

工程力学

Engineering Mechanics



# 教材及参考书

- 教材：
- 原方等编. 《工程力学》. 清华大学出版社, 2006
  
- 参考书：
- 郭应征等编. 应用力学基础. 高等教育出版社, 2000
- 哈尔滨工业大学理论力学教研室编. 理论力学第 6 版. 高等教育出版社
- 刘鸿文主编. 材料力学. 第4版. 高等教育出版社, 2004

# 第一章

## 绪论及基本概念



# 绪论

- 0.1 工程力学的主要内容
- 0.2 工程力学与生产实践的关系及其研究方法
- 0.3 工程力学的性质与作用

# 0.1 工程力学的主要内容

- 工程力学是研究物体机械运动的一般规律以及构件承载能力的一门学科。内容包含有理论力学和材料力学部分内容，理论力学部分又可分为静力学、运动学和动力学三部分。
- 理论力学部分是研究力作用于物体时的外部效应，即研究物体**机械运动**的一般规律，因此它们是将物体抽象化为**刚体**来研究的。
- 
- 材料力学部分则是研究力作用时的内部效应，即研究构件的强度、刚度和稳定性，所以它是研究**变形固体**的。

## 0.2 工程力学与生产实践的关系及其研究方法

- 工程力学对生产实践起着重要的指导作用，为工程中构件的设计和计算提供了简便实用的方法，同时又为生产的发展所推动，两者是相互促进，共同发展的。
- 在分析研究问题时，必须抓住主要因素，并运用抽象化的方法，从而得出比较合乎实际的力学模型和强度准则。(例如:刚体,变形固体)
- 综上所述，对于工程实际中的问题，运用科学抽象的方法，加以综合、分析，再通过实验与严密的数学推理，从而得到工程中适用的理论公式，以指导实践，并为实践所检验。所以说，工程力学为生产实践提供了必要的理论基础。

## 0.3 工程力学的性质与作用

- 工程力学是一门技术基础课程。它在基础课与专业课之间起桥梁作用。
- 深刻理解基本概念、基本理论、基本方法,同时还需要通过演算一定数量的习题来加深和巩固对所学知识的理解。
- 对于工科类学生,要求在学完本门课程之后,具有能将简单的工程实际问题抽象为力学模型的初步能力;能够运用基础课知识,对简单机构进行运动和动力分析;能够正确运用强度、刚度和稳定条件对简单受力杆件进行校核和截面选择。

# 静力学

- 第1章 静力学基础
- 第2章 平面力系
- 第3章 空间力系



# 静力学

静力学研究物体在力系作用下的平衡规律及其应用。

1、物体的受力分析：分析物体（包括物体系）受哪些力，每个力的作用位置和方向，并画出物体的受力图。

2、力系的等效替换（或简化）：用一个简单力系等效代替一个复杂力系。

3、力系的平衡：建立各种力系的平衡条件，并应用这些条件解决静力学实际问题。



# 几个基本概念

**刚体:** 在力的作用下, 其内部任意两点间的距离始终保持不变的物体.

**力系:** 一群力. 可分为: 平面汇交 (共点) 力系, 平面平行力系, 平面力偶系, 平面任意力系; 空间汇交 (共点) 力系, 空间平行力系, 空间力偶系, 空间任意力系.

**平衡:** 物体相对惯性参考系 (如地面) 静止或作匀速直线运动.



# 第1章 静力学基础

- 1.1 力 力矩 力偶
- 1.2 静力学公理
- 1.3 约束和约束力
- 1.4 物体的受力分析和受力图

# 1.1 力 力矩 力偶

- 1. 力
- 2. 平面力对点的矩
- 3. 平面力偶

# •1. 力

力是物体间相互的机械作用，这种作用使物体的机械运动状态发生变化或使物体产生变形。前者称为力的**运动效应**或**外效应**，后者称为力的**变形效应**或**内效应**。

**力的三要素**：大小、方向、作用点。

力的三要素表明，力是一个具有固定作用点的定位矢量。常用黑体字母  $\boldsymbol{F}$  表示力矢量，而用普通字母  $F$  表示力的大小。在国际单位制中，力的单位是 [牛顿]，符号是 N。



力  $F$  在  $x$ ,  $y$  轴上的投影分别为

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta$$

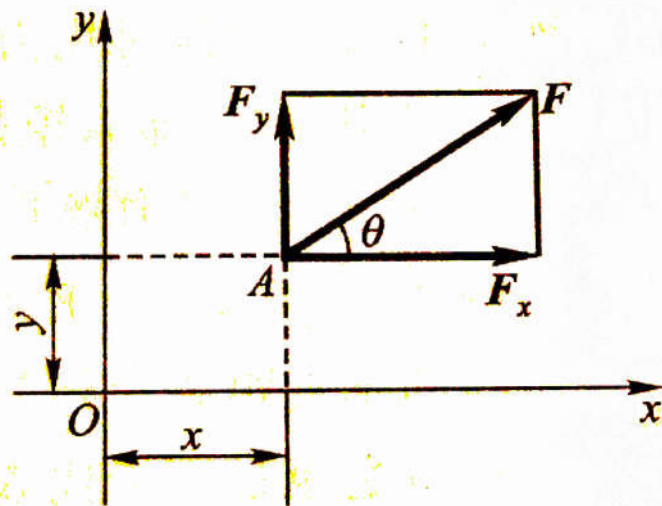
力的投影是代数量。力的分力与其投影之间有下列关系

$$\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{i}$$

$$\mathbf{F}_y = F_y \mathbf{j}$$

其解析表达式为

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$$

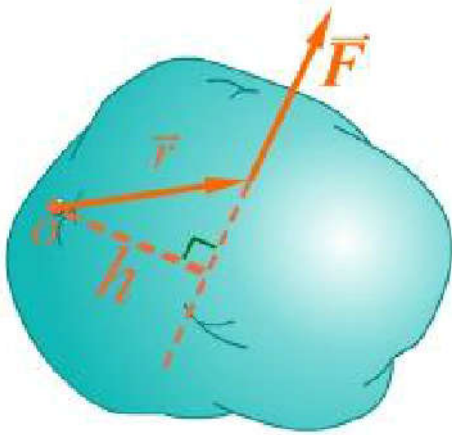


如已知力在平面内两正交轴上的投影和, 则可求出力的大小和方向余弦

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\cos(F, \mathbf{i}) = \frac{F_x}{F} \quad \cos(F, \mathbf{j}) = \frac{F_y}{F}$$

