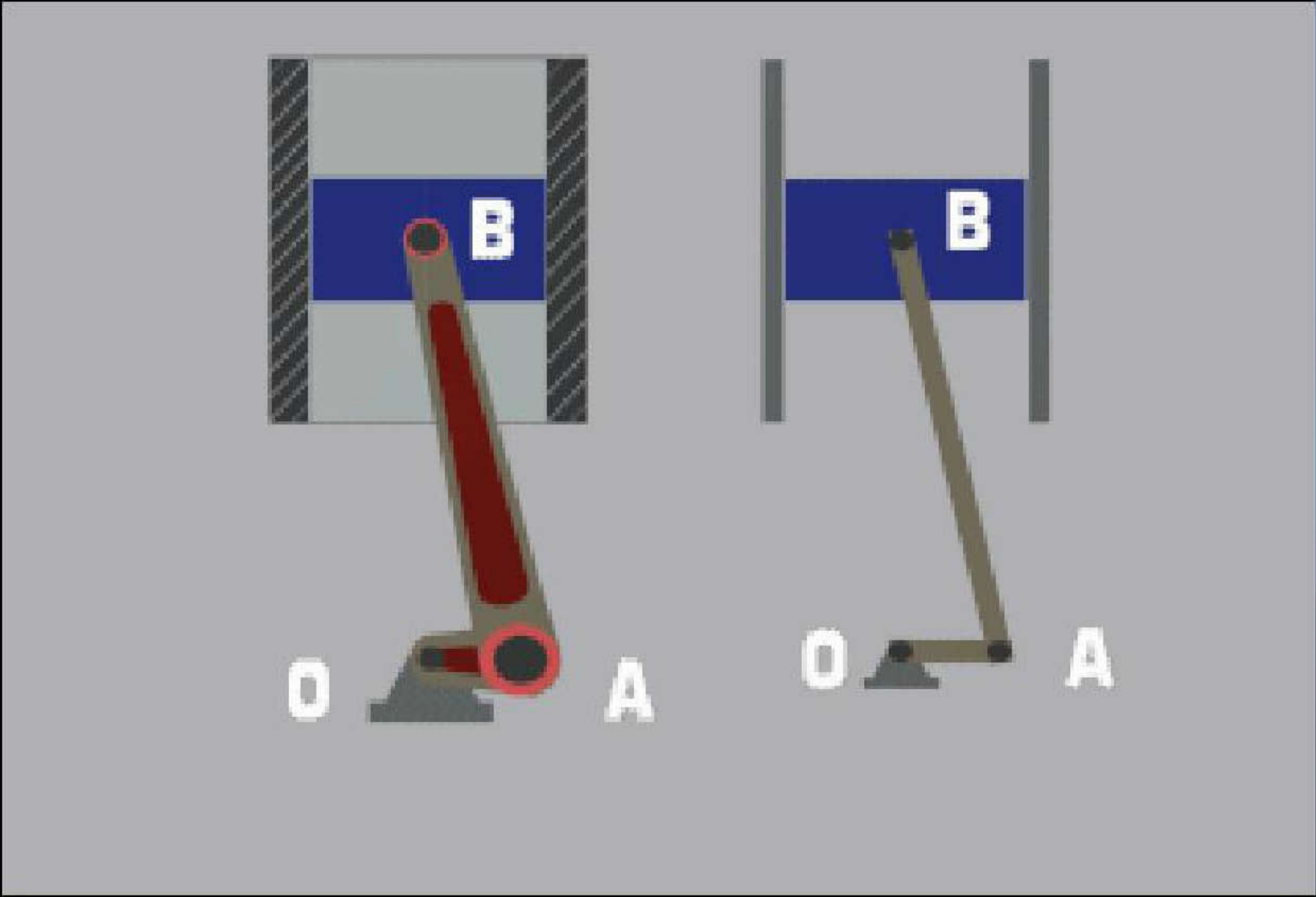
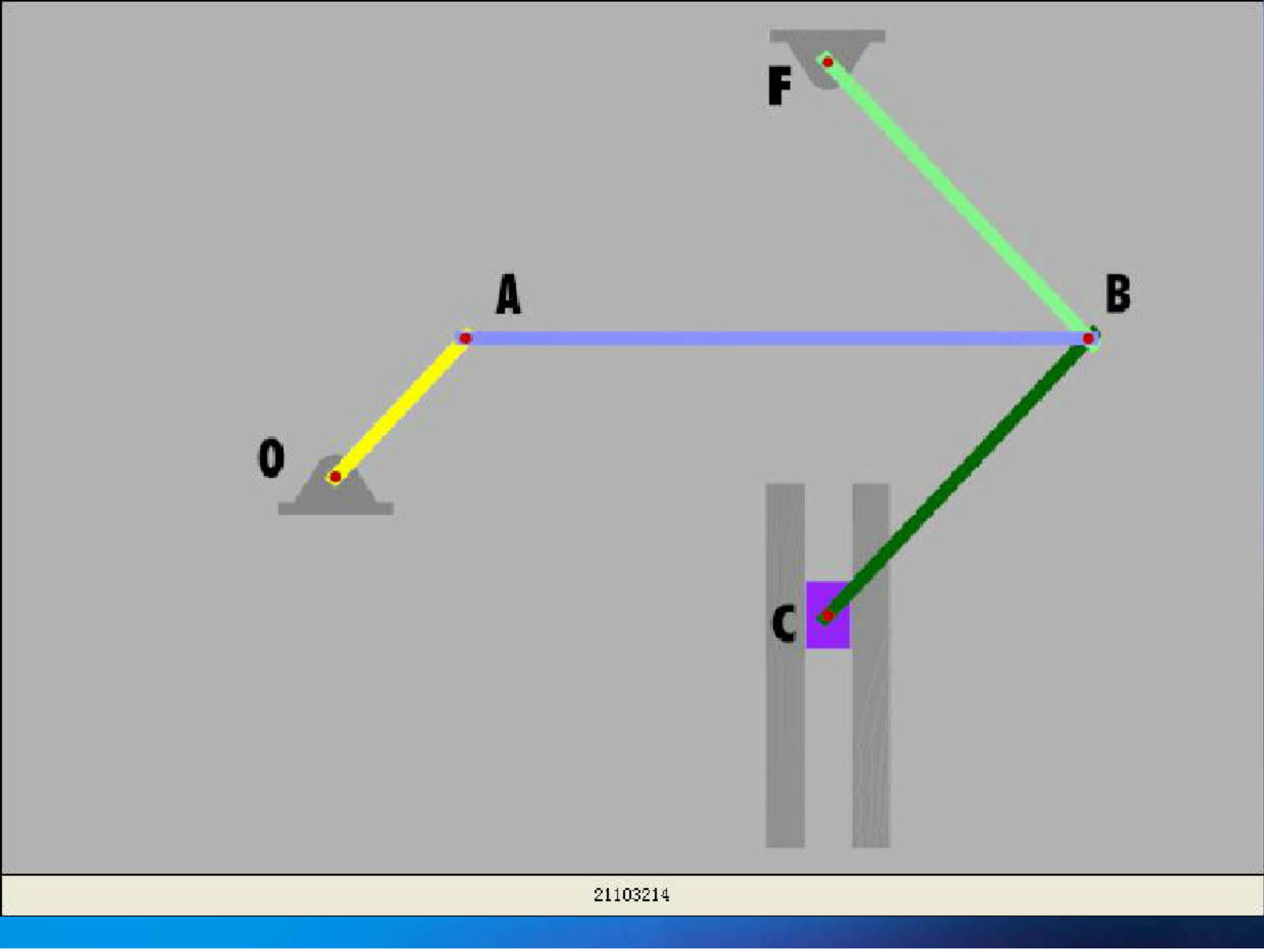
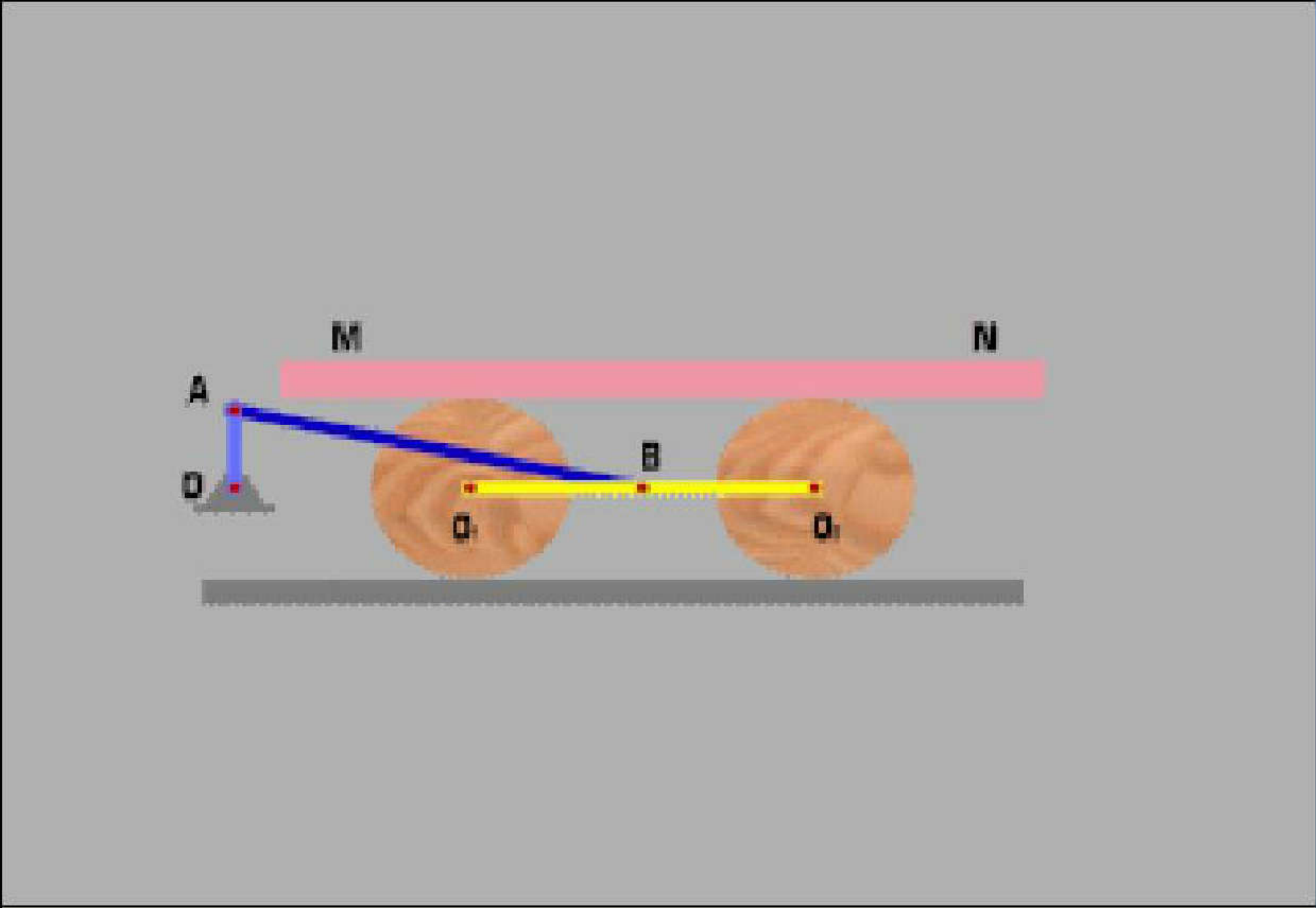
第六章 刚体平面运动

第九章 刚体的平面运动

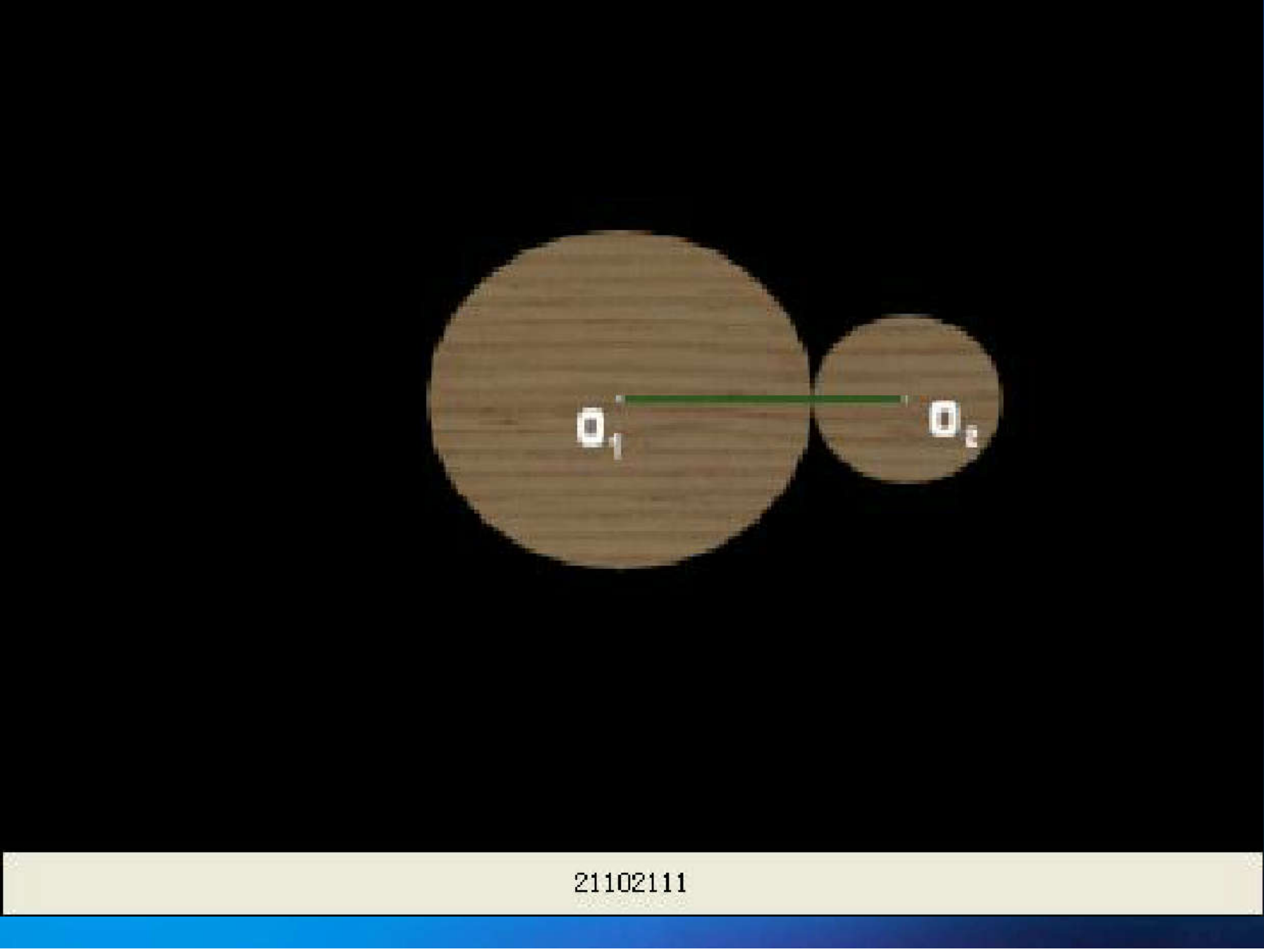
定义： 在刚体运动的过程中，刚体上的任一点(每一点)与某一固定平面间的距离始终保持不变。这种运动称为刚体的平面运动。


