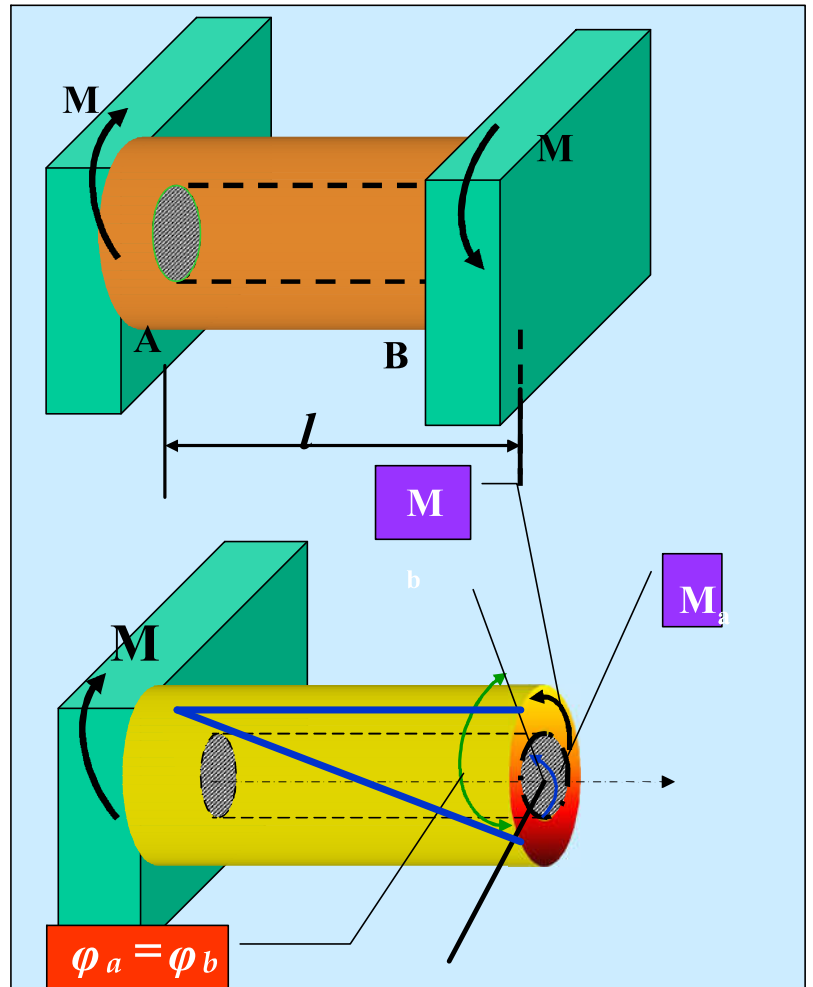


# 材料力学

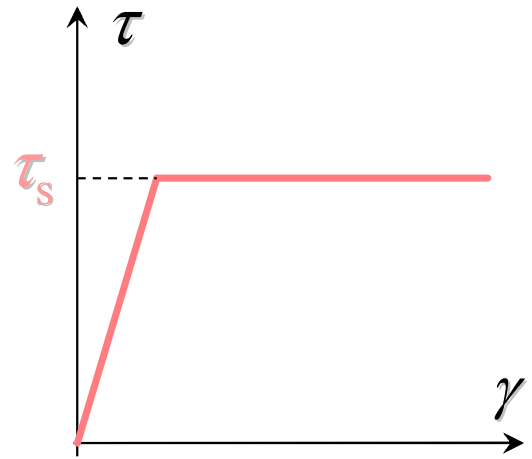
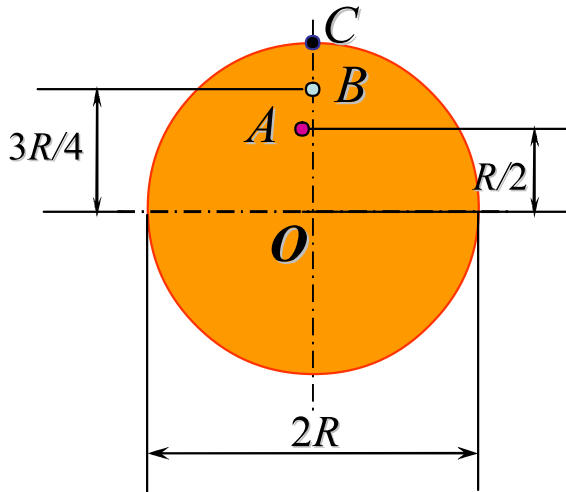
联立平衡方程和补充方程，解得：