# 平面力对点之矩（力矩）



力矩作用面， $O$ 称为**矩心**， $O$ 到力的作用线的垂直距离 $h$ 称为**力臂**

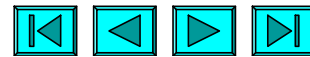
两个要素：

1. 大小：力 $F$ 与力臂的乘积
2. 方向：转动方向

$$M_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h$$

$$M_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

**力对点之矩**是一个代数量，它的绝对值等于力的大小与力臂的乘积，它的正负：力使物体绕矩心逆时针转向时为正，反之为负.常用单位N.m或kN.m



# 合力矩定理

平面力系的合力对于平面内任一点之矩等于所有各分力对于该点之矩的代数和。

$$M_O(\mathbf{F}_R) = \sum M_O(\mathbf{F}_i)$$

$$M_O(\vec{\mathbf{F}}_R) = \sum M_O(\vec{\mathbf{F}}_i)$$



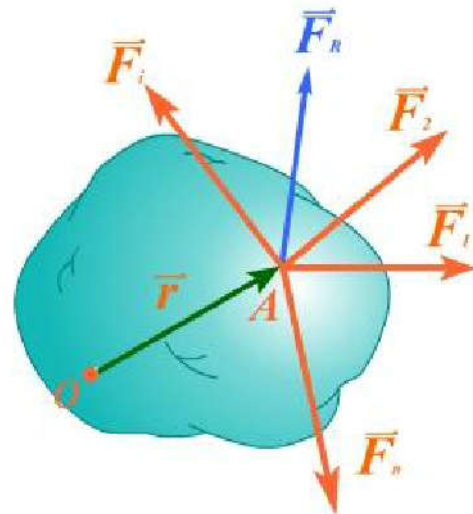
## 平面汇交力系的合力矩定理

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

$$\vec{r} \times \vec{F}_R = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \cdots + \vec{r} \times \vec{F}_n$$

即

$$M_0(\vec{F}_R) = \sum M_0(\vec{F}_i)$$

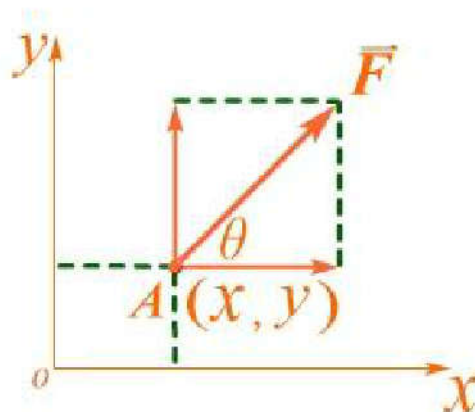


## 力矩与合力矩的解析表达式

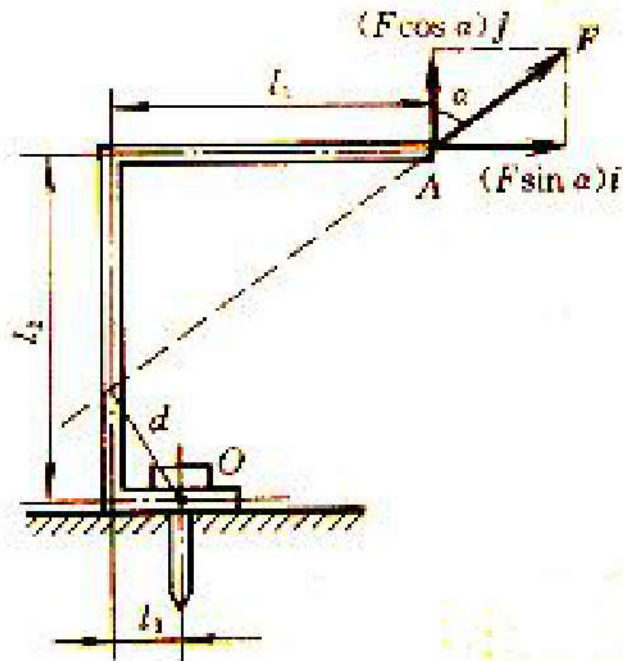
$$M_o(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_y) - M_o(\vec{F}_x) = x \cdot F \cdot \sin\theta - y \cdot F \cdot \cos\theta = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

$$M_o(\vec{F}_R) = \sum M_o(\vec{F}_i)$$

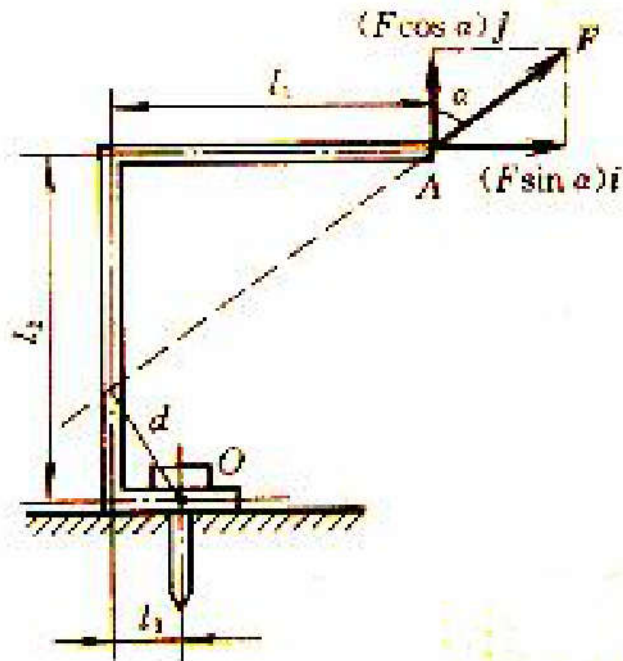
$$M_o(\vec{F}_R) = \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix})$$