B
O
A
B
O
A


F
A
B
O
C
21103214

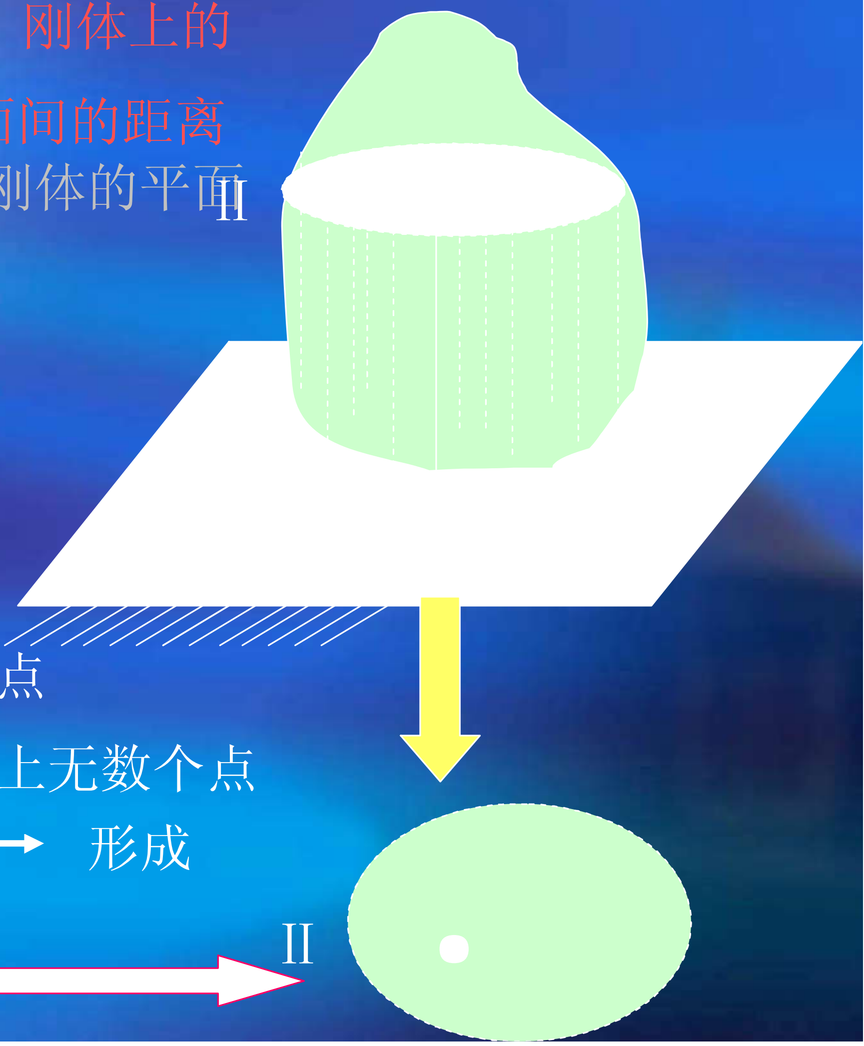


21104217


O_1
O_2
21102111

□ 基本定义

一.定义:在刚体运动的过程中，刚体上的任一点(每一点)与某一固定平面间的距离始终保持不变。这种运动称为刚体的平面运动。



二.平面图形:

刚体 $\xrightarrow{\text{找}}$ 点 $\xrightarrow{\text{作}}$ 直线

该直线方位不变 ⟶ 平动

⟶ 该点代表该直线上所有点

过该点作平面II // I ⟶ II上无数个点

⟶ 代表了无数条直线 ⟶ 形成该刚体

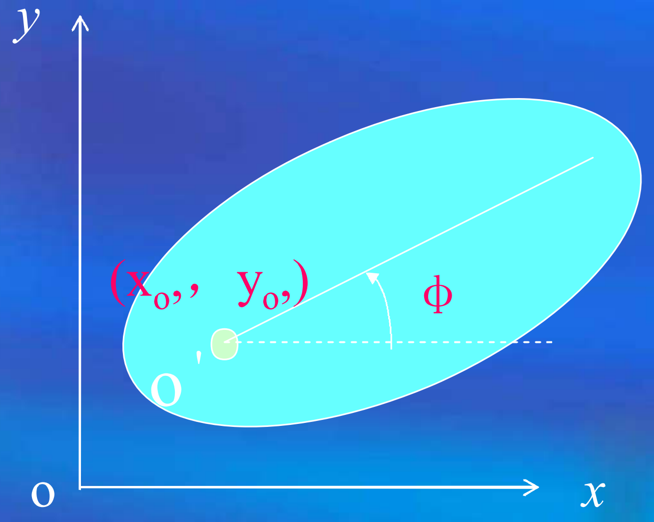
平面图形

三.运动方程:

$$x_{o'} = x(t)$$

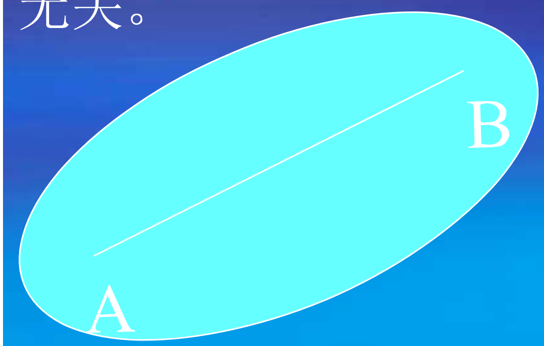
$$y_{o'} = y(t)$$

$$\varphi = \phi(t)$$



四.运动的分解:

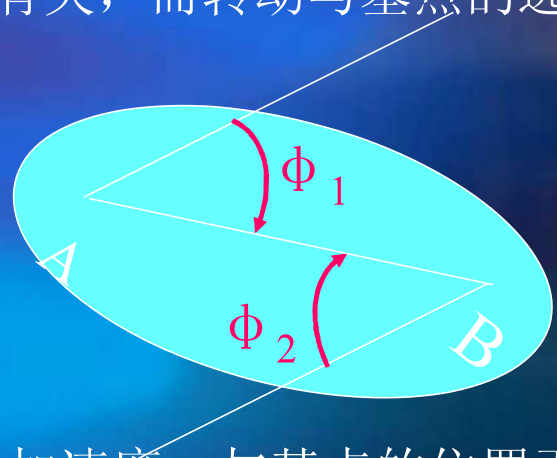
在平面图形上任找一点0’，称之为基点，则刚体的平面运动可以分解为随基点的平动和绕该基点的转动两部分。其平动与基点的选择有关，而转动与基点的选择无关。



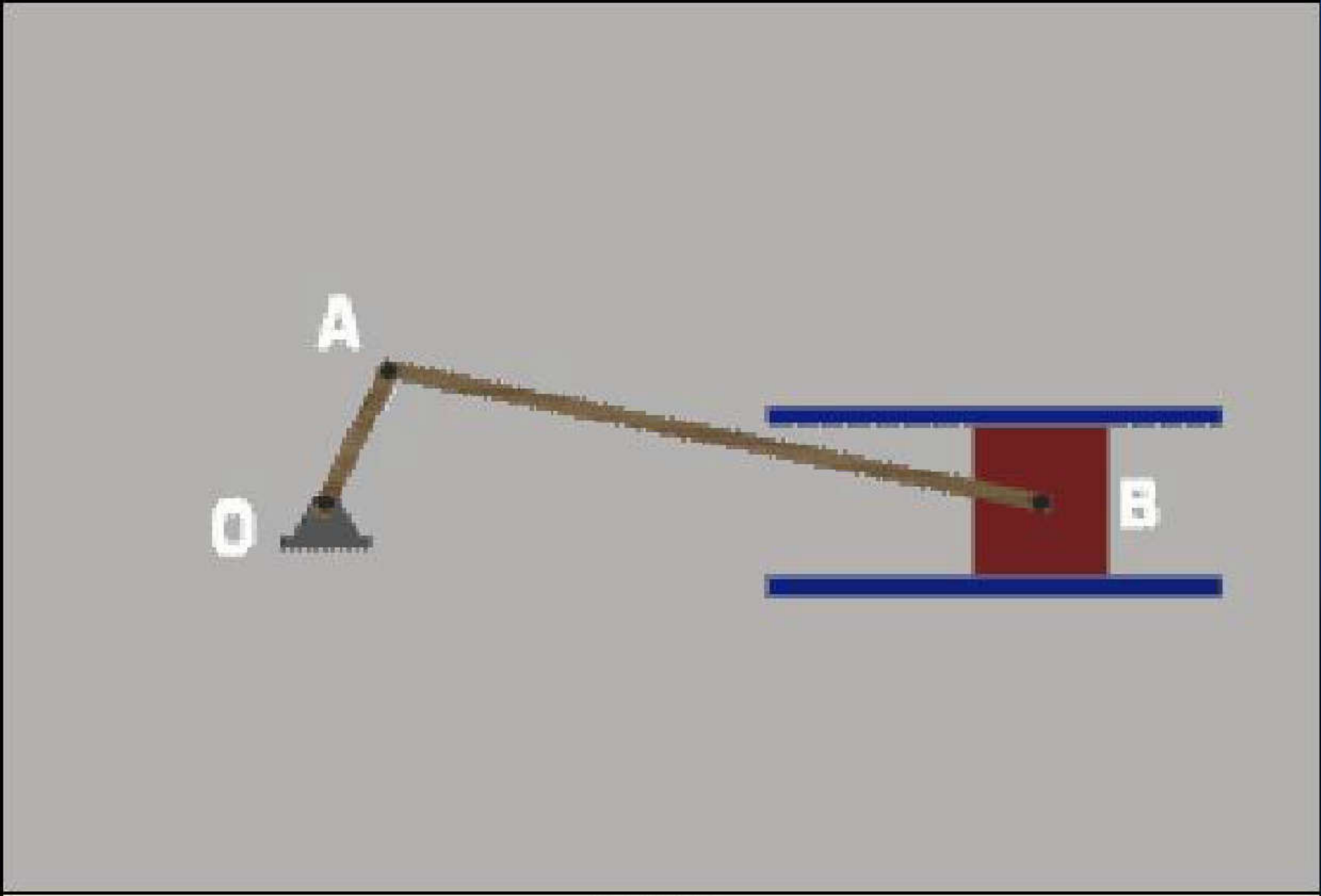
$$\varphi_1 = \phi_2 = \varphi$$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

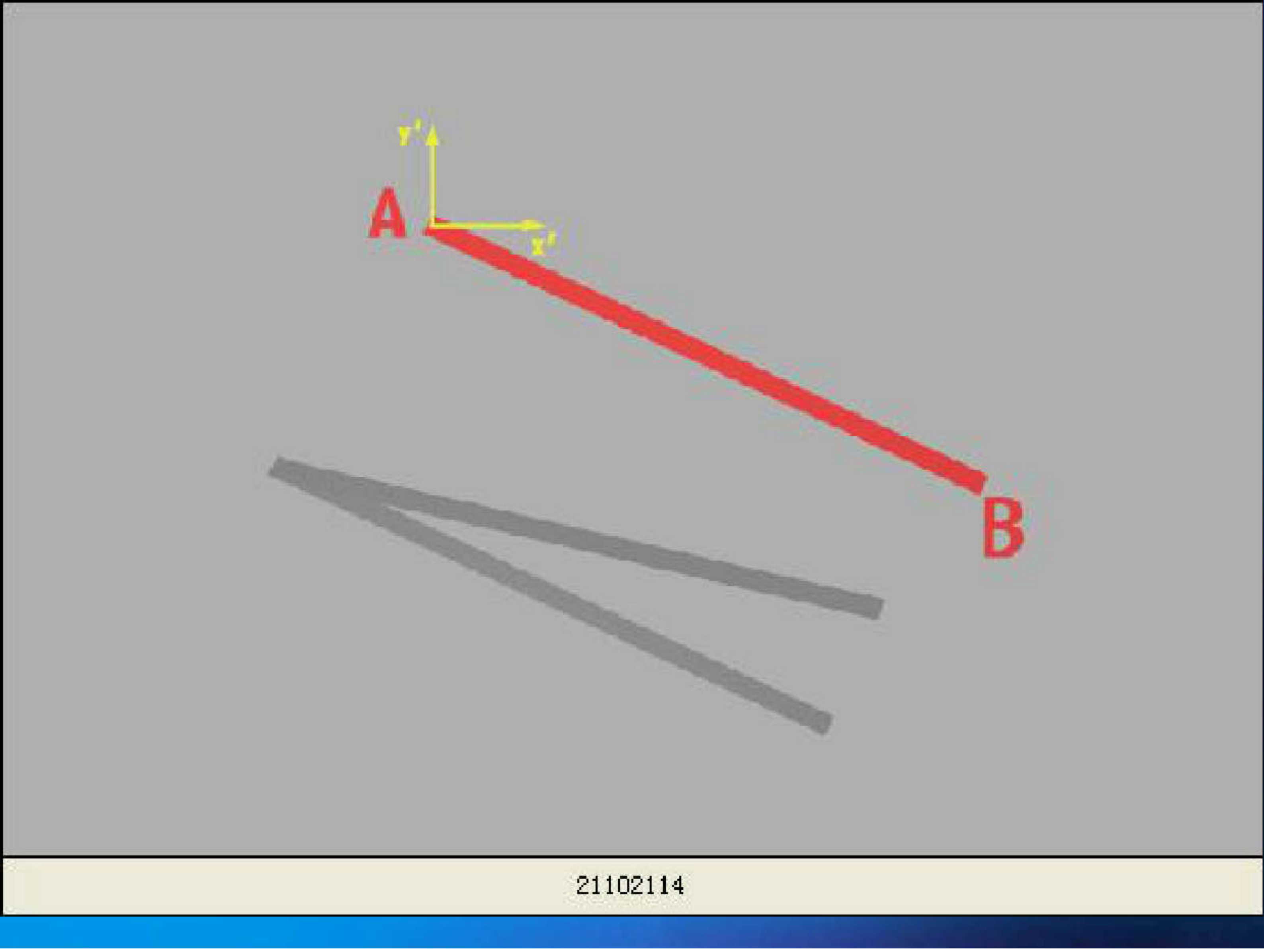
$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$