$$m_a = \frac{G_a I_{Pa}}{G_a I_{Pa} + G_b I_{Pb}} m$$

$$m_b = \frac{G_b I_{Pb}}{G_a I_{Pa} + G_b I_{Pb}} m$$



## IV: 关于公式的应用条件



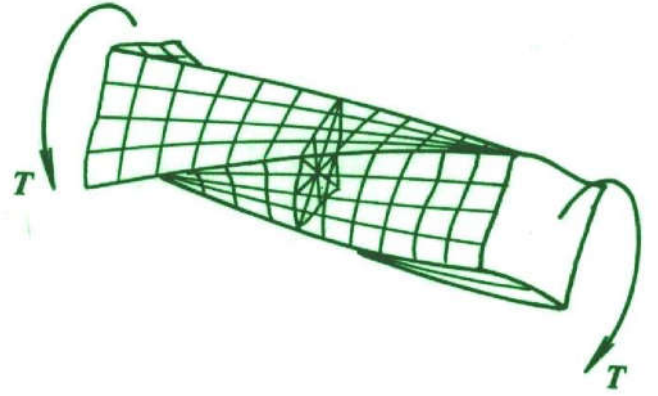
1.  $B$ 、 $C$ 两点的剪应力分别达到 $\tau_s$ 时，横截面上的扭转剪应力怎样分布；
2.  $A$ 点的切应力怎样确定；
3.  $A$ 点以内圆截面上的内力偶矩与横截面上的总扭矩之间的关系