**例1-1** 如图所示支架受力 $F$ 作用，图中尺寸及角 $\alpha$ 已知。试计算力对于 $O$ 点的力矩。

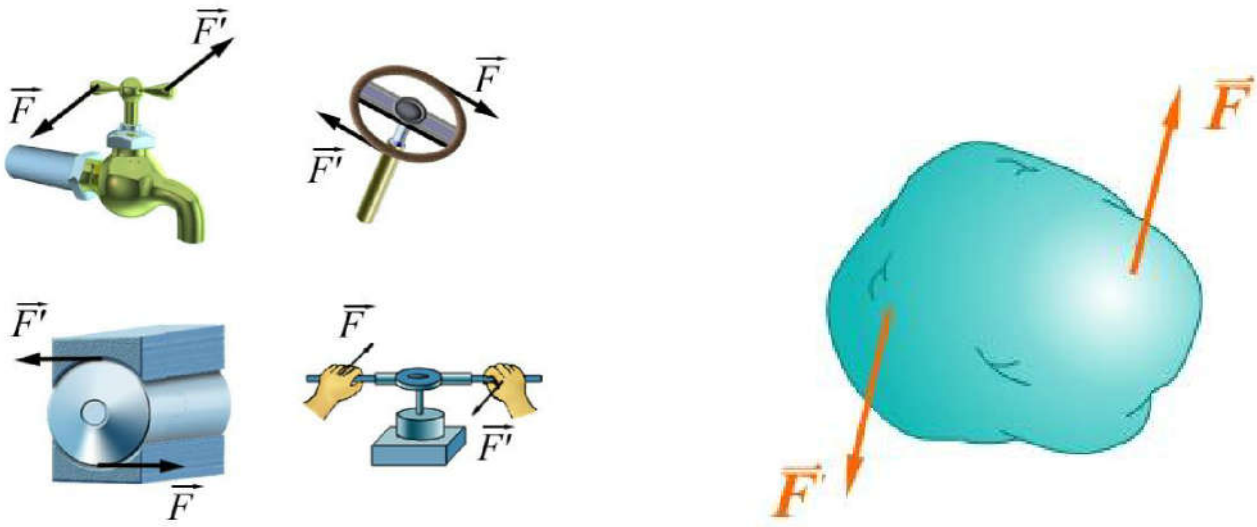


例1-1 如图所示支架受力 $F$ 作用，图中尺寸及角 $\alpha$ 已知。试计算力对于 $O$ 点的力矩。

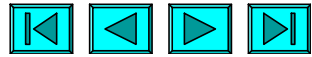


$$M_O(F) = M_O(F_x) + M_O(F_y) = F \cos \alpha (l_1 - l_3) - F \sin \alpha \cdot l_2$$

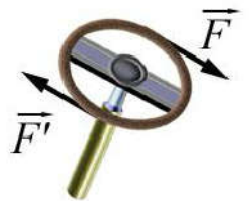
### 3. 平面力偶



由两个等值、反向、不共线的（平行）力组成的力系称为**力偶**，记作  $(\vec{F}, \vec{F}')$



- 力偶是常见的一种特殊力系。力偶只能使物体转动，因此，力偶与一个力不等效，它既不能合成一个力，也不能与一个力平衡。
- 力和力偶是静力学的两个基本要素。

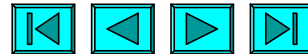
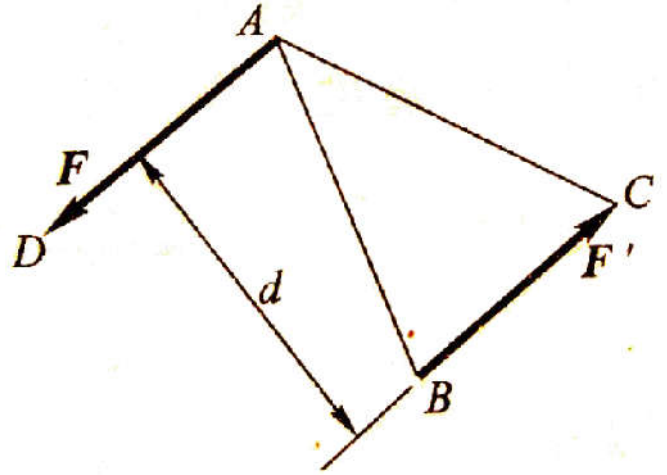


# 力偶矩

力偶对物体的转动效应用力偶矩度量。它等于力偶中的力的大小与两个力之间的距离（力偶臂）的乘积，记为， $M(F, F')$  简记为 $M$ 。

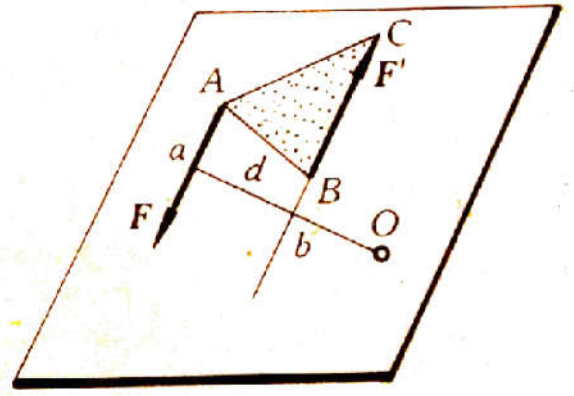
$$M = \pm F \cdot d$$

力偶矩是代数量。取逆时针转向为正，反之为负。力偶矩的单位与力矩相同，也是  $\text{N}\cdot\text{m}$ 。



# 力偶矩与矩心位置无关

如图,取任一点 $O$ 为矩心, 则  
力偶  $(F, F')$  对该点之矩为



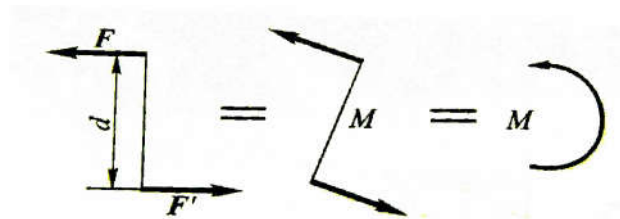
$$M_o(F) + M_o(F') = F \cdot aO - F' \cdot bO = F(aO - bO) = Fd$$