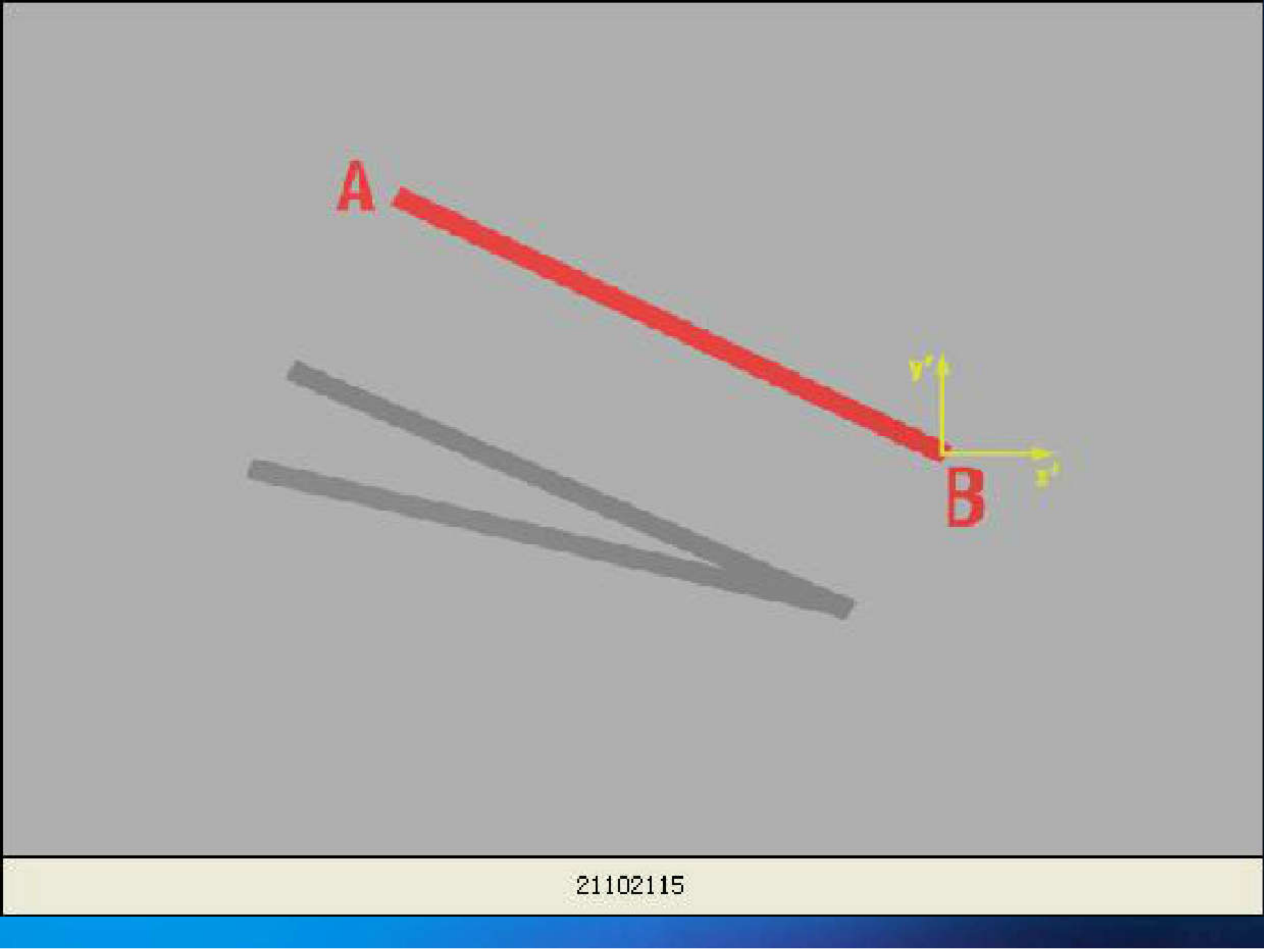
即:平面运动中的转角φ、角速度ω、角加速度ε与基点的位置无关！



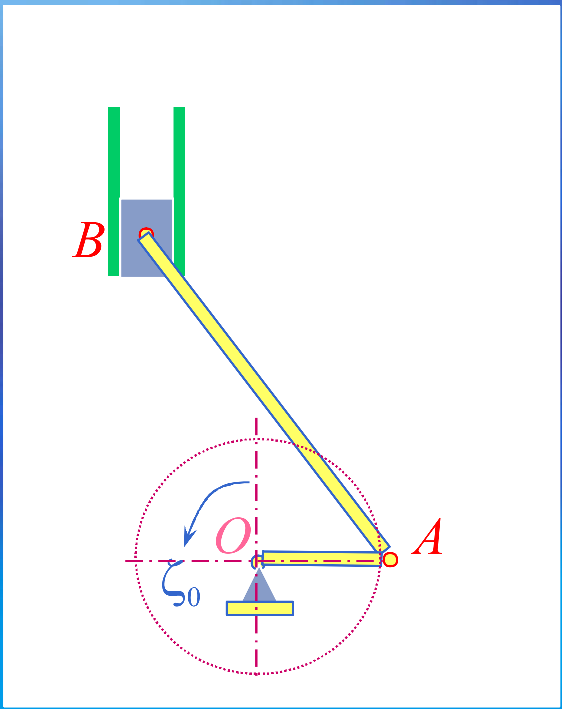
21102113



y'
A
x'
B
21102114


A
B
y'
x'
21102115

□ 速度分析—速度合成定理的应用



例 题 2—B

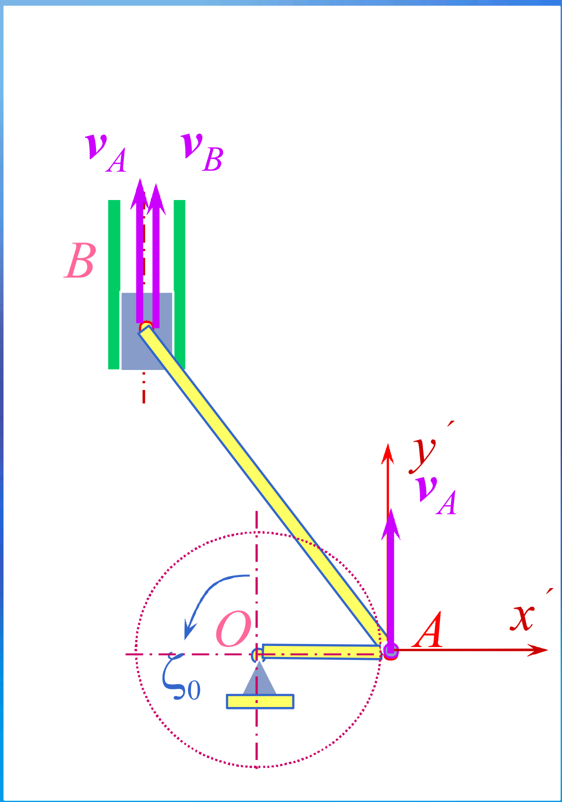
已知：曲柄—滑块机构中，曲柄$OA=r$，以等角速度 ζ_0绕O轴转动，曲柄处于水平位置；连杆$AB=l$。

求：1、滑块的速度v_B；

2、连杆AB的角速度ζ_{AB}。

□ 速度分析－速度合成定理的应用

例 题 2－B



基点法

解：1、选择基点A(速度已知)

$$v_A = r\,\zeta_0$$

2、建立平移系$A\,x'y'$

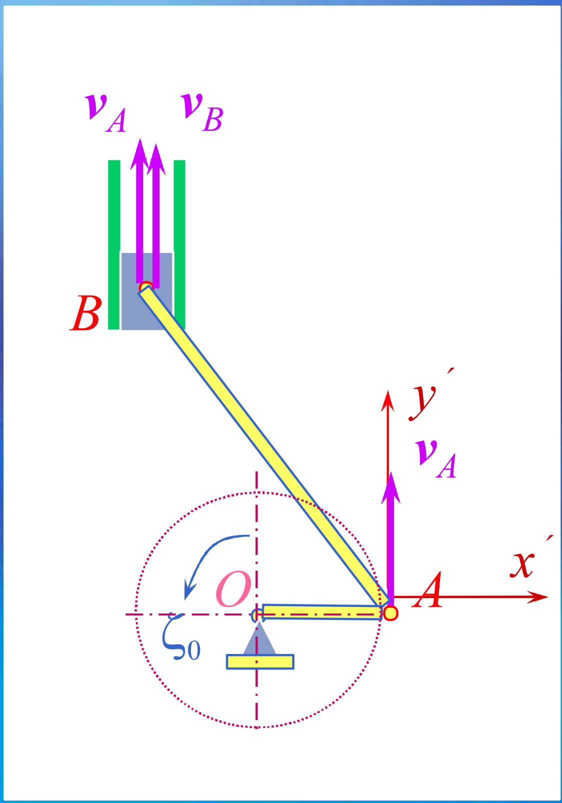
3、将滑块沿铅垂方向的运动(绝对运动)分解为：

跟随基点的平移－牵连运动；

以O点为圆心AB为半径的圆周运动－相对运动。

速度分析—速度合成定理的应用

例 题 2—B



基点法

解：

3、将滑块沿铅垂方向的运动(绝对运动)分解为：

跟随基点的平移—牵连运动；

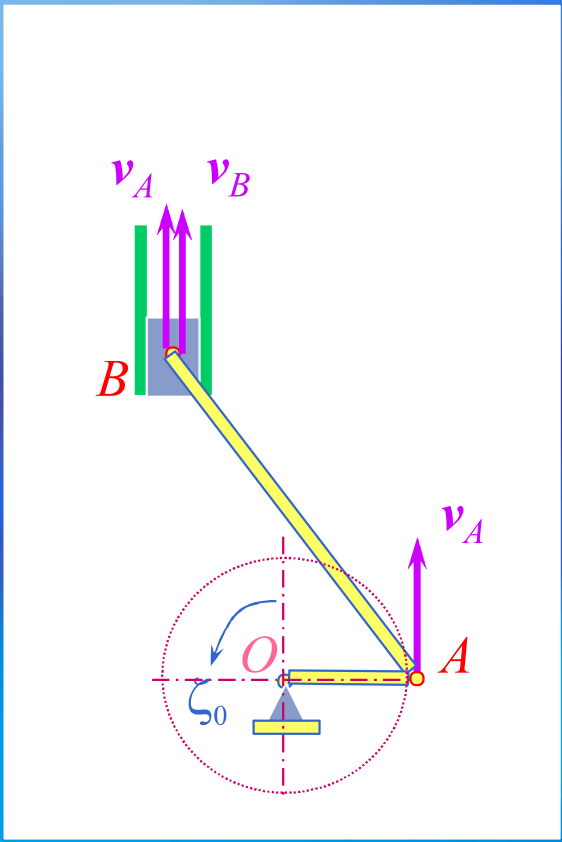
以O点为圆心AB为半径的圆周运动—相对运动。

4、应用速度合成定理

由于v_A与v_B共线，v_{AB}垂直于AB，根据速度合成定理所形成的平行四边形，只能是一种特殊情形——条直线。

速度分析－速度合成定理的应用

例 题 2－B



基点法

解： 4、应用速度合成定理

由于v_A与v_B共线，v_{BA}垂直于AB，根据速度合成定理所形成的平行四边形，只能是一种特殊情形 —— 一条直线。

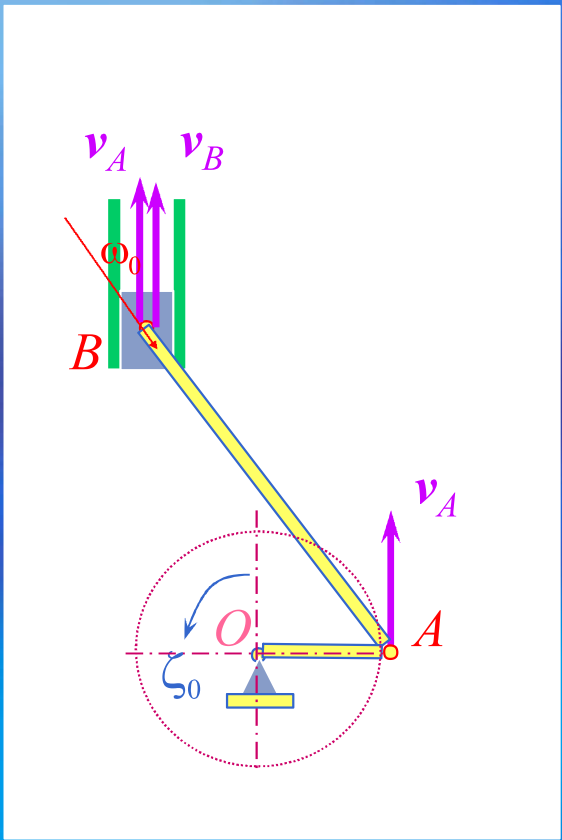
$$v_B = v_A = r\,\zeta_0\,\boldsymbol{j}$$

$$v_{BA} = 0\ ,\ \omega_{AB} = 0$$

瞬时平移

速度分析—速度合成定理的应用

例 题 2—B



速度投影法

解：应用速度投影定理

$$\boxed{v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta}$$

$$v_A = r\,\zeta_0 \text{，} \quad \alpha = \beta = \omega_0$$

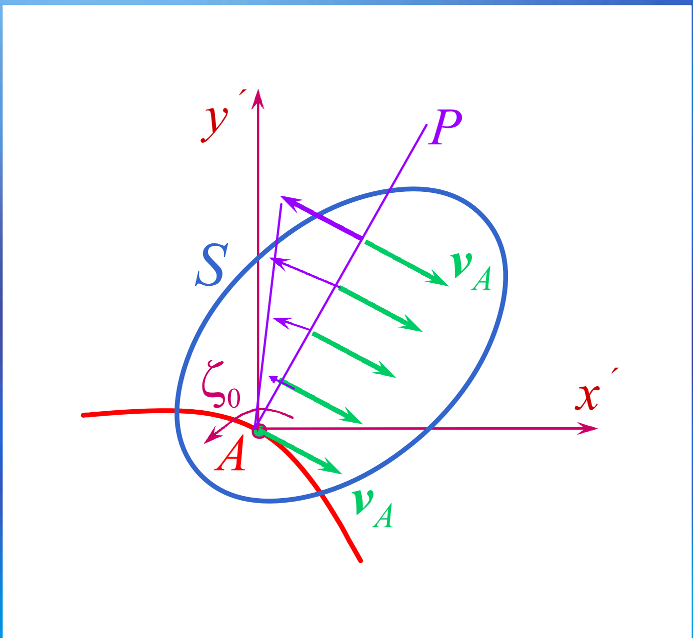
$$v_A = v_B = r\,\omega_0$$

$$v_{AB} = 0 \text{，} \quad \omega_{AB} = 0$$

瞬时平移

□ 瞬时速度中心及其应用

瞬时速度中心的概念



平面图形S，基点A，基点速度$\boldsymbol{v}_A$,平面图形角速度ζ。

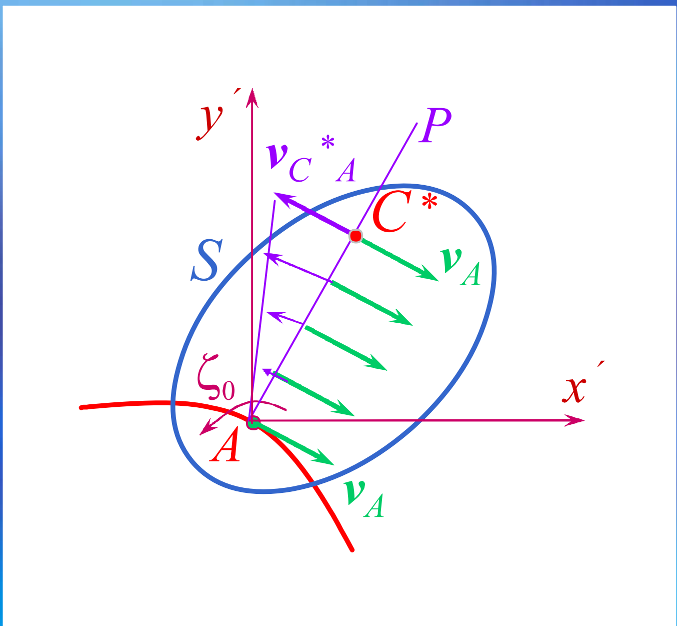
过A点作$\boldsymbol{v}_A$的垂直线PA，PA上各点的速度由两部分组成：