# 材料力学

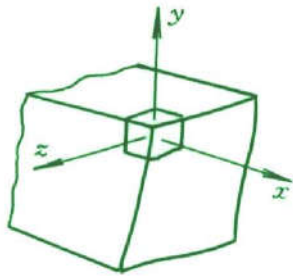
## V: 矩形截面杆扭转时横截面上的剪应力

### 1、变形特征—翘曲

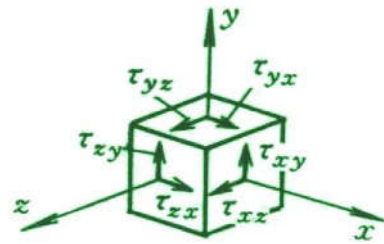
扭转后，横截面将不再保持平面



### 2、由平衡直接得到的结论



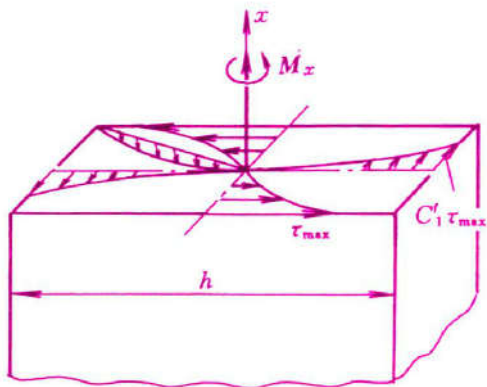
角点切应力等于零



边缘各点切应力沿切线方向

## 矩形截面杆扭转时横截面上的剪应力

### 3、剪应力分布与剪应力公式



角点切应力等于零；  
边缘各点切应力沿  
切线方向；

最大切应力发生在  
长边中点。

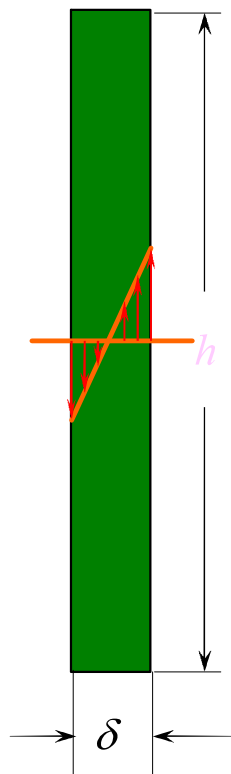
长边中点处

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{C_1 h b^2}$$

短边中点处

$$\tau'_{\max} = C'_1 \tau_{\max}$$

## 矩形截面杆扭转时横截面上的剪应力



### 4、狭长矩形截面

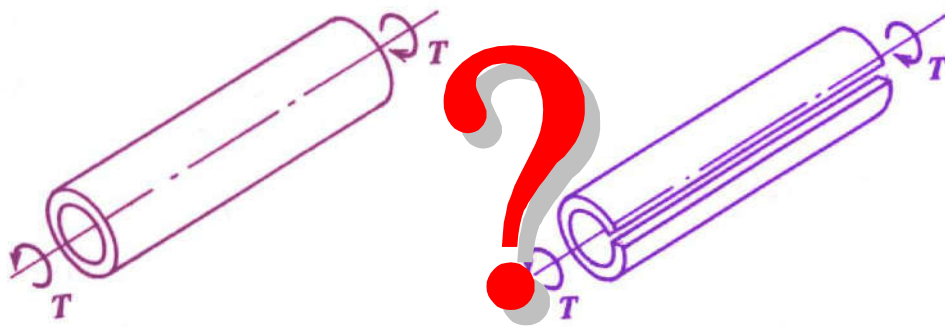
$$\tau_{max} = \frac{M_x}{C_1 h b^2}$$

$$C_1 = 0.333 \approx \frac{1}{3}$$

$$\tau_{max} = \frac{3M_x}{h\delta^2}$$

$\delta$ -厚度

## 开口与闭口薄壁圆环的扭转切应力



两种情形下横截面上的切应力是怎样分布的？

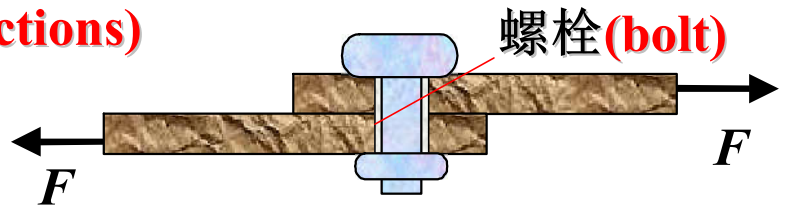
两种情形下横截面上的最大切应力公式怎样确定？

## 7-6 剪切变形 (Shear deformation)

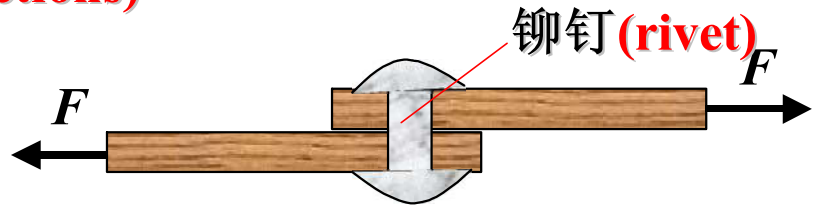
### 一、基本概念和实例 (basic concepts and example problem)

#### 1、工程实例: (example problems)

##### 1) 螺栓连接 (bolted connections)



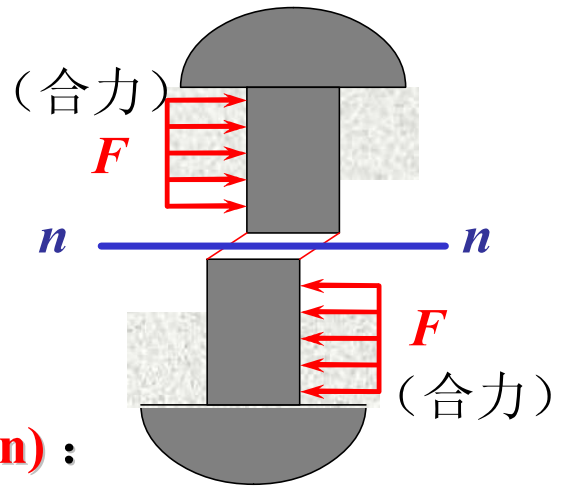
##### 2) 铆钉连接 (riveted connections)



## 2、受力特点(character of external force):

以铆钉为例:

构件受两组大小相等、方向相反、作用线相互很近的平行力系作用。



## 3、变形特点(character of deformation):

构件沿两组平行力系的交界面发生相对错动。



## 4、连接处破坏三种形式：

### (three types of failure in connections)

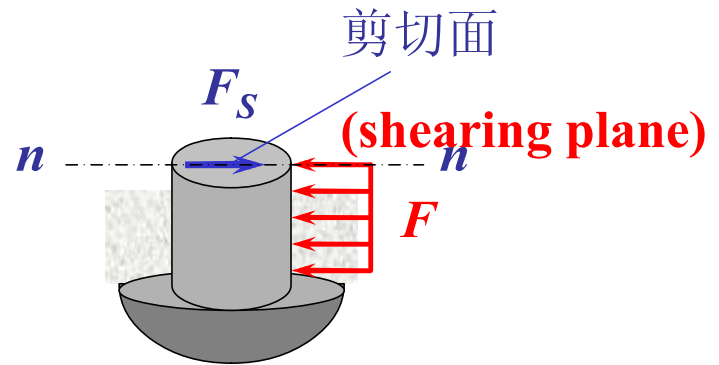
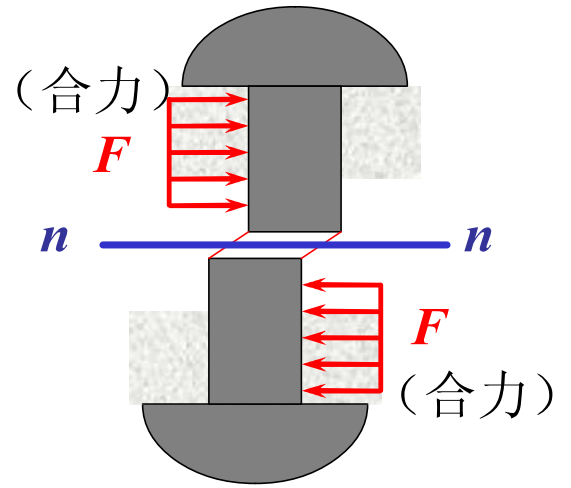
#### ①剪切破坏(shearing failure)