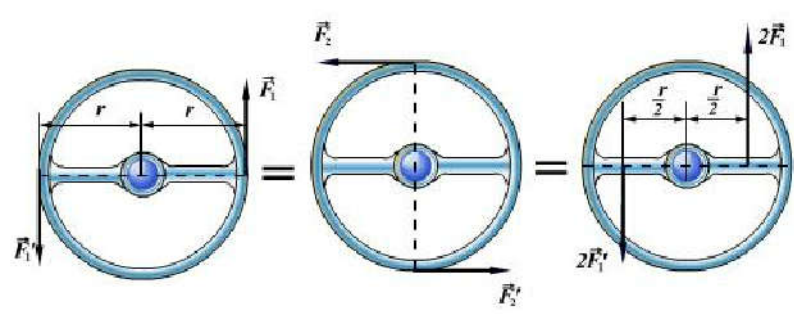
可知, 力偶对任一点之矩等于力偶矩而与矩心位置无关。



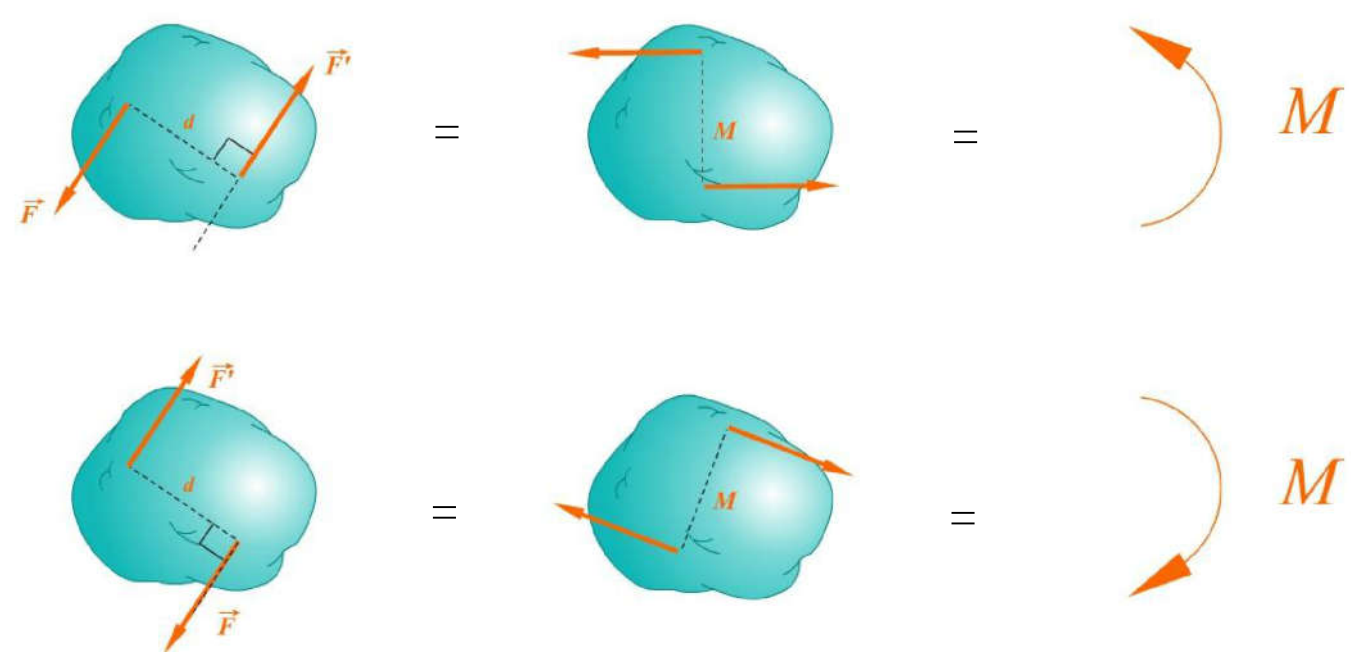
# 两力偶等效条件

- 力偶在平面内的转向不同，其作用效应也不相同。因此，平面力偶对物体的作用效应，由以下两个因素决定：
- (1)力偶矩的大小；
- (2)力偶在作用平面内的转向。
- 在同平面内的两个力偶，如力偶矩相等，则两力偶等效。由此可得两个推论：
- (1) 力偶可在其作用面内任意移转，而不改变它对物体的作用。
- (2) 只要保持力偶矩不变，可任意改变力的大小和力偶臂的长短，而不改变力偶对物体的作用。

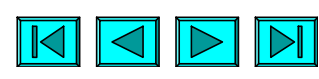




力偶的臂和力的大小都不是力偶的特征量，只有力偶矩是力偶作用的唯一量度。



力偶没有合力，力偶只能由力偶来平衡。





A good beginning is half of the battle.

## 1.2 静力学公理

公理是人们在生活和生产实践中长期积累的经验总结，又经过实践反复检验，被确认是符合客观实际的最普遍、最一般的规律。

公理1 力的平行四边形法则

公理2 二力平衡条件

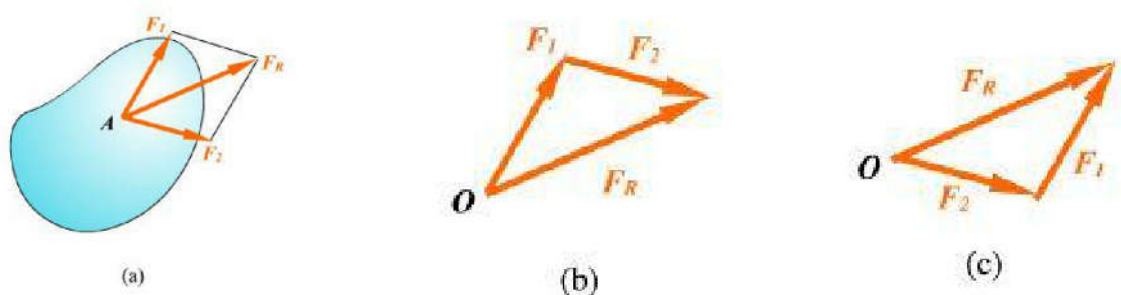
公理3 加减平衡力系原理

公理4 作用和反作用定律



## 公理1 力的平行四边形法则

作用在物体上同一点的两个力，可以合成为一个合力。合力的作用点也在该点，合力的大小和方向，由这两个力为边构成的平行四边形的对角线确定，如图所示。



或者说，合力矢等于这两个力矢的几何和，即

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

这个公理是复杂力系简化的基础。



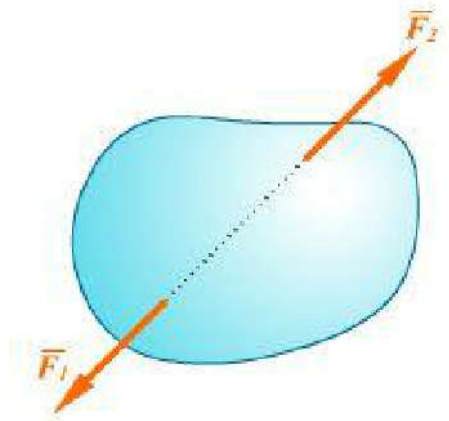
## 公理2 二力平衡条件

作用在刚体上的两个力，使刚体保持平衡的必要和充分条件是：这两个力的大小相等，方向相反，且作用在同一直线上。

使刚体平衡的充分必要条件

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

最简单力系的平衡条件

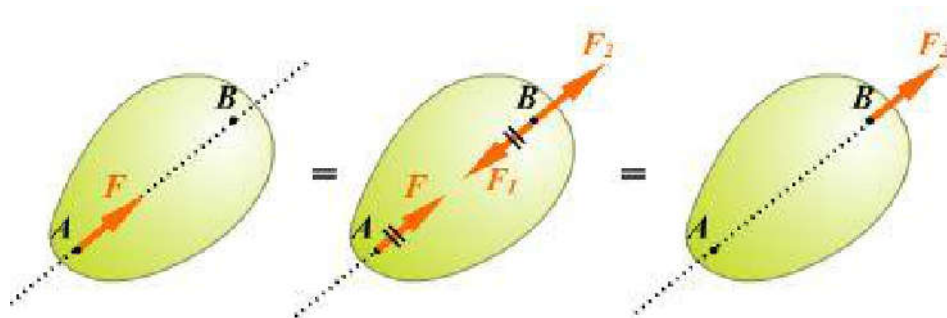


### 公理3 加减平衡力系原理

在已知力系上加上或减去任意的平衡力系，并不改变原力系对刚体的作用。(这个公理是研究力系等效替换的重要依据。)