跟随基点平移的速度$\boldsymbol{v}_A$ —牵连速度，各点相同；

相对于平移系的速度$\boldsymbol{v}_{PA}$ —相对速度，自A点起线性分布。

瞬时速度中心及其应用

瞬时速度中心的概念

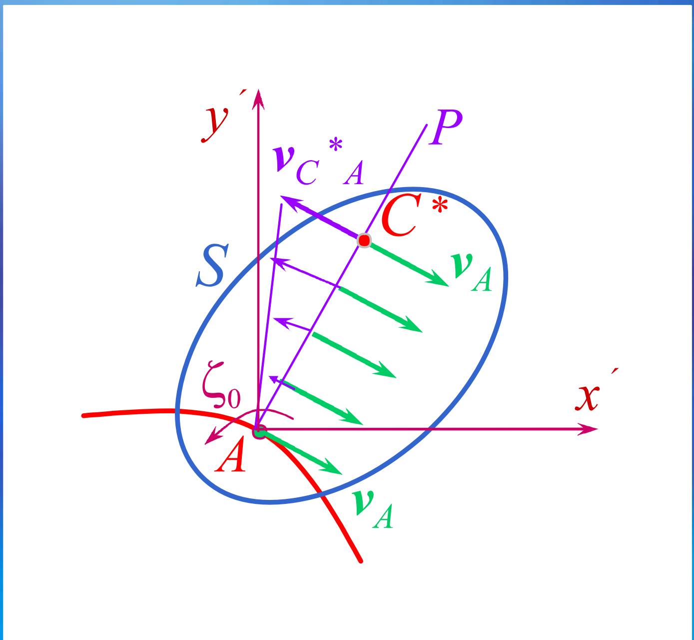


在直线PA上存在一点C^*，这一点的相对速度v_{C^*A}与牵连速度v_A矢量大小相等、方向相反。因此C^*点的绝对速度$v_{C^*}=0$。C^*点称为瞬时速度中心，简称为速度瞬心。

$$AC^*=\frac{v_A}{\omega}$$

瞬时速度中心及其应用

瞬时速度中心的概念



速度瞬心的特点

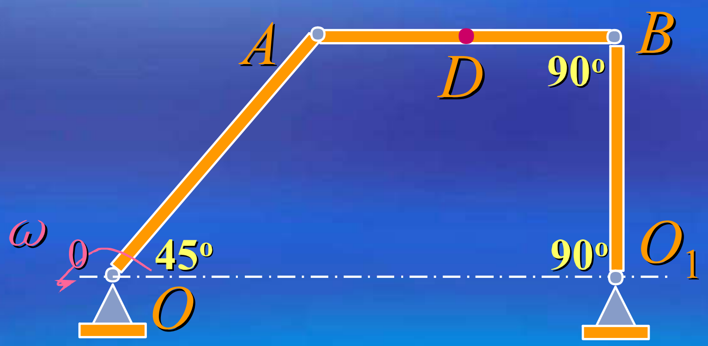
1、瞬时性—不同的瞬时，有不同的速度瞬心；

2、唯一性—某一瞬时只有一个速度瞬心；

3、瞬时转动特性—平面图形在某一瞬时的运动都可以视为绕这一瞬时的速度瞬心作瞬时转动.

❑ 瞬时速度中心及其应用

例 题 3



已知：四连杆机构中

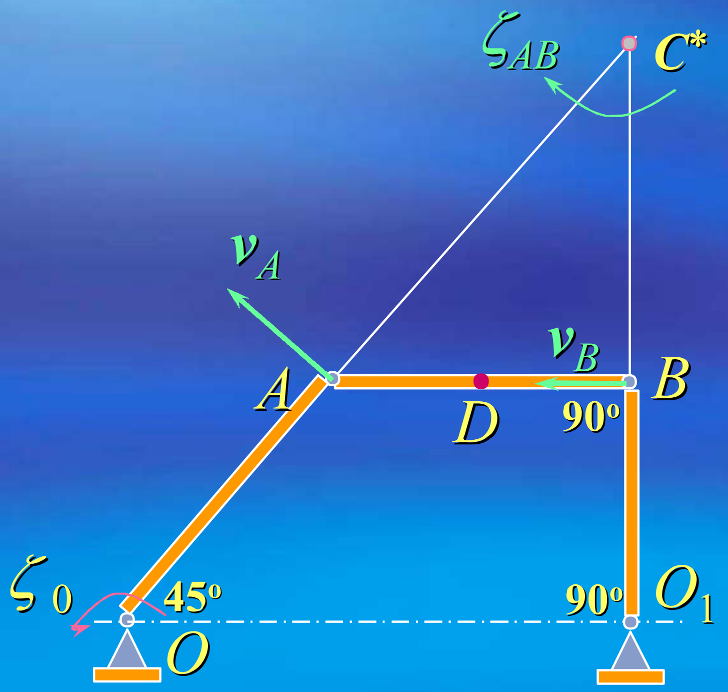
$$O_1B = l, AB = \frac{3}{2}l, AD = DB$$

OA以 ω_0绕O轴转动。

求：1、B和D点的速度；
2、AB杆的角速度。

瞬时速度中心及其应用

例 题 3



解：机构作平面运动，OA 和O_1B都作定轴转动，A、B 二点的速度v_A和v_B的方向都可以确定。作二者的垂直线，相交于C^*，此即速度瞬心。

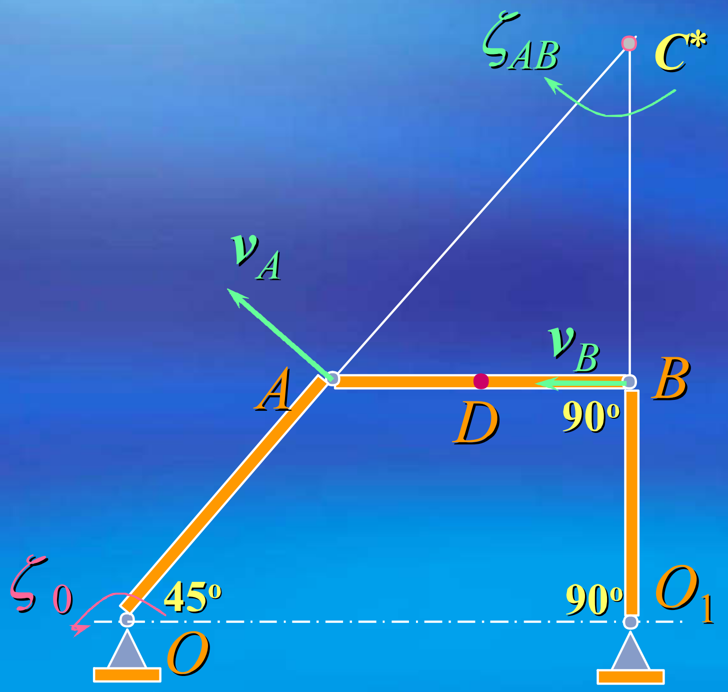
图中的几何关系：

$$OA = \sqrt{2}l, AB = BC^* = \frac{3}{2}l,$$

$$AC^* = \frac{3\sqrt{2}}{2}l, DC^* = \frac{3\sqrt{5}}{4}l$$

瞬时速度中心及其应用

例 题 3



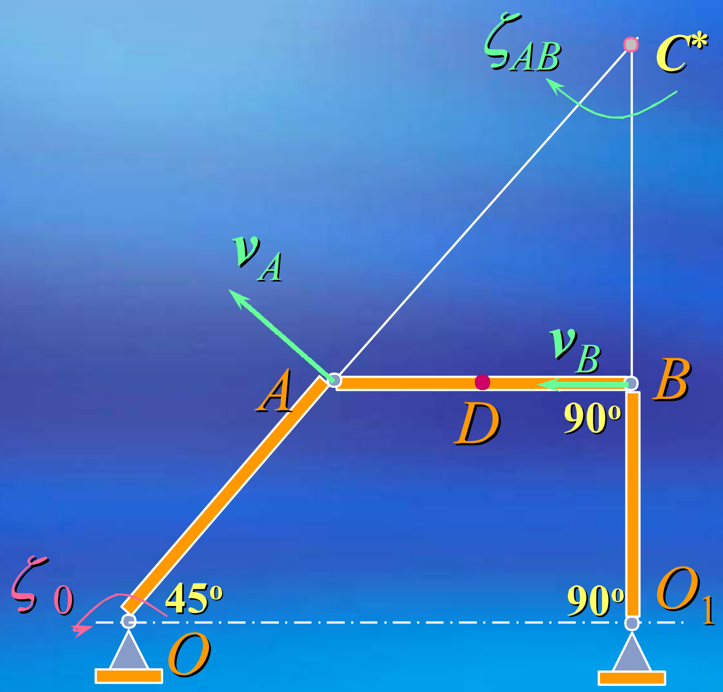
解：机构作平面运动，OA和O_1B都作定轴转动，A、B二点的速度v_A和v_B的方向都可以确定。作二者的垂直线，相交于C^*，此即速度瞬心。

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = \sqrt{2} l \omega_0$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC^*} = \frac{\sqrt{2} l \omega_0}{\frac{3\sqrt{2}}{2} l} = \frac{2}{3} \omega_0$$

□ 瞬时速度中心及其应用

例 题 3



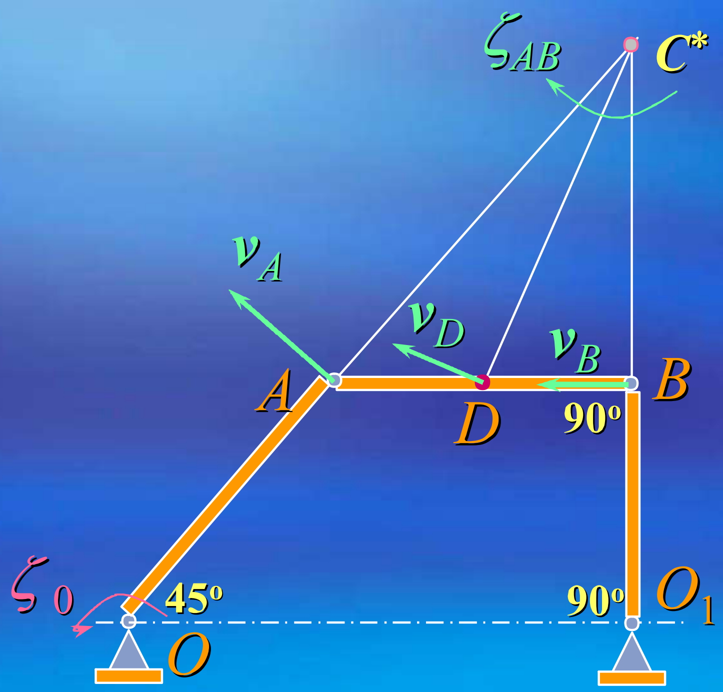
解：机构作平面运动，OA和O_1B都作定轴转动，A、B二点的速度v_A和v_B的方向都可以确定。作二者的垂直线，相交于C^*，此即速度瞬心。

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AC^*}=\frac{\sqrt{2}l\omega_0}{\frac{3\sqrt{2}}{2}l}=\frac{2}{3}\omega_0$$

$$v_B=BC^*\omega_{AB}=\frac{v_A}{AC^*}=\frac{3}{2}l\times\frac{2}{3}\omega_0=l\omega_0$$

□ 瞬时速度中心及其应用

例 题 3



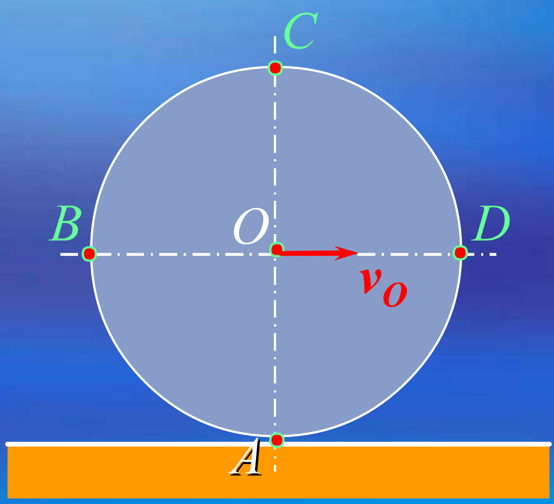
解：机构作平面运动，OA和O_1B都作定轴转动，A、B二点的速度v_A和v_B的方向都可以确定。作二者的垂直线，相交于C^*，此即速度瞬心。

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AC^*}=\frac{\sqrt{2}l\omega_0}{\frac{3\sqrt{2}}{2}l}=\frac{2}{3}\omega_0$$

$$v_D=DC^*\omega_{AB}=\frac{3\sqrt{5}}{2}l\times\frac{2}{3}\omega_0=\frac{\sqrt{5}}{2}l\omega_0$$

瞬时速度中心及其应用

例 题 4

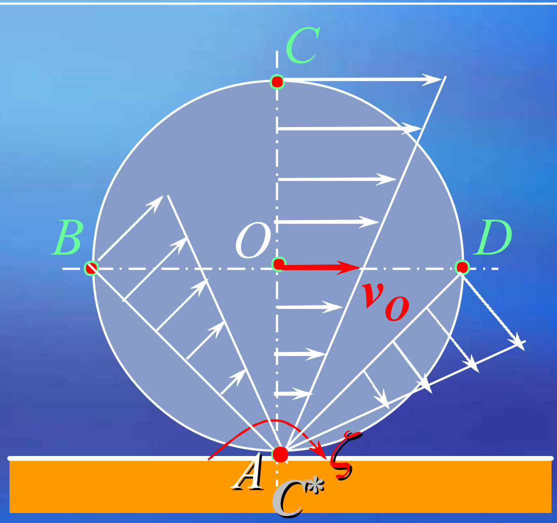


已知：半径为R的圆轮在直线轨道上作纯滚动。轮心速度为v_O。

求：轮缘上A、B、C、D四点的速度。

瞬时速度中心及其应用

例 题 4



解：圆轮与地面接触点A，由于没有相对滑动，因而在这一瞬时，A点的速度$v_A=0$。A点即为速度瞬心C^*。假设这一瞬时的角速度为 ω 。

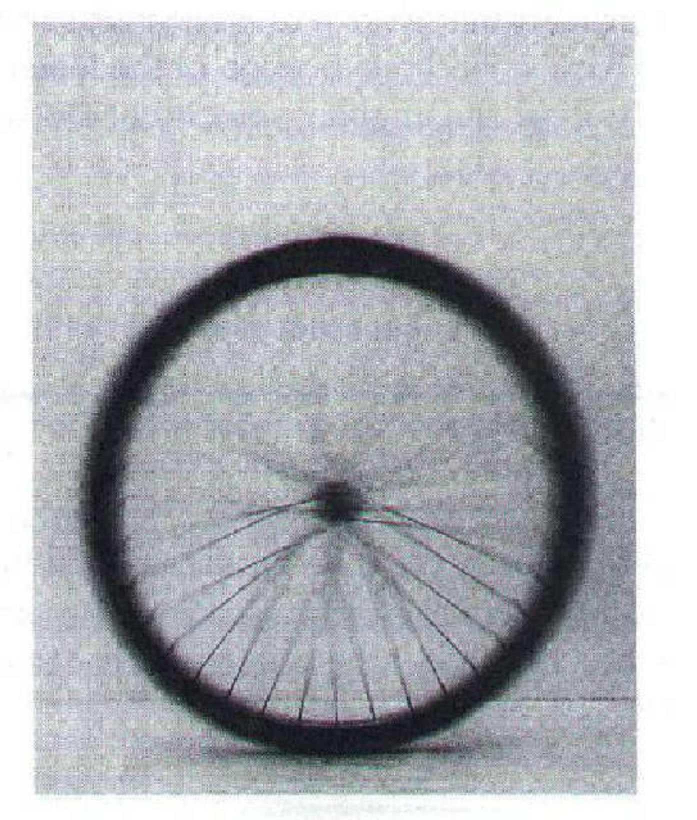
由$v_O=R\omega$ 得到$\omega=\dfrac{v_O}{R}$