沿铆钉的剪切面剪断，如沿n-n面剪断。

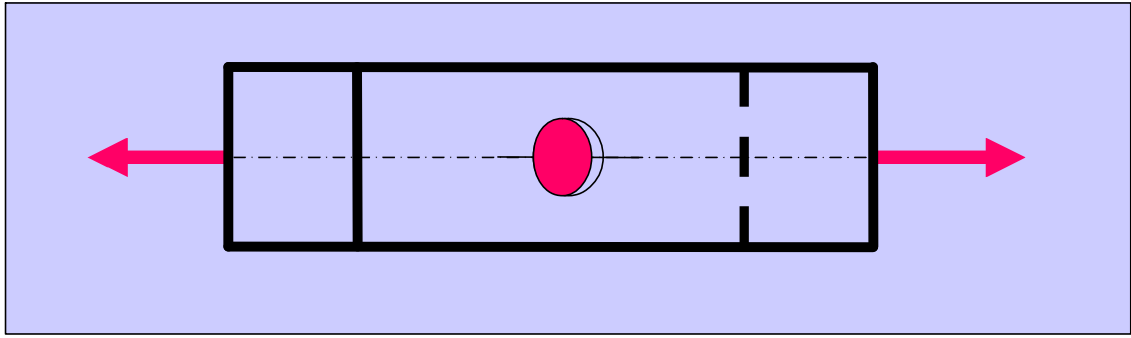
#### ②挤压破坏(bearing failure)

铆钉与钢板在相互接触面上因挤压而使溃压连接松动，发生破坏。

#### ③拉伸破坏(tension failure)



钢板在受铆钉孔削弱的截面处，应力增大，易在连接处拉断。



挤压破坏的两种形式 (two types of bearing failure):

(1) 螺栓压扁

(2) 钢板在孔缘压成椭圆

(1) 剪切应力: 
$$\tau = \frac{Q}{A_s} = \frac{P}{nA_s}$$

(2) 剪切强度条件为: 
$$\tau = \frac{Q}{A_s} = \frac{P}{nA_s} \leq [\tau]$$

式中:  $A_s$ ——剪切面积  $A_s = \frac{\pi}{4}d^2$

$[\tau]$ ——材料的容许剪应力

式(3-1)还可计算接头所需的铆钉个数:

$$n \geq \frac{P}{A_s [\tau]}$$

## 2、挤压应力 (bearing stress):

在挤压近似计算中，假设

名义挤压应力 (nominal bearing stress) 计算式为：

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}}$$

$F_{bs}$ ——挤压力 (bearing force)

$A_{bs}$ ——挤压面的面积 (area in bearing)

## (2) 挤压强度计算

$$\sigma_{bs} = \frac{P_{bs}}{A_{bs}} = \frac{P}{nA_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]$$

式中： $A_{bs}$ ——挤压面积

$A_{bs} = dt$ （钢板厚度不同时取小值）

$[\sigma_{bs}]$ ——材料的容许挤压应力

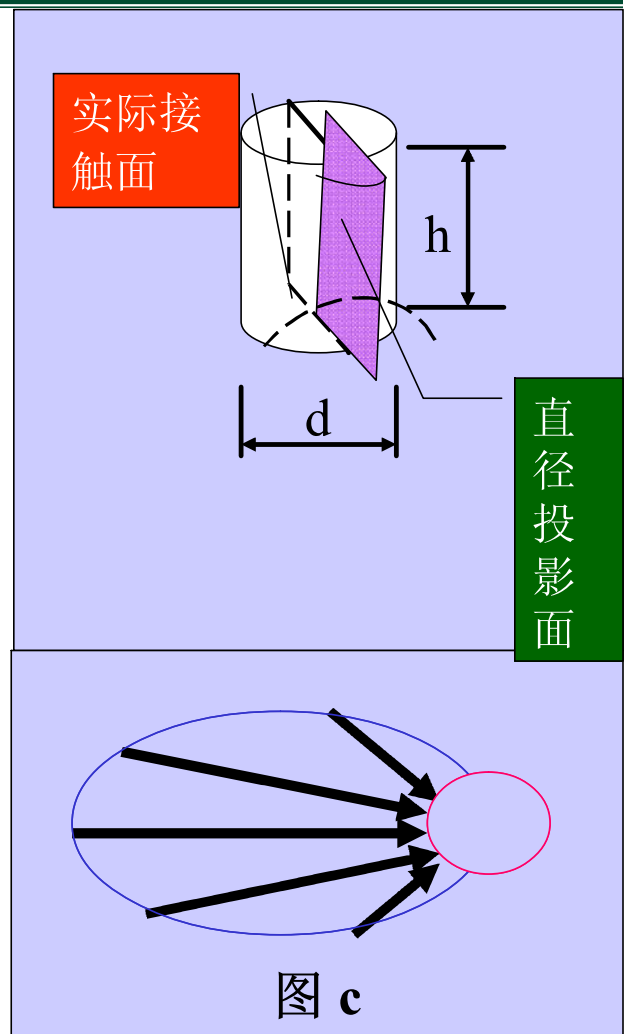
计算铆钉个数时：

$$n \geq \frac{P}{A_{bs} [\sigma_{bs}]}$$

- 当接触面为圆柱面时, 挤压面积  $A_{bS}$  为实际接触面在直径平面上的投影面积 (**projected area**)