#### 推理1 力的可传性

作用于刚体上某点的力，可以沿着它的作用线移到刚体内任意一点，并不改变该力对刚体的作用。

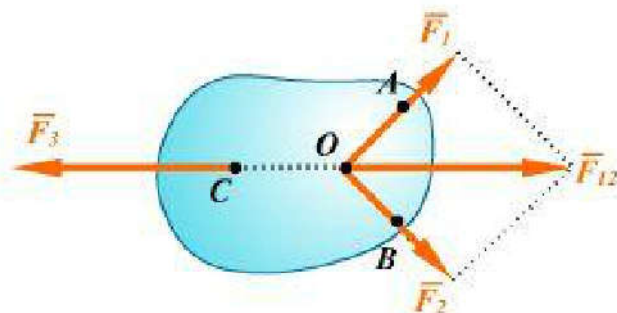


作用在刚体上的力是滑动矢量，力的三要素为大小、方向和作用线。



## 推理2 三力平衡汇交定理

作用于刚体上三个相互平衡的力，若其中两个力的作用线汇交于一点，则此三力必在同一平面内，且第三个力的作用线通过汇交点。



平衡时 $\vec{F}_3$  必与 $\vec{F}_{12}$  共线则三力必汇交 $O$ 点，且共面。





## 公理4 作用和反作用定律

作用力和反作用力总是同时存在，同时消失，等值、反向、共线，分别作用在相互作用的两个物体上。

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$$

在画物体受力图时要注意此公理的应用。

这个公理概括了物体间相互作用的关系，表明作用力和反作用力总是成对出现的。

由于作用力与反作用力分别作用在两个物体上，因此，不能认为是平衡力系。



## 公理5 刚化原理

**变形体**在某一力系作用下处于平衡，如将此变形体刚化为刚体，其平衡状态保持不变。



柔性体（受拉力平衡）

刚化为刚体（仍平衡）

反之不一定成立，因对刚体平衡的充分必要条件，对变形体是必要的但非充分的。



刚体（受压平衡）

柔性体（受压不能平衡）



### 1.3 约束和约束力

**约束:** 对非自由体的位移起限制作用的物体.

**约束力:** 约束对非自由体的作用力.

已知力(称主动力)

约束力 { 大小——待定  
          { 方向——与该约束所能阻碍的位移方向相反  
          { 作用点——接触处

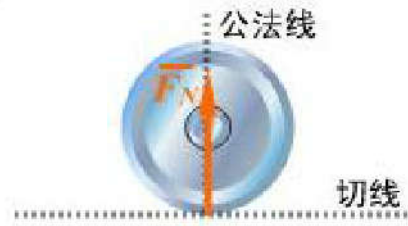


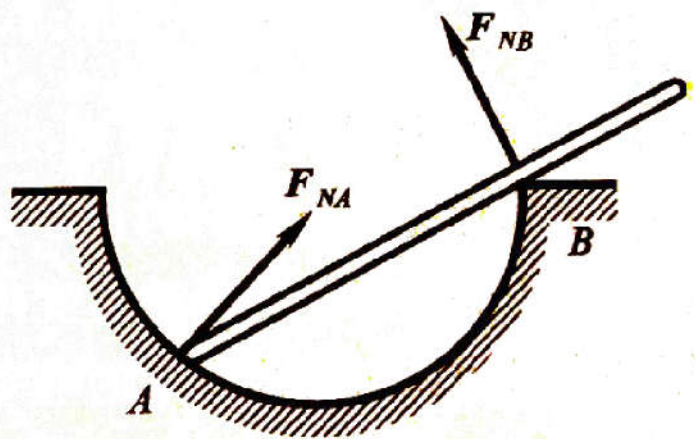
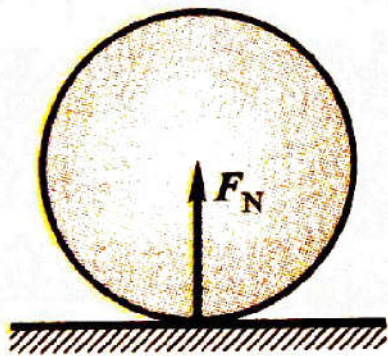
## 工程常见的约束

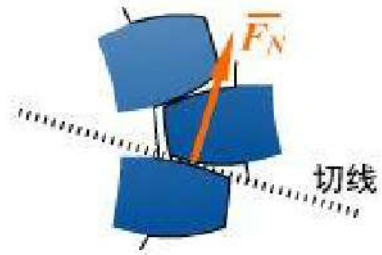
1. 光滑接触面约束
2. 柔索约束
3. 光滑铰链约束
4. 滚动支座约束



# 1、具有光滑接触面（线、点）的约束（光滑接触约束）







光滑支承接触对非自由体的约束力，作用在接触处；方向沿接触处的公法线并指向受力物体，故称为法向约束力，用  $\vec{F}_N$  表示。



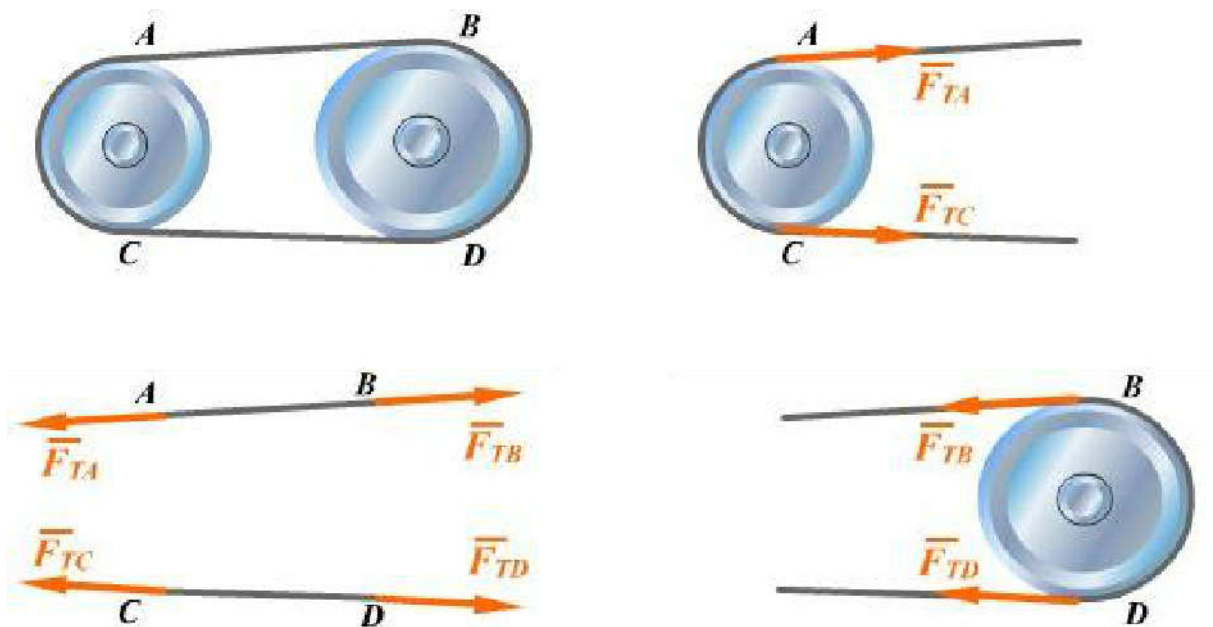
## 2、由柔软的绳索、胶带或链条等构成的约束



柔索只能受拉力，又称张力. 用  $\vec{F}_T$  表示.