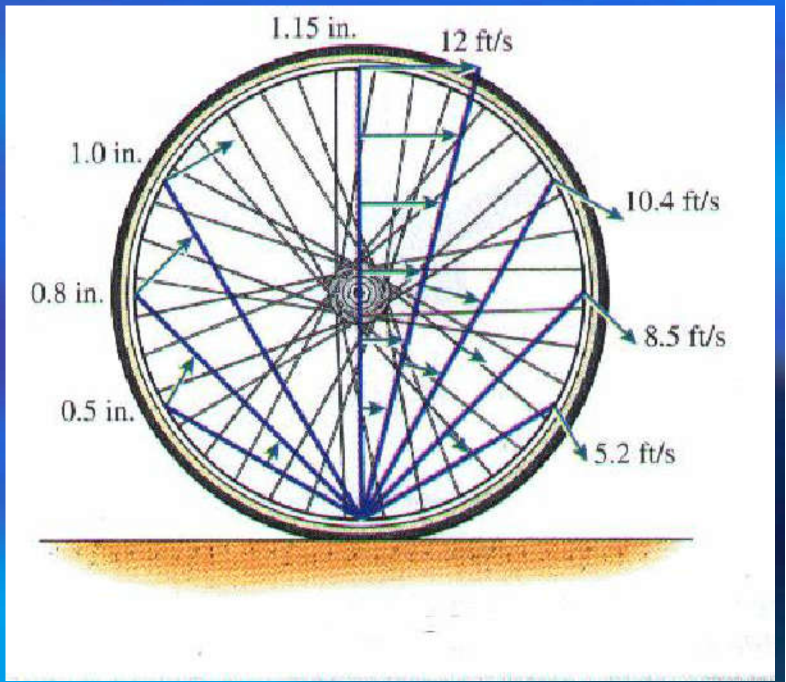
$$v_A=0,\quad v_B=\sqrt{2}v_0$$

$$v_C=2v_0,\quad v_D=\sqrt{2}v_0$$

瞬时速度中心及其应用

例 题 4





刚体的平面运动

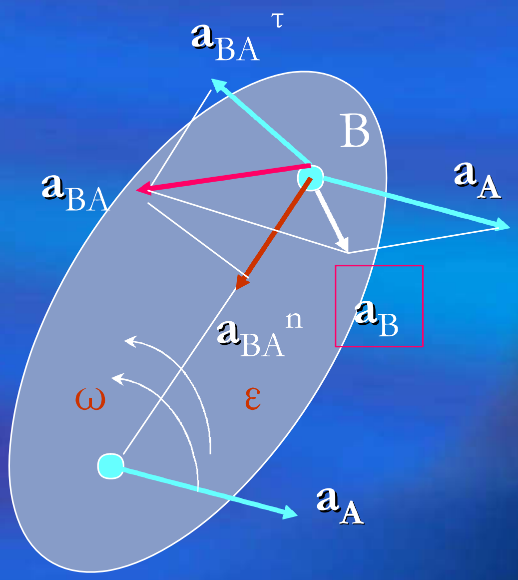
- 加速度分析

——用基点法求平面图形内各点的加速度合成定理的应用

用基点法求平面图形内各点的加速度

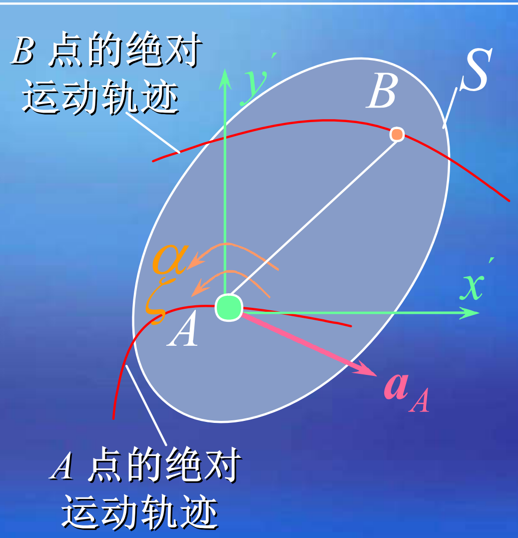
将平面图形的运动分解为：1.随基点的A的平动；2.绕基点A的转动。

图形中B点的运动可看成两个运动的合成，其加速度可以用点的合成运动的加速度合成定理求出。



$$a_B = a_A + a_{BA}^{n} + a_{BA}^{\tau}$$

用基点法求平面图形内各点的加速度



如果已知平面图形上一点(A)的加速度a_A、图形的角速度 ω与角加速度 ε，应用加速度合成定理，可以确定平面图形上任意点的加速度：

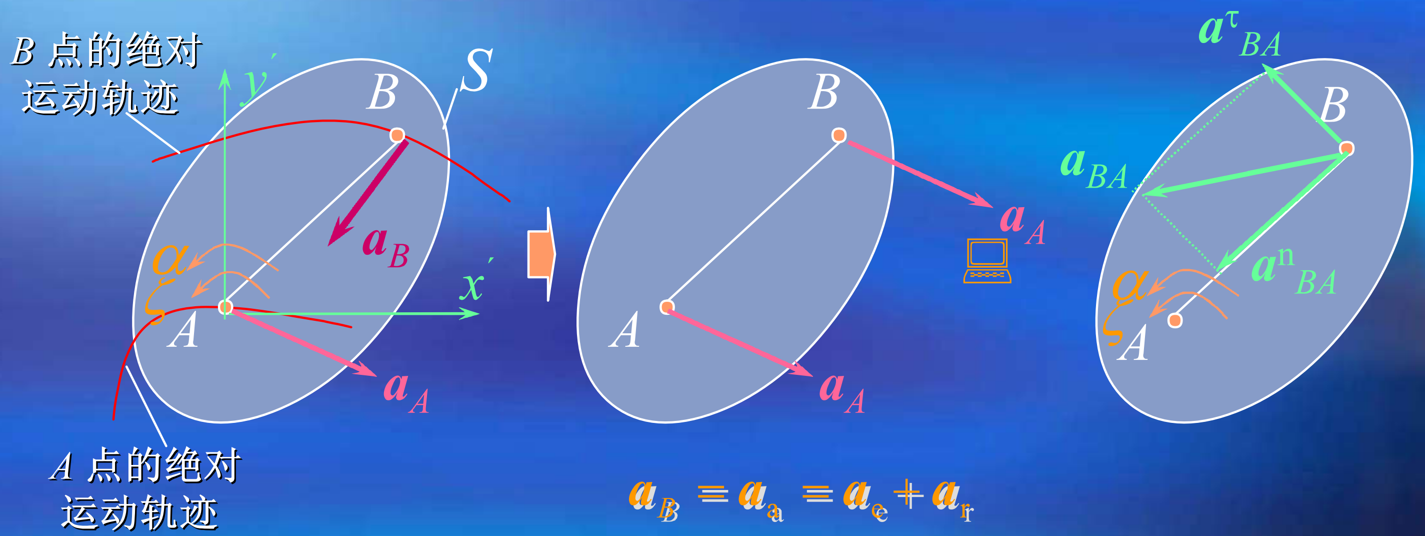
1、选择加速度已知的点为基点；

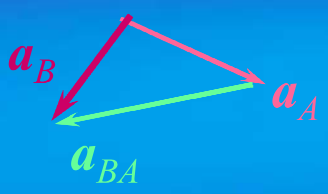
2、建立平移系；

3、应用牵连运动为平移的加速度合成定理 $a_a=a_e+a_r$ 可以确定图形上任意点的加速度。这时，

$$a_a = a_B \quad , \quad a_e = a_A \quad , \quad a_r = a_{BA}$$

用基点法求平面图形内各点的加速度





$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_B &= \boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r \\
&= \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^{\tau}_{BA} + \boldsymbol{a}^{n}_{BA} \\
&= \mathbf{a}_A + \varepsilon \times \mathbf{r}_{AB} + \omega \times \mathbf{v}_{BA} \\
&= \mathbf{a}_A + \varepsilon \times \mathbf{r}_{AB} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{AB})
\end{aligned}
$$

用基点法求平面图形内各点的加速度

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_\mathrm{a} = \boldsymbol{a}_\mathrm{e} + \boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{BA}^{n}$$

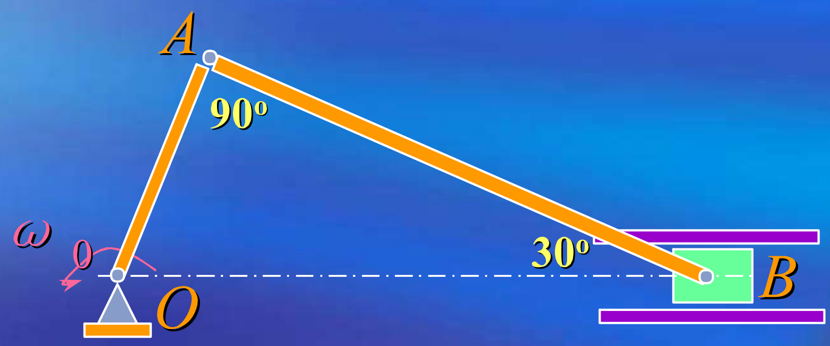
$$= \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{BA}$$

$$= \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB})$$

平面图形上任意一点的加速度等于基点的加速度与这一点对于以基点为坐标原点的平动参考系的相对切向加速度和法向加速度的矢量和。

用基点法求平面图形内各点的加速度

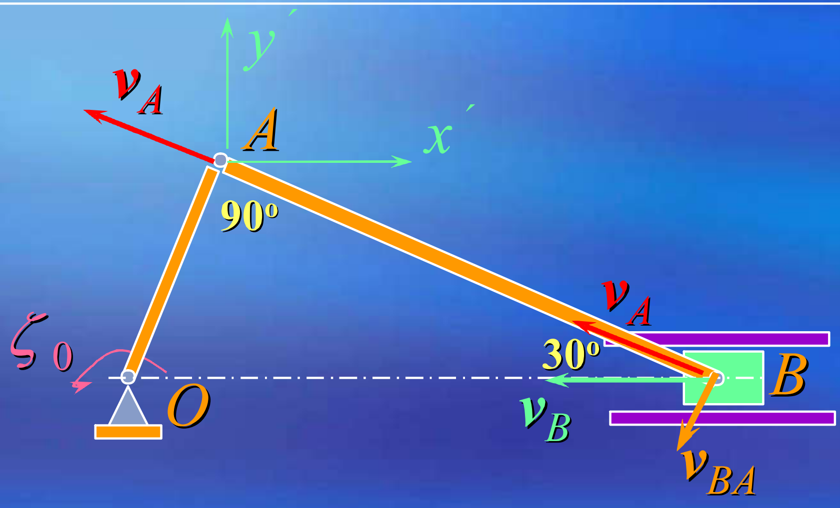
例 题 5



曲柄—滑块机构，$OA=r$，$AB=l$，曲柄以等角速度 ω_0绕O轴旋转。求：图示瞬时，滑块B的加速度a_B和连杆AB的角加速度 ε_{AB}

用基点法求平面图形内各点的加速度

例 题 5



解：1、确定连杆的角速度：

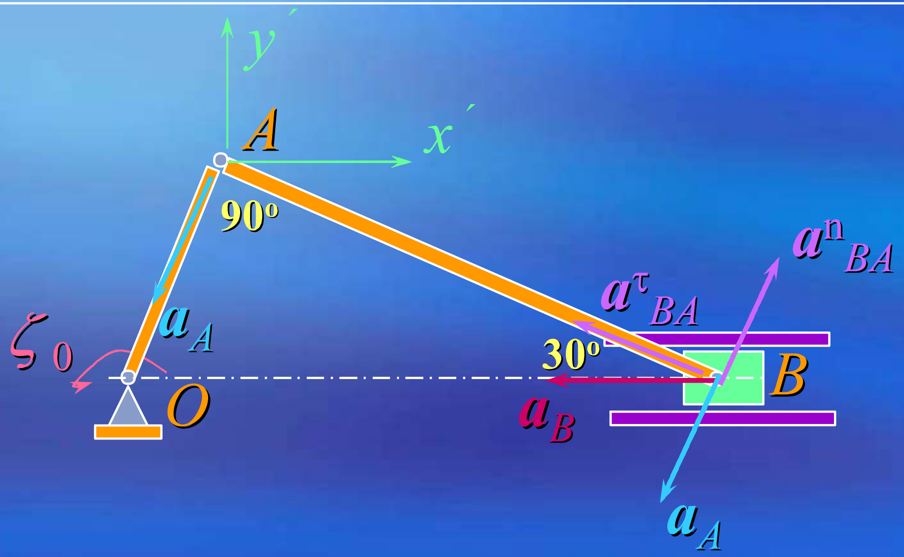
以A为基点，建立平移系$Ax'y'$，

$$v_A = r\omega_0, \quad v_{AB} = v_A \tan 30^\circ = r\omega_0 \tan 30^\circ$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{l} = \frac{r}{l}\omega_0 \tan 30^\circ = \frac{\omega_0}{3}$$

用基点法求平面图形内各点的加速度

例 题 5



解： $\omega_{AB} = \dfrac{\omega_0}{3}$

2、加速度分析

A点的加速度

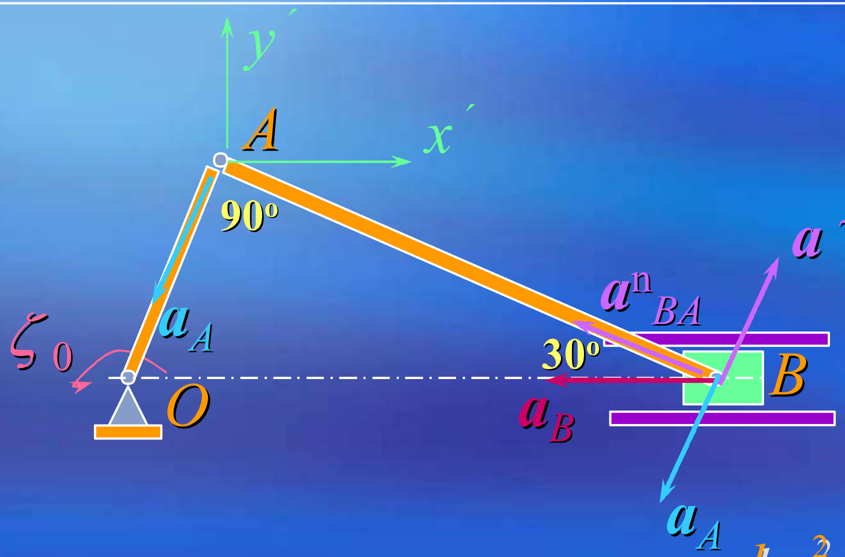
$$a_A = r\omega_0^2$$

B点的加速度：根据加速度合成定理 $\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^{\tau}_{BA} + \boldsymbol{a}^{n}_{BA}$

$a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_{AB} l$　　$a^{n}_{BA} = AB \times \omega_{AB}^2 = \dfrac{l\omega_0^2}{9}$　　a_B 沿着水平方向