$$A_{bS} = d \times h$$

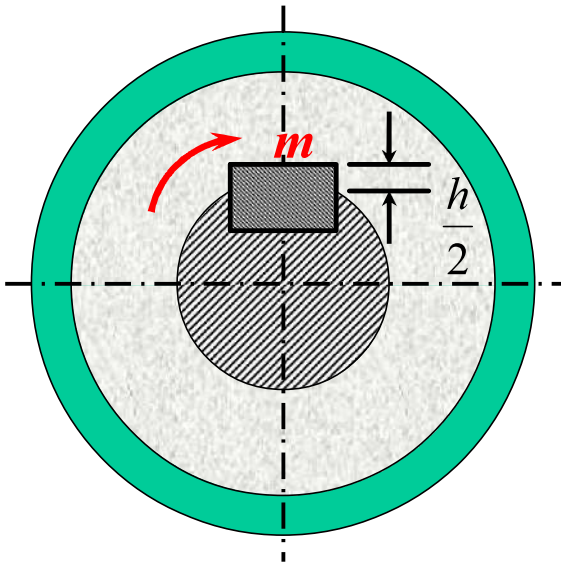
挤压现象的实际受力如图 c 所示。



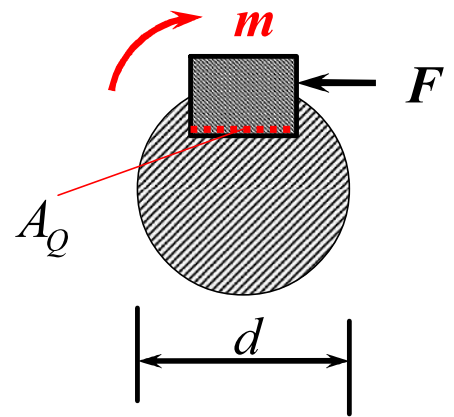
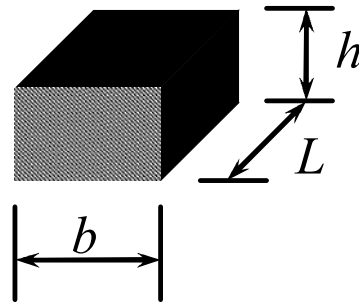
# 材料力学

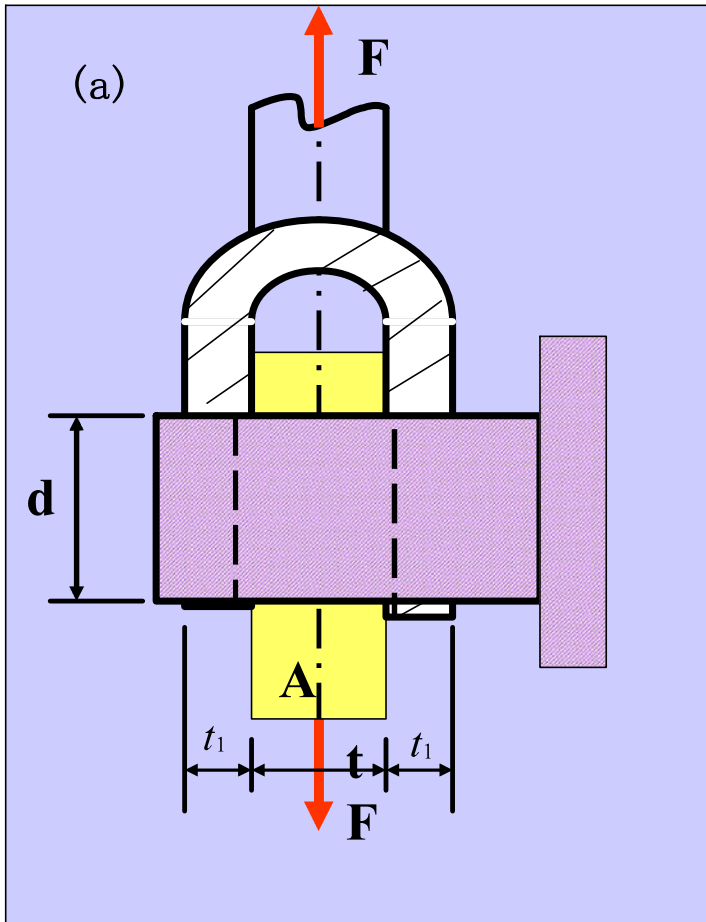
例2 齿轮与轴由平键（ $b=16\text{mm}$ ， $h=10\text{mm}$ ，）连接，它传递的扭矩 $m=1600\text{Nm}$ ，轴的直径 $d=50\text{mm}$ ，键的许用剪应力为 $[\tau]=80\text{MPa}$ ，许用挤压应力为 $[\sigma_{bs}]=240\text{MPa}$ ，试设计键的长度。