柔索对物体的约束力沿着柔索背向被约束物体。  
 胶带对轮的约束力沿轮缘的切线方向，为拉力。

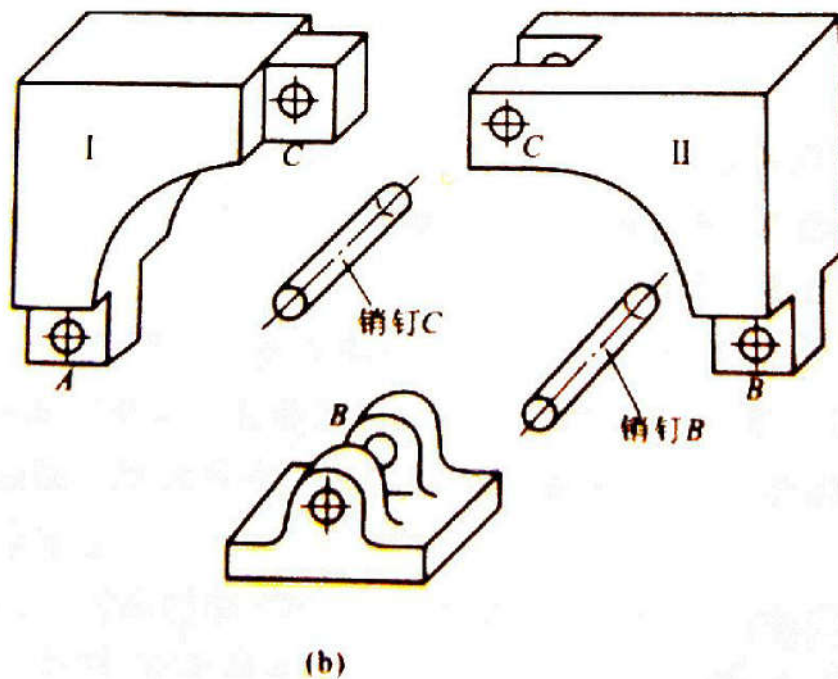
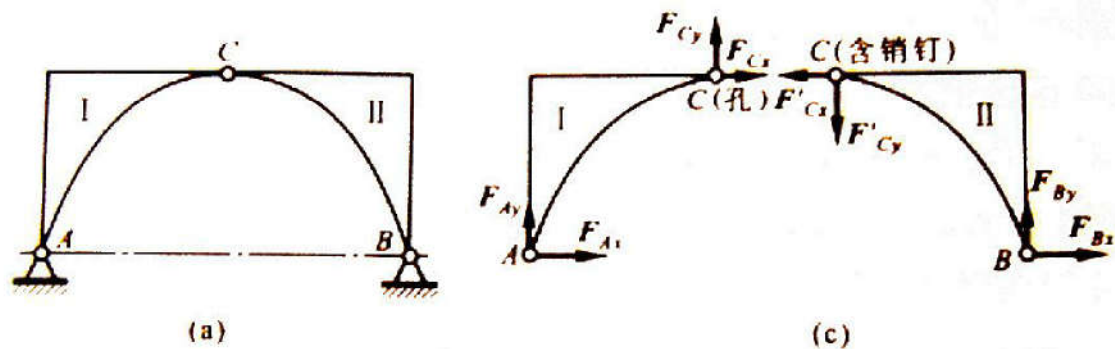


### 3. 光滑铰链约束

铰链

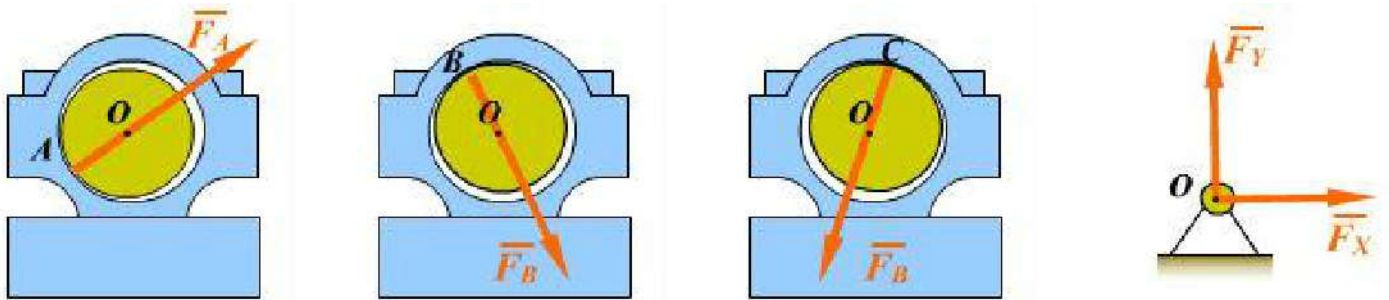
固定铰链支座

(固定铰支)