用基点法求平面图形内各点的加速度

例 题 5



解： 2、角速度分析

B点的加速度：根据加速度合成定理

$$a_B = a_A + a^{\tau}_{BA} + a^{n}_{BA}$$

$$a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_{AB} l$$

$$a^{n}_{BA} = AB \times \omega^2_{AB} = \frac{l\omega_0^2}{9}$$

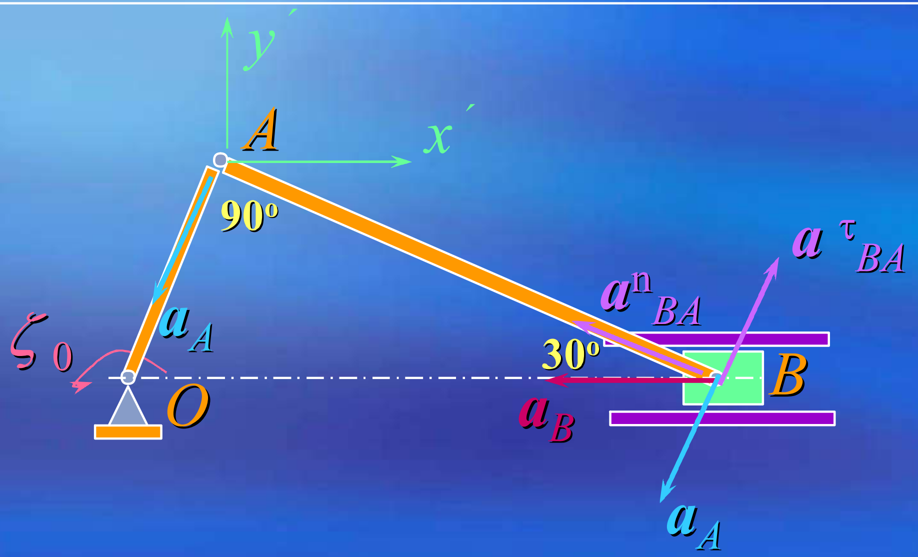
a_B沿着水平方向

将加速度合成定理中各项向AB方向投影

$$a_B \cos 30^\circ = a^{n}_{AB} = \frac{l\omega_0^2}{9}, \qquad a_B = \frac{2\sqrt{3}}{27} l\omega_0^2$$

用基点法求平面图形内各点的加速度

例 题 5



解： 2、角速度分析

*B*点的加速度：根据加速度合成定理

$$a_B = a_A + a^\tau_{BA} + a^n_{BA}$$

$$a^\tau_{BA} = \varepsilon_{AB} l$$

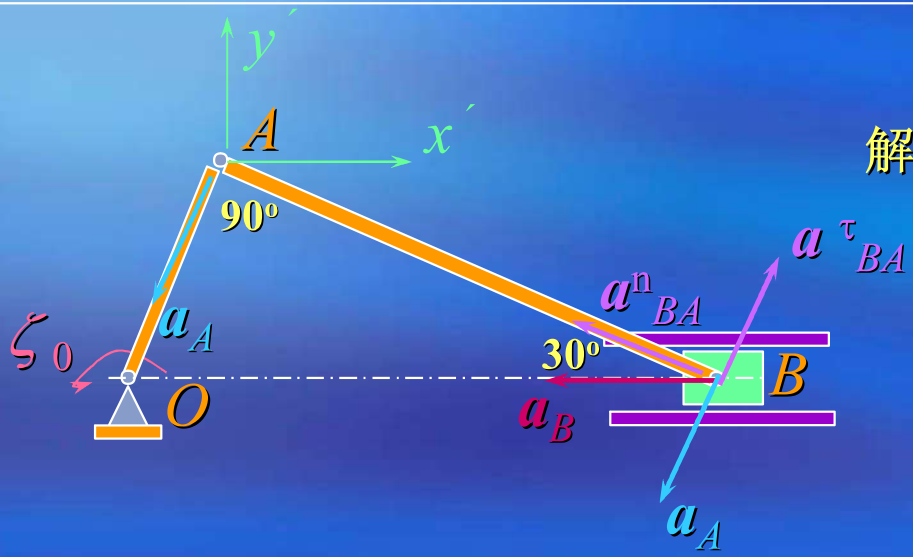
将加速度合成定理中各项向a^τ_{BA}方向投影

$$a_B \sin 30^\circ = a_A - a^\tau_{AB}\,, \qquad a^\tau_{BA} = r\omega_0^2 - \frac{\sqrt{3}}{27} l\omega_0^2 = (r - \frac{\sqrt{3}}{27} l)\omega_0^2$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a^\tau_{BA}}{l} = (\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{27})\omega_0^2 = \frac{8\sqrt{3}}{27}\omega_0^2$$

用基点法求平面图形内各点的加速度

例 题 5



解： 3、关于约束的作用

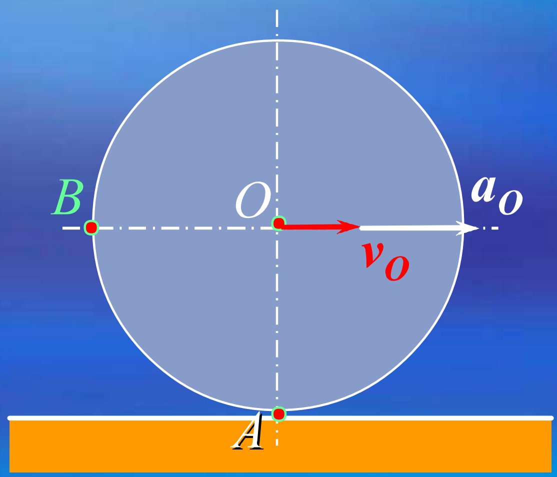
B点的加速度：根据加速度合成定理

$$a_B = a_A + a^\tau_{BA} + a^n_{BA} = a_A + \varepsilon_{BA} \times r_{AB} + \omega_{BA} \times (\omega_{BA} \times r_{AB})$$

一般情形下 a_B 的大小和方向都是未知的。因此，确定角加速度α_{BA}至关重要。本例利用了滑块的约束条件，确定了滑块的加速度a_B的方向。

用基点法求平面图形内各点的加速度

例 题 6

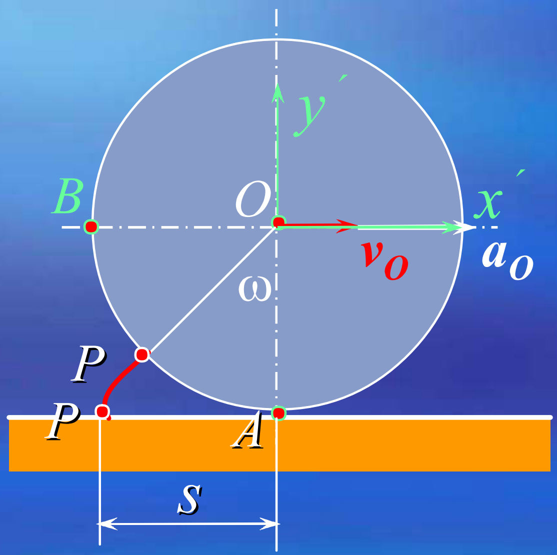


已知：半径为R的圆轮在直线轨道上作纯滚动。轮心速度为v_O、加速度为a_O。

求：轮缘上A、B二点的速度和加速度。

用基点法求平面图形内各点的加速度

例 题 6



解：1、基点法的速度分析：

确定圆轮的转动角速度

以O点为基点，建立平移系$Ox'y'$。轮缘上任意点P的运动可以分解为：

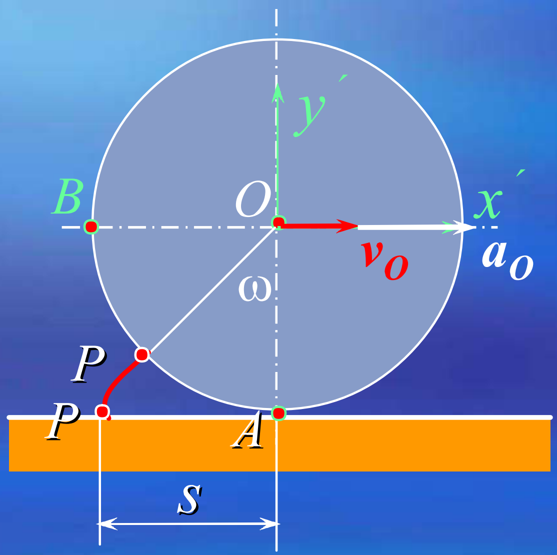
跟随基点O的平移－牵连运动；

相对于平移系$Ox'y'$、绕O点的转动－相对运动。

为建立转动角速度与轮心速度之间的关系，考察圆轮滚动时P点转过的角度ω与轮心移动的距离s之间的关系。

用基点法求平面图形内各点的加速度

例 题 6



解：1、基点法的速度分析：

确定圆轮的转动角速度

为建立转动角速度与轮心速度之间的关系，考察圆轮滚动时P点转过的角度ω与轮心移动的距离s之间的关系。

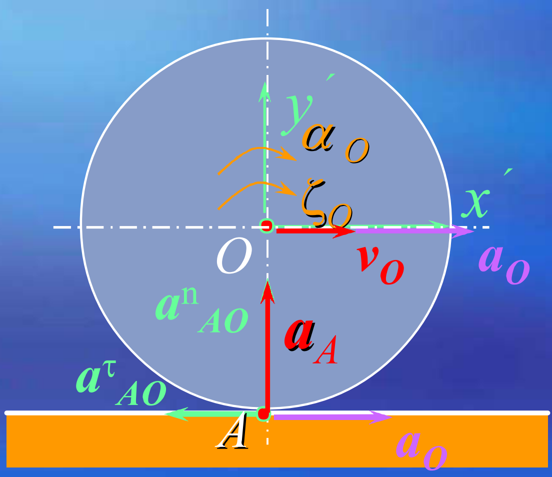
$$s = R\varphi,\quad \dot{s} = R\dot{\varphi},\quad v_O = R\omega_O,\quad \omega_O = \frac{v_O}{R}$$

进而求得圆轮滚动时的角加速度

$$\alpha_O = \dot{\omega}_O = \frac{\dot{v}_O}{R} = \frac{a_O}{R}$$

用基点法求平面图形内各点的加速度

例 题 6



解：2、加速度分析：

$$\omega_O = \frac{v_O}{R} \qquad \alpha_O = \frac{a_O}{R}$$

A点：

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}^\tau_{AO} + \boldsymbol{a}^n_{AO}$$

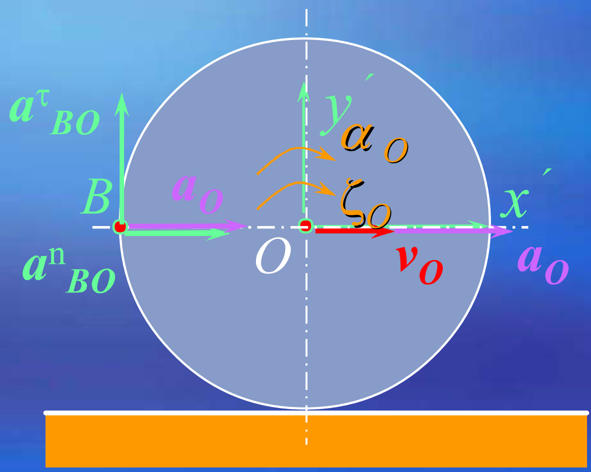
$$a^\tau_{AO} = R\alpha_O = a_O$$

$$a^n_{AO} = R\omega_O^2 = \frac{v_O^2}{R}$$

$$\boldsymbol{a}_A = \frac{v_O^2}{R}\boldsymbol{j}$$

用基点法求平面图形内各点的加速度

例 题 6



解：2、加速度分析：

$$\omega_O = \frac{v_O}{R} \qquad \alpha_O = \frac{a_O}{R}$$

B点：

$$a_B = a_O + a^{\tau}_{BO} + a^{n}_{BO}$$

$$a^{\tau}_{BO} = R\alpha_O = a_O$$

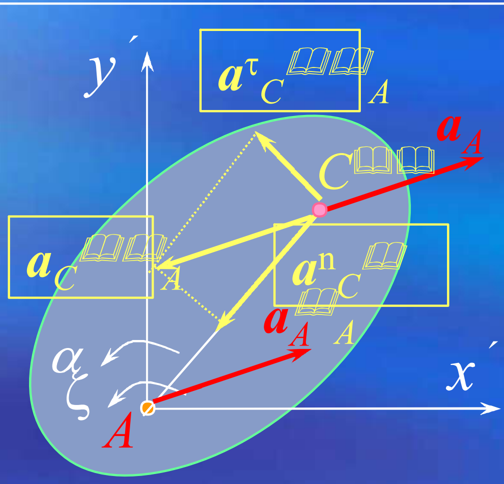
$$a^{n}_{BO} = R\omega_O^2 = \frac{v_O^2}{R}$$

$$a_B = (a_O + \frac{v_O^2}{R})i + a_O j$$

刚体的平面运动

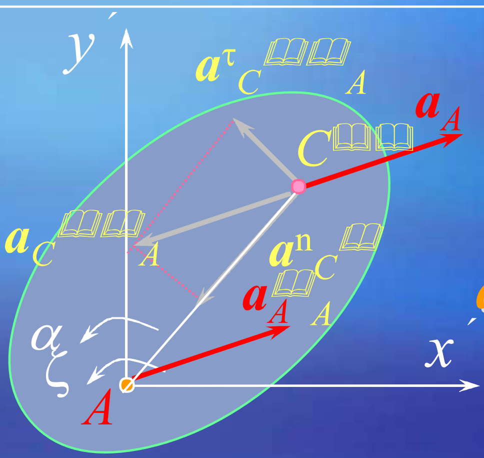
- 瞬时加速度中心概念

瞬时加速度中心概念



在某一瞬时，运动的平面图形上，唯一存在加速度为零的点，这一点称为这一瞬时的瞬时加速度中心，简称为加速度瞬心。用C表示。

□ 瞬时加速度中心概念



加速度瞬心的坐标

根据加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_{C^*} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^{\tau}_{C^*A} + \boldsymbol{a}^{n}_{C^*A}$$

$$= \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}_{AC^*} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{AC^*})$$

$$= \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}_{AC^*} - \omega^2\boldsymbol{r}_{AC^*}$$

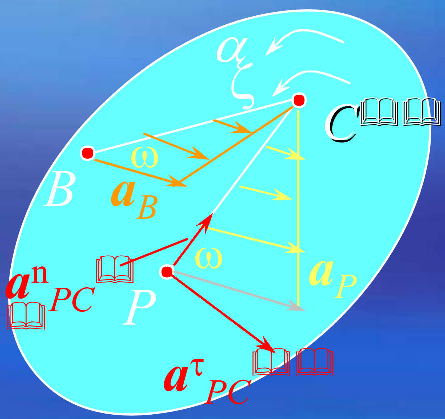
$$a_{Ax'} - \alpha y' - \omega^2 x' = 0$$

$$a_{Ay'} - \alpha x - \omega^2 y' = 0$$

$C^*(x', y')$

□ 瞬时加速度中心概念

根据加速度瞬心求得任意点的加速度



如果已知加速度瞬心的位置，以及这一瞬时绕加速度瞬心的角速度和角加速度，根据加速度合成定理，可以求得平面图形上任意一点的加速度：

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}^{\tau}_{PC^{**}} + \boldsymbol{a}^{n}_{PC^{**}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_{C^{**}P} - \omega^2 \times \boldsymbol{r}_{C^{**}P}$$