解：①键的受力分析如图



$$F = F_s = F_{bs} = \frac{2m}{d} = \frac{2 \times 1600}{0.05} = 64\text{kN}$$





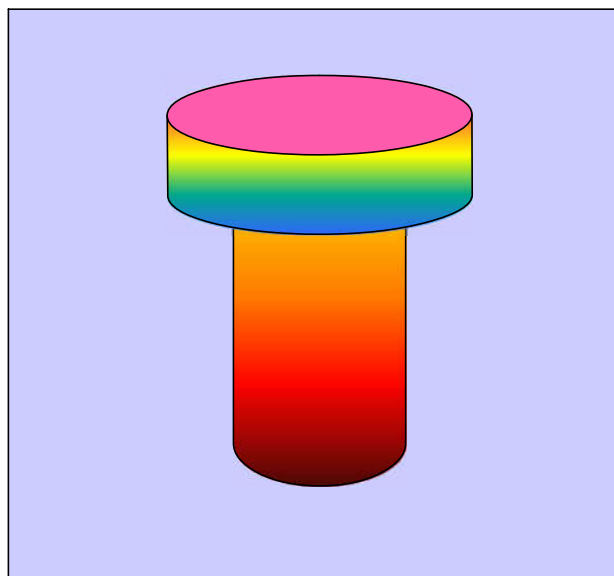
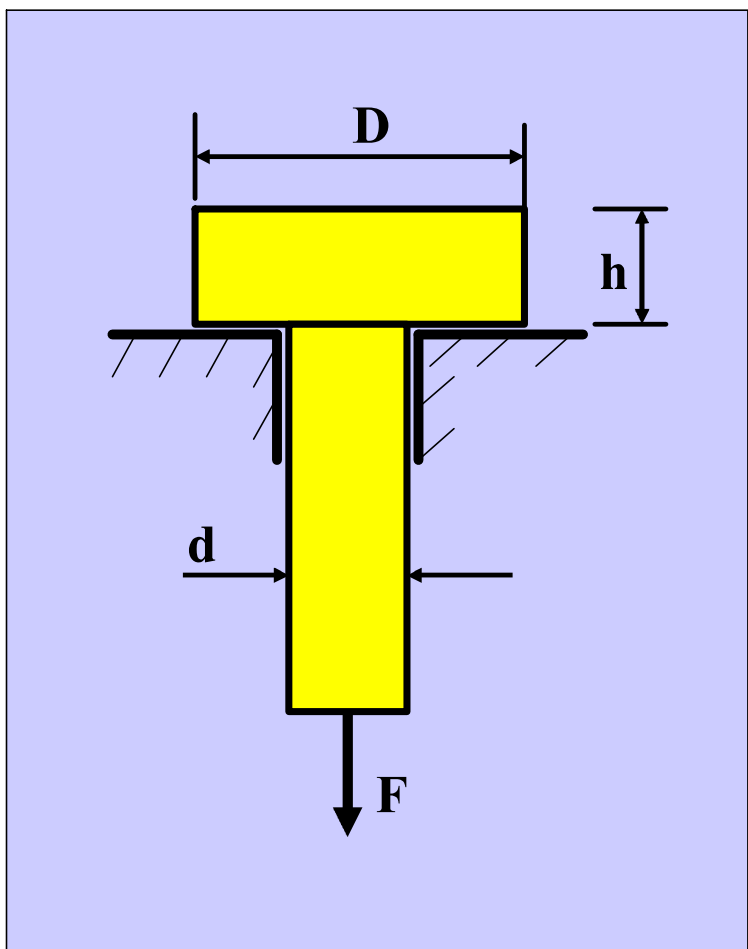
例题3：一销钉连接如图所示, 已知外力  $F=18\text{kN}$ , 被连接的构件A 和 B 的厚度分别为  $t=8\text{mm}$  和  $t_1=5\text{mm}$ , 销钉直径  $d=15\text{mm}$ , 销钉材料的许用剪应力为  $[\tau]=60\text{ MPa}$ , 许用挤压应力为  $[\sigma_{bS}]=200\text{ MPa}$ , 试校核销钉的强度。