光滑铰链约束（径向轴承、圆柱铰链、固定铰链支座等）

(1) 径向轴承（向心轴承）



约束特点： 轴在轴承孔内，轴为非自由体、轴承孔为约束。



**约束力：** 当不计摩擦时，轴与孔在接触处为光滑接触约束——法向约束力。

约束力作用在接触处，沿径向指向轴心。

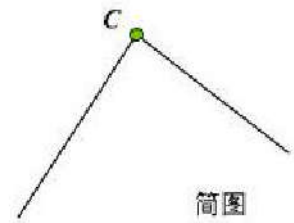
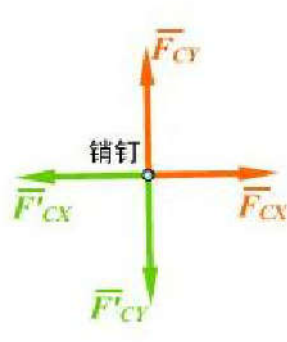
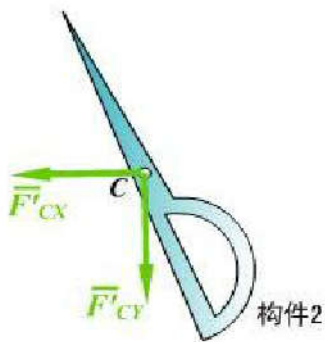
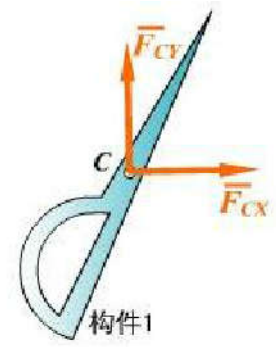
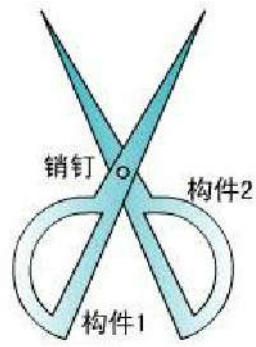
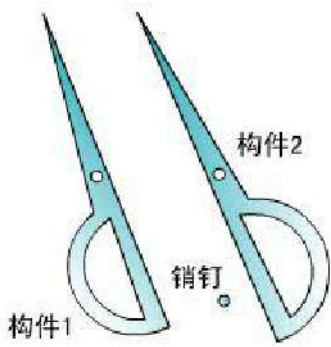
当外界载荷不同时，接触点会变，则约束力的大小与方向均有改变。

可用二个通过轴心的正交分力  $\vec{F}_x, \vec{F}_y$  表示。



## (2) 光滑圆柱铰链

约束特点：由两个各穿孔的构件及圆柱销钉组成，如剪刀。



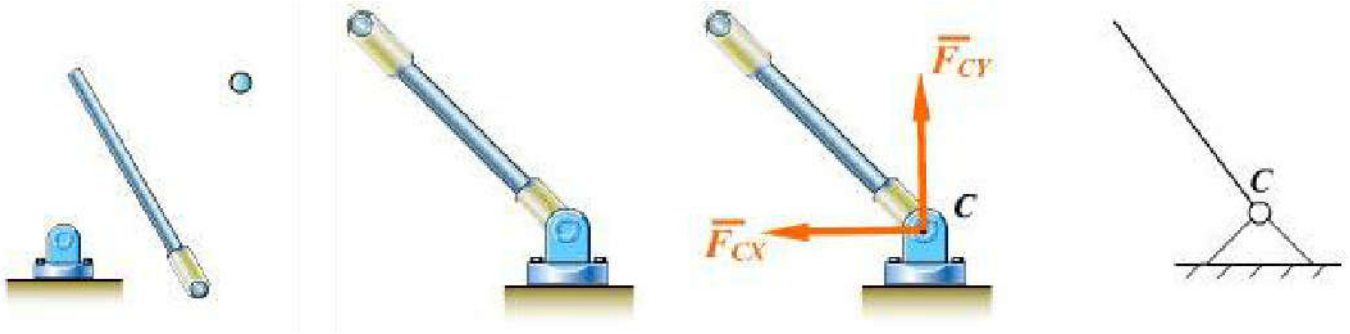
## 约束力:

光滑圆柱铰链：亦为孔与轴的配合问题，与轴承一样，可用两个正交分力表示。

一般不必分析销钉受力，当要分析时，必须把销钉单独取出。



### (3) 固定铰链支座



约束特点：

由上面构件1或2 之一与地面或机架固定而成.

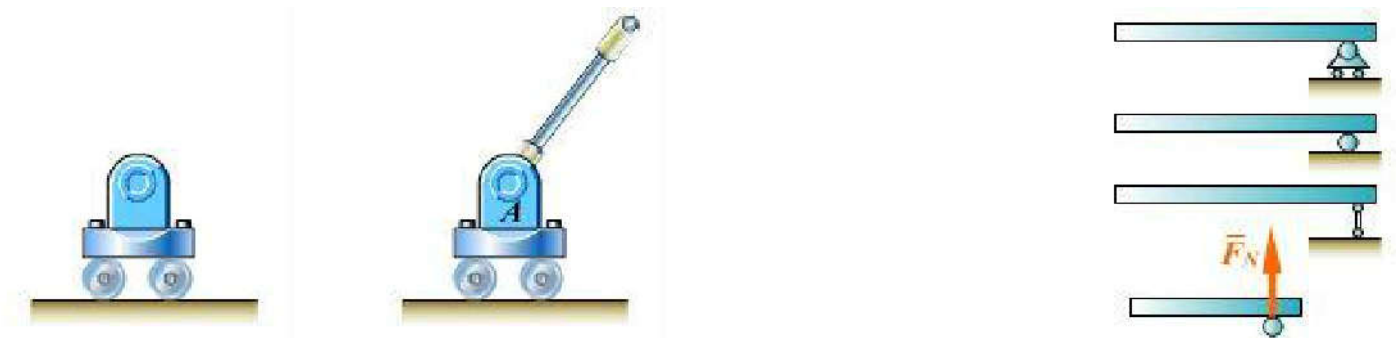
约束力：与圆柱铰链相同

以上三种约束（径向轴承、光滑圆柱铰链、固定铰链支座）其约束特性相同，均为轴与孔的配合问题，都可称作光滑圆柱铰链.



## 4. 滚动支座约束

### (1) 滚动支座



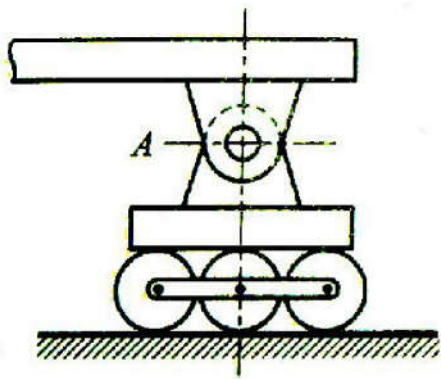
约束特点：

在上述固定铰支座与光滑固定平面之间装有光滑辊轴而成。

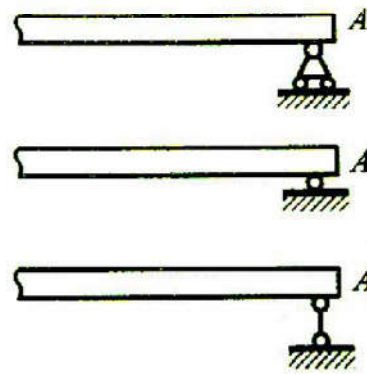
**约束力：** 构件受到 $\perp$ 光滑面的约束力。



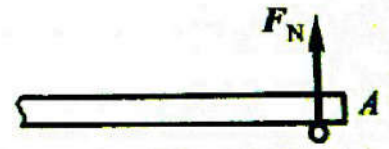




(a)



(b)



(c)