点的复合运动

- 刚体平面运动分解为转动和转动

刚体平面运动分解为转动和转动

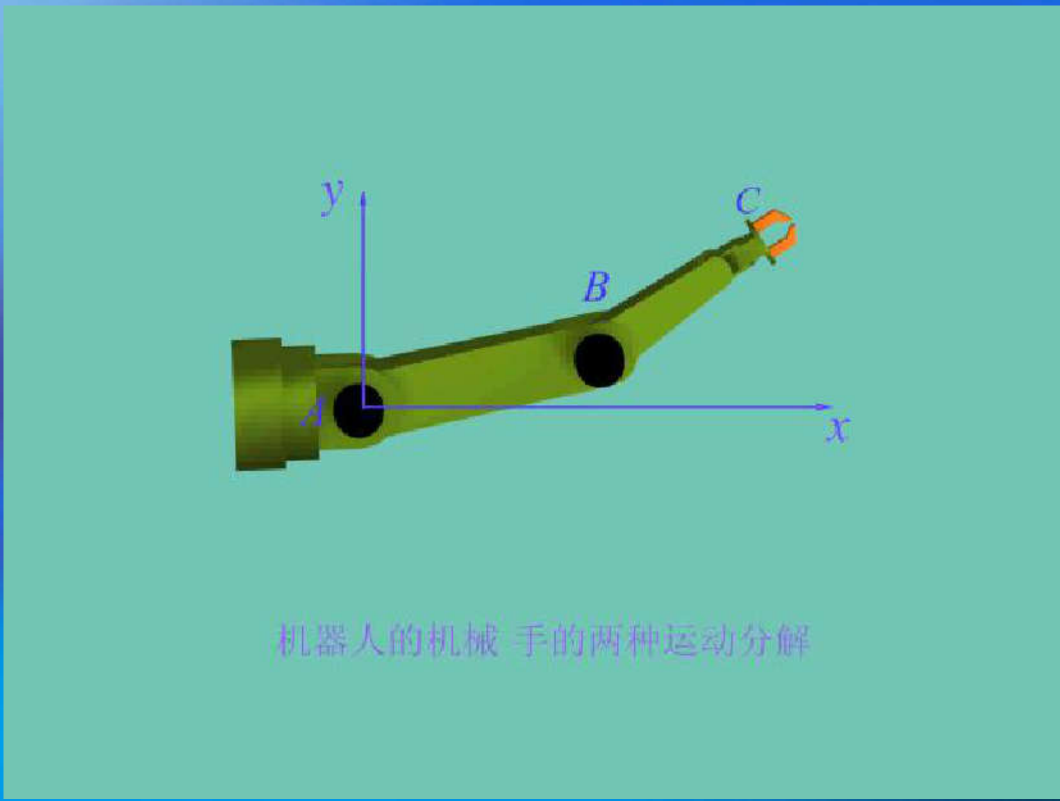
- 一种运动的两种分解方法
- 刚体绕平行轴转动时的角速度合成定理

❑ 刚体平面运动分解为转动和转动

♉ 一种运动的两种分解方法

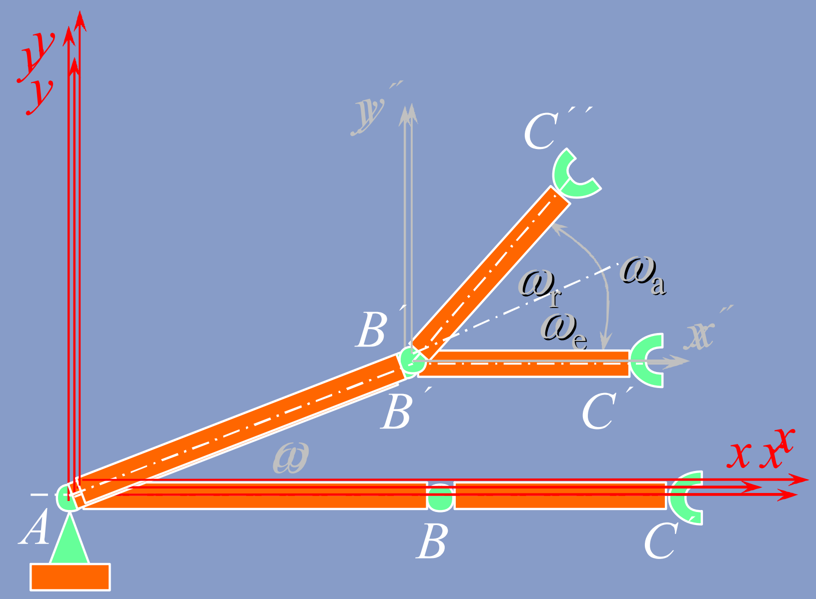
刚体平面运动分解为转动和转动

♉ 一种运动的两种分解方法



刚体平面运动分解为转动和转动

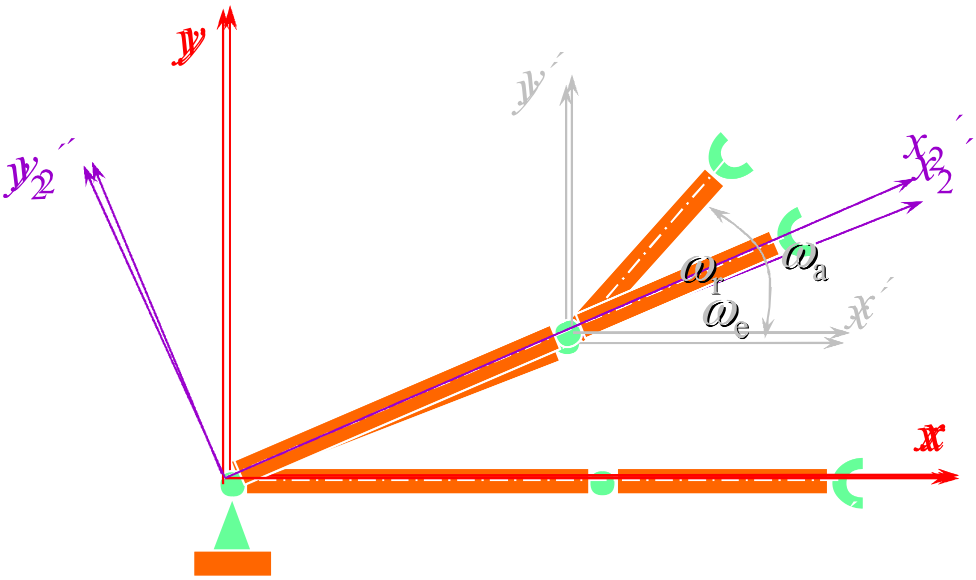
一种运动的两种分解方法



*BC*先跟随平移系转动，再相对平移系转动

刚体平面运动分解为转动和转动

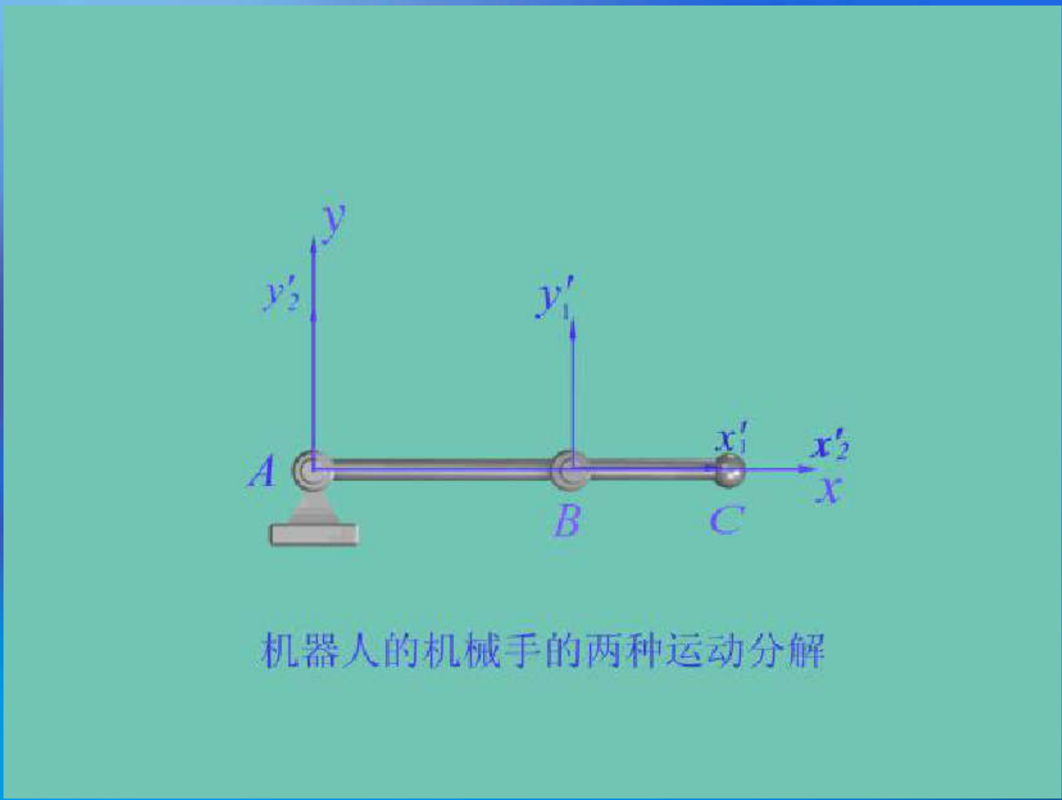
一种运动的两种分解方法



*BC*先跟随转动系转动，再相对平移系转动

刚体平面运动分解为转动和转动

一种运动的两种分解方法

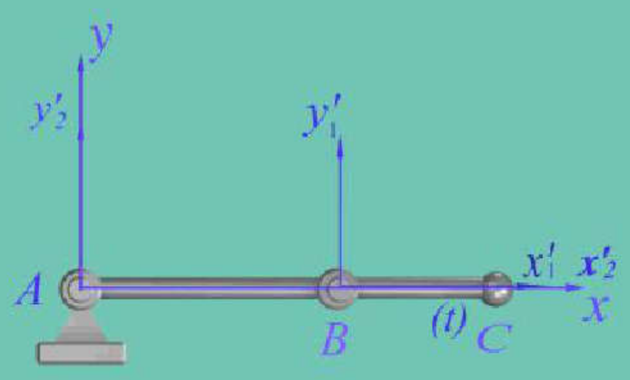


$\omega_e>0,\ \omega_r>0$

$$\omega_a=\omega_e+\omega_r$$

刚体平面运动分解为转动和转动

一种运动的两种分解方法



机器人的机械手的两种运动分解

$\omega_e > 0$, $\omega_r < 0$

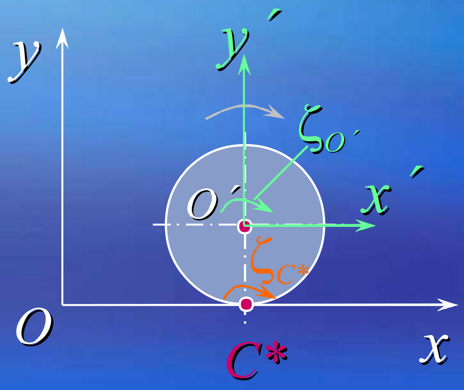
$$\boxed{\omega_a = \omega_e - \omega_r}$$