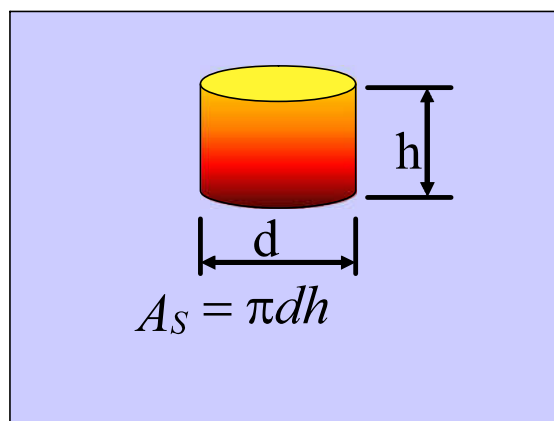
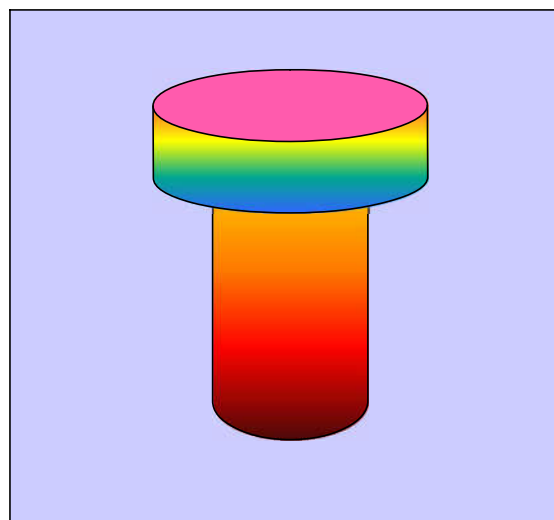
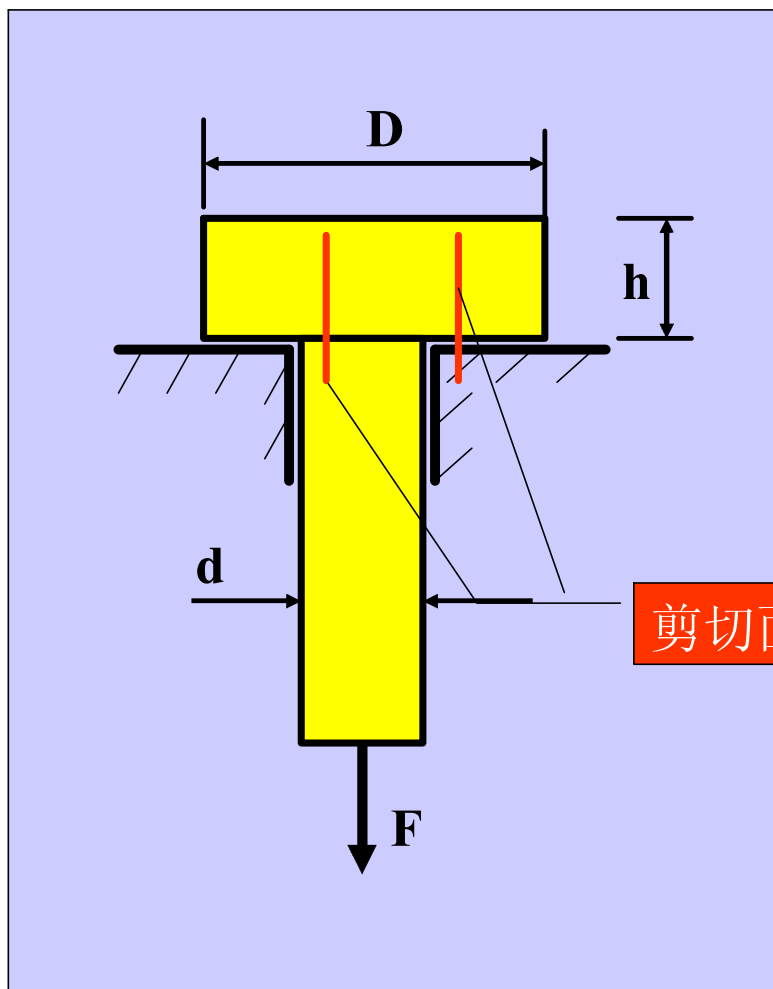
思考题

销钉的剪切面面积  $A_S$

销钉的挤压面面积  $A_{bS}$

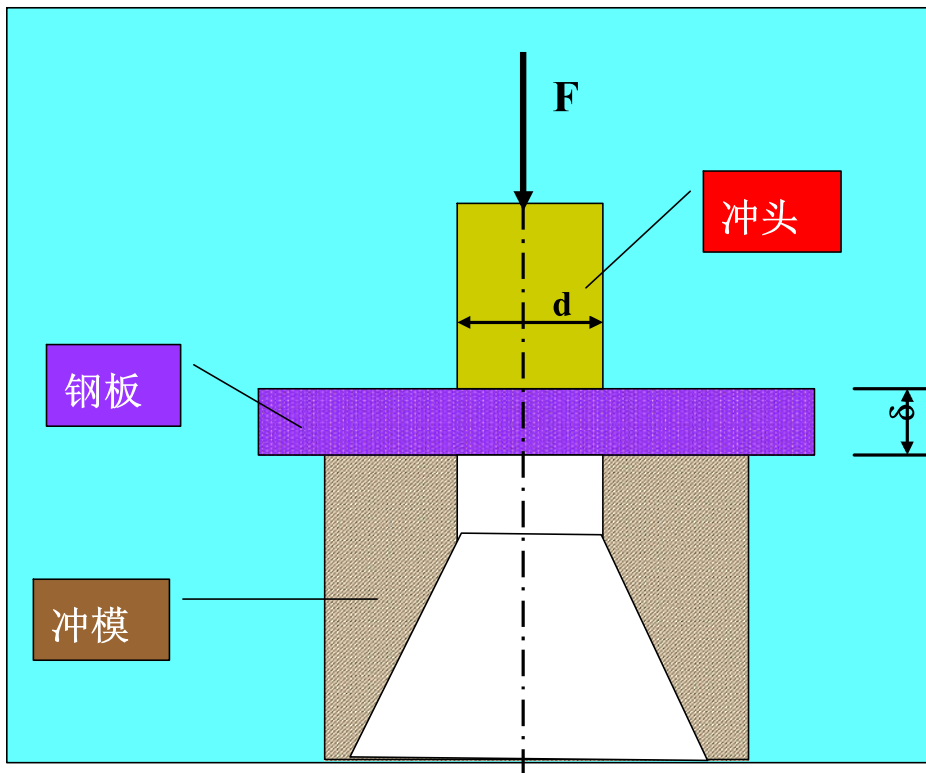


# 材料力学

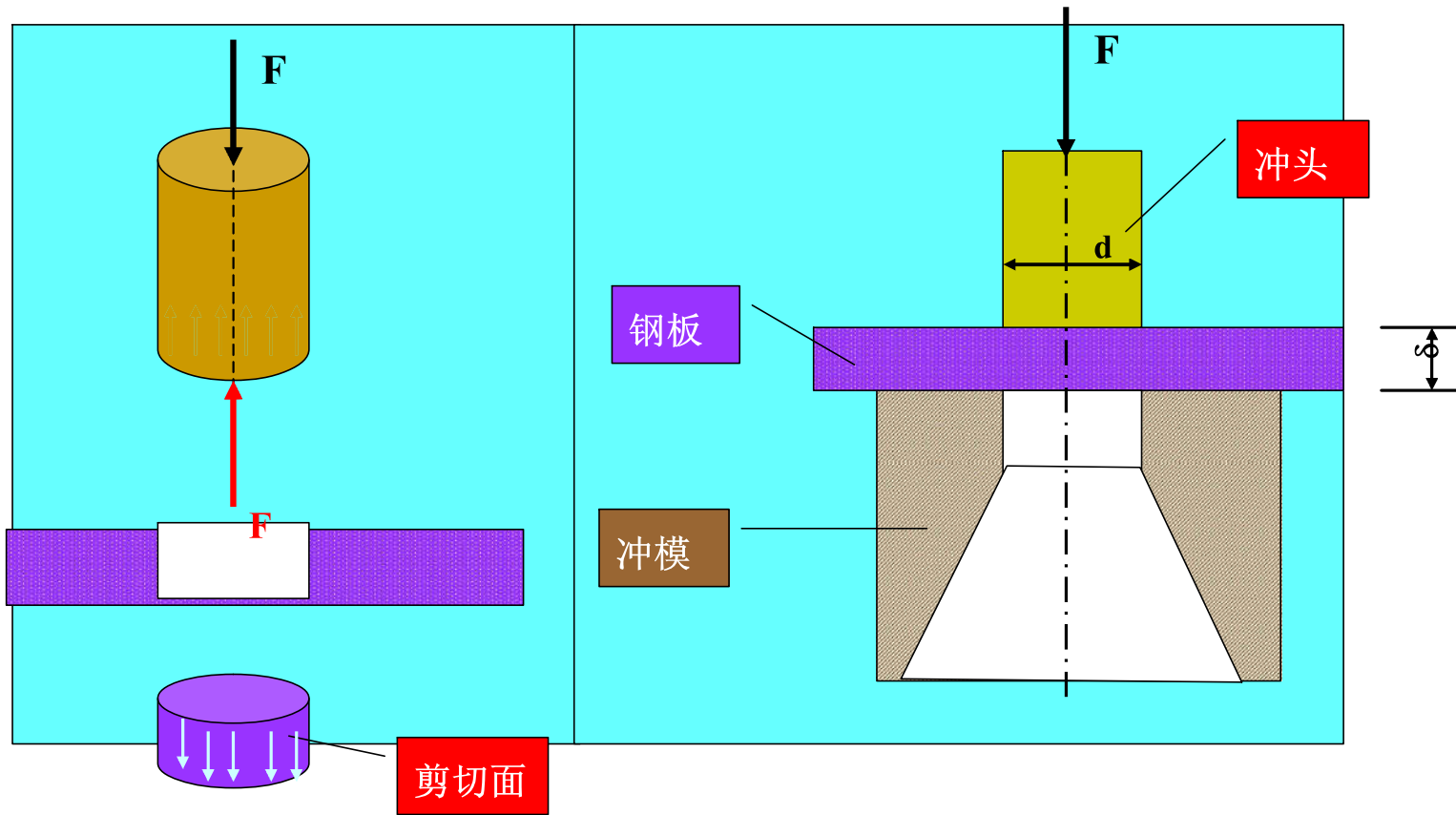


# 材料力学

补充题：冲床的最大冲压力 $F=400\text{KN}$ ，冲头材料的许用压应力 $[\sigma]=440\text{MPa}$ ，钢板的剪切强度极限 $\tau_b=360\text{MPa}$ 。试求冲头能冲剪的最小孔径 $d$ 和最大的钢板厚度 $\delta$ 。



# 材料力学



解：冲头为轴向压缩变形

$$\frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq [\sigma] \quad \rightarrow \quad d=34\text{mm}$$