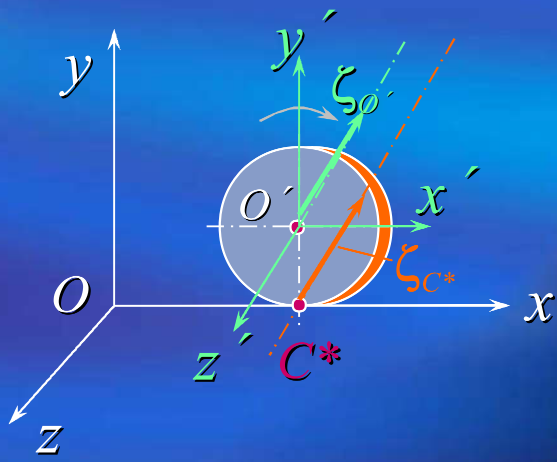
❑ 刚体平面运动分解为转动和转动

♉ 刚体绕平行轴转动时的角速度合成定理

刚体平面运动分解为转动和转动

刚体绕平行轴转动时的角速度合成定理





平 面

瞬 心

角速度代数量

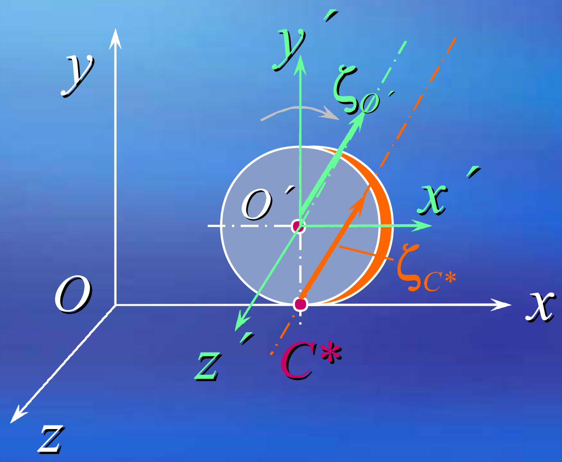
立 体

瞬 轴

角速度矢量

❑ 刚体平面运动分解为转动和转动

刚体绕平行轴转动时的角速度合成定理

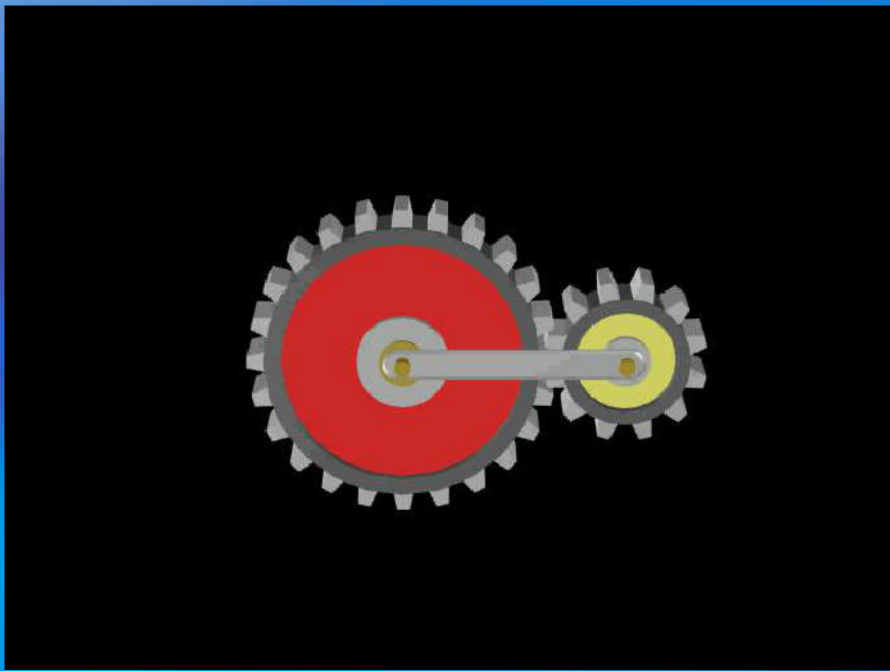


刚体绕两平行轴转动时，刚体的绝对角速度矢量等于转动系的牵连角速度矢量与刚体相对于转动系的相对角速度的矢量和。

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r$$

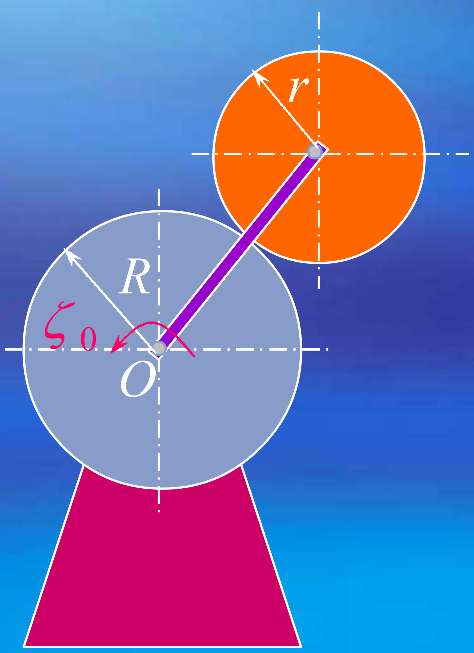
□ 刚体平面运动分解为转动和转动

例 题 6



刚体平面运动分解为转动和转动

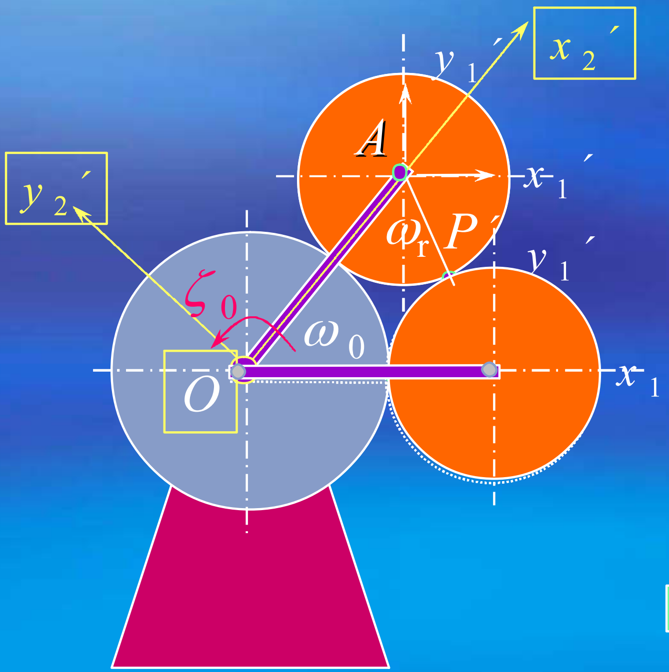
例 题 6



行星轮在固定的大齿轮上作纯滚动，曲柄OA以等角速度ζ_0绕O轴转动.求：行星轮的绝对角速度。

□ 刚体平面运动分解为转动和转动

例 题 7



解： 建立平移系$A\,x_1'y_1'$、转动系$O\,x_2'y_2'$。

当转动系转过ω_0时，行星轮上的P点运动到P'点，这时行星轮相对于平移系转过ω_r; 行星轮相对于定系转过ω_a。

$$\omega_a = \omega_r + \omega_e$$

其中$\omega_e = \omega_0$。根据$R\,\omega_e = r\,\omega_r$

得到 $\omega_r = \dfrac{R}{r}\omega_e = \dfrac{R}{r}\omega_0$

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r = \frac{R+r}{r}\omega_0$$

刚体的平面运动

- 结论与讨论

结论与讨论

- 刚体复合运动与点的复合运动的关系
- 关于转动偶的概念
- 关于滑动矢量向一点平移的概念
- 关于开链与闭链系统
- 关于运动学的正问题与反问题

结论与讨论

- 刚体复合运动与点的复合运动的关系

□ 结论与讨论

♉ 刚体复合运动与点的复合运动的关系

刚体复合运动分析是点的复合运动分析的延伸和扩展

要注意运动的相对性；

基点的选择；

两种特殊的动参考系 —— 平移系与转动系；

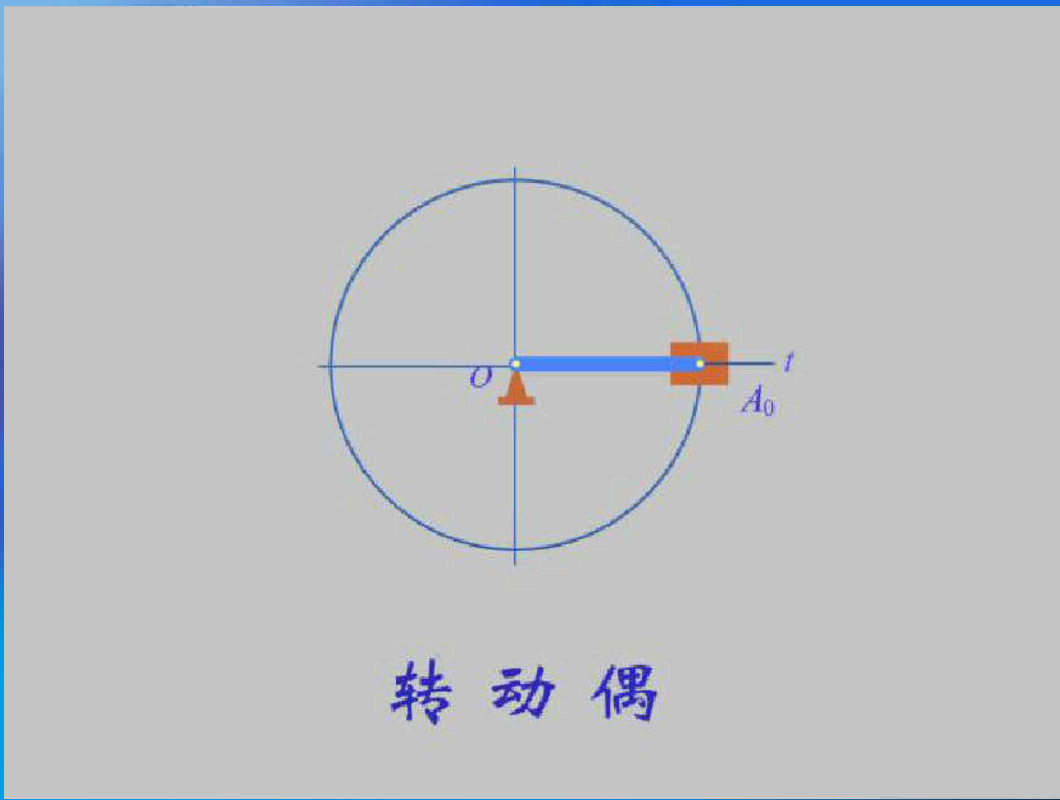
特殊问题 —— 速度瞬心与角速度瞬心，相同点与不同点(瞬时性，二者不在同一点)。

结论与讨论

- 关于转动偶的概念

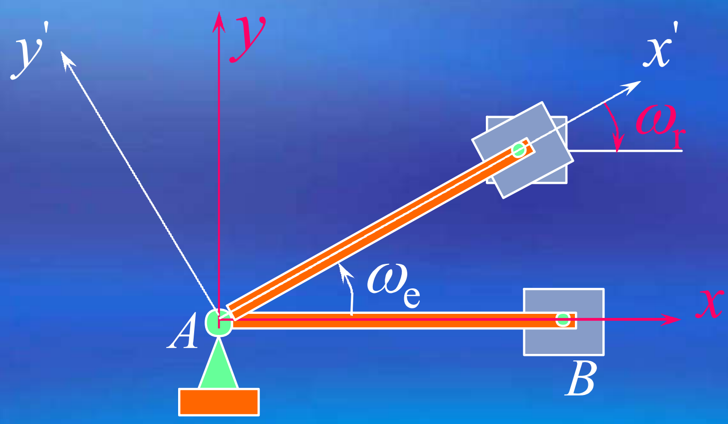
结论与讨论

关于转动偶的概念



结论与讨论

关于转动偶的概念



刚体*B*跟随转动系转过ω_e；

再相对于转动系反向转过ω_r，而且有

$$\omega_e = -\omega_r$$

于是

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r = 0$$

这表明刚体*B*作平移。

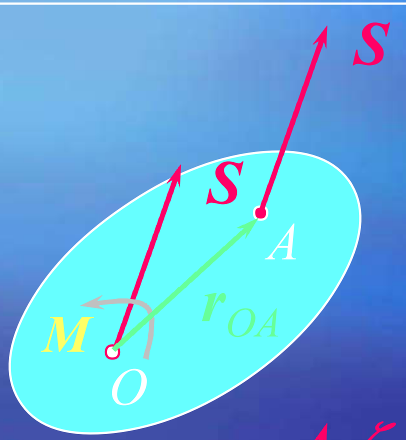
这样两种转动的组合称为转动偶

结论与讨论

- 关于滑动矢量向一点平移的概念

结论与讨论

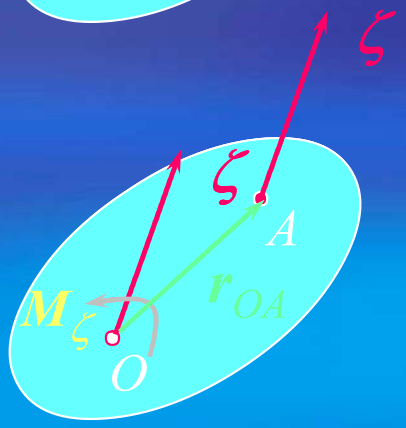
关于滑动矢量向一点平移的概念



A点：矢量 $\boldsymbol{S}$

O点：矢量 $\boldsymbol{S}$

矢量偶矢量$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_{OA} \times \boldsymbol{S}$



A点：角速度矢量ζ

O点：角速度矢量 ζ

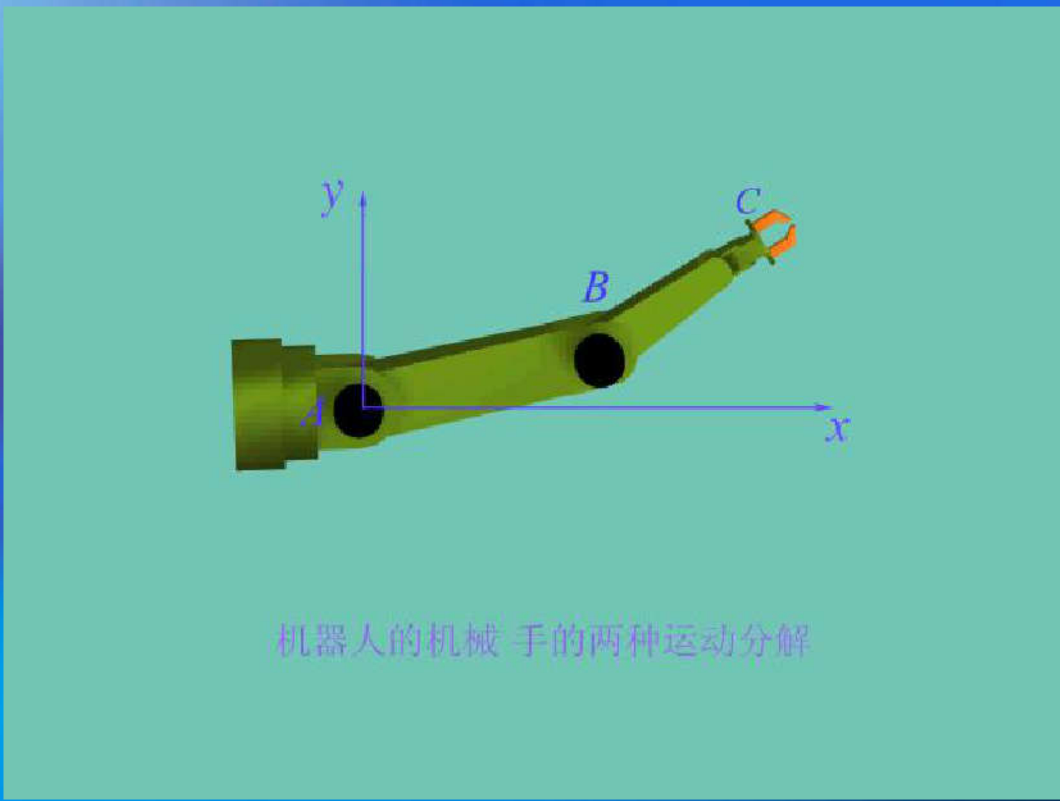
角速度偶矢量$\boldsymbol{M}_\zeta = \boldsymbol{r}_{OA} \times \zeta$

结论与讨论

- 关于开链与闭链系统

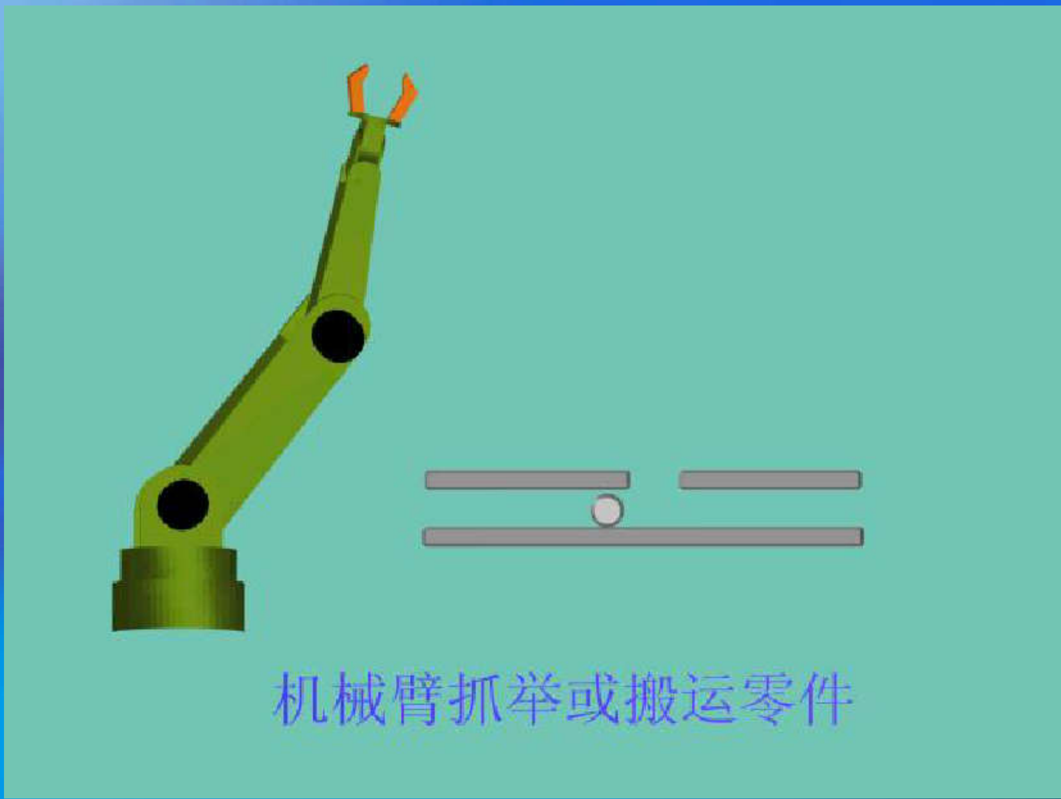
结论与讨论

♉ *关于开链与闭链系统*



□ 结论与讨论

关于开链与闭链系统



结论与讨论

- 关于运动学的正问题与反问题

结论与讨论

运动学正问题

已知运动学系统以及输入运动 ⇒ 求输出运动

运动学反问题

求输入运动
设计运动系统
⇐ 已知运动学系统的输出运动

谢谢大家

返回本章目录页