(1) 光滑面约束——法向约束力  $\vec{F}_N$

(2) 柔索约束——张力  $\vec{F}_T$

(3) 光滑铰链—— $\vec{F}_{Ay}$   $\vec{F}_{Ax}$

(4) 滚动支座—— $\vec{F}_N \perp$  光滑面



## 1.4 物体的受力和受力图

在受力图上应画出所有力，主动力和约束力（被动力）

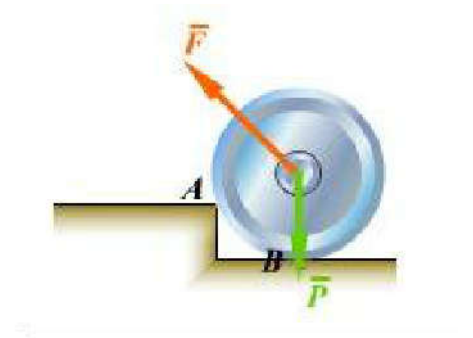
画受力图步骤：

- 1、取所要研究物体为研究对象（隔离体）画出其简图
- 2、画出所有主动力
- 3、按约束性质画出所有约束（被动）力



例

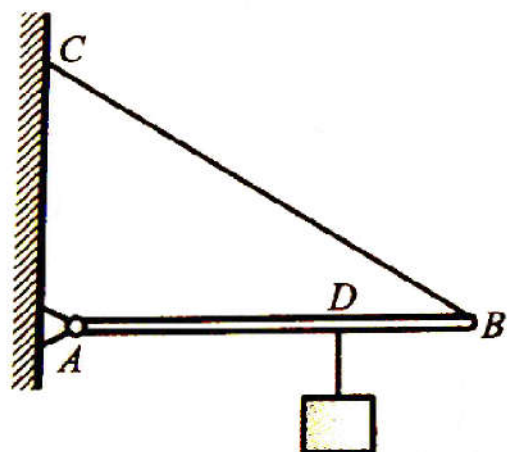
碾子重为 $\vec{P}$ ，拉力为 $\vec{F}$ ， $A$ 、 $B$ 处光滑接触，画出碾子的受力图。



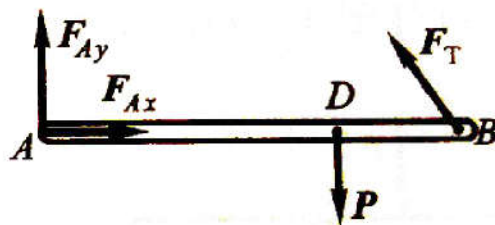
解：画出简图



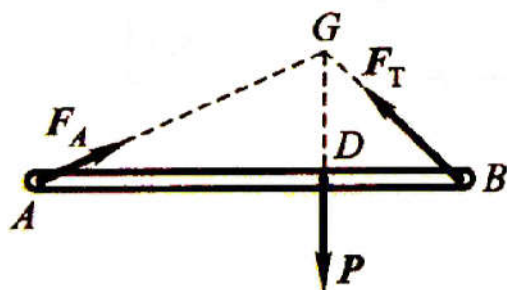
例1-2 如图所示，梁的一端用铰链，另一端用柔索固定在墙上，在处挂一重物，其重量为 $P$ ，梁的自重不计。画出梁 $AB$ 的受力图。



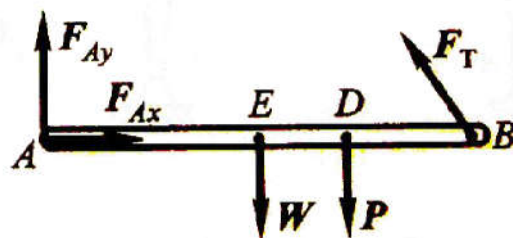
(a)



(b)

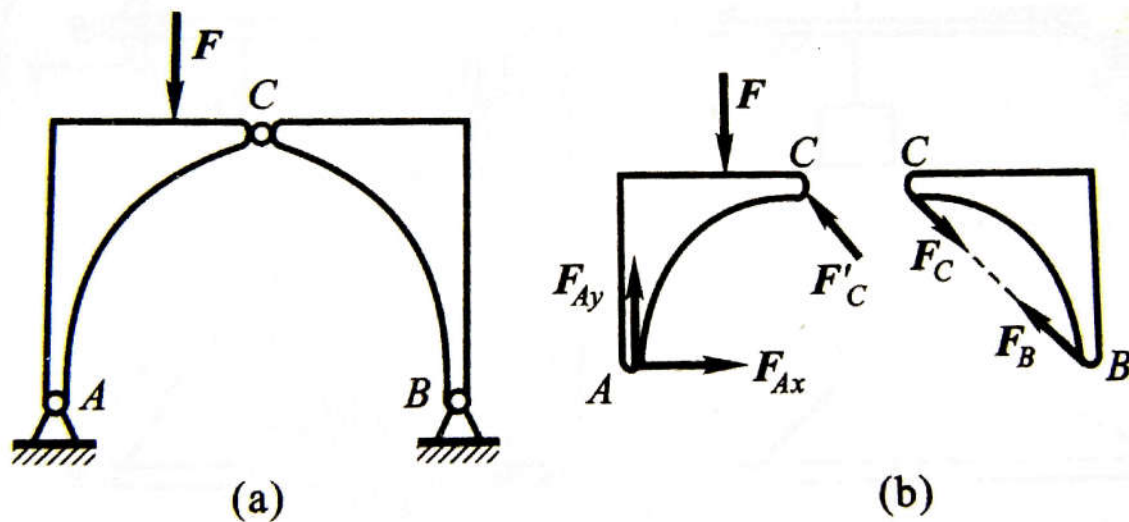


(c)



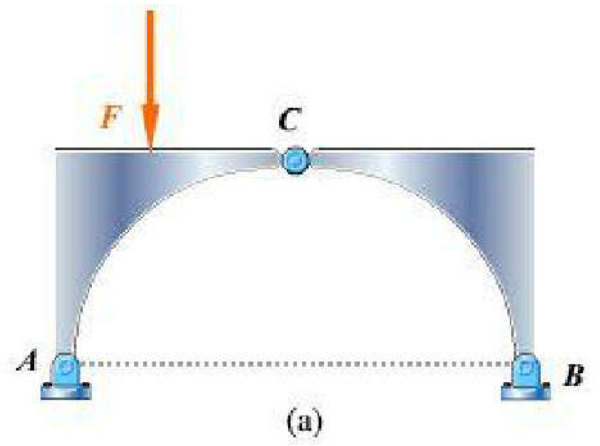
(d)

**例1-3** 如图所示的三铰拱桥，由左、右两拱铰接而成。设各拱自重不计，在拱 $AC$ 上作用有载荷 $F$ 。试分别画出拱 $AC$ 和 $BC$ 的受力图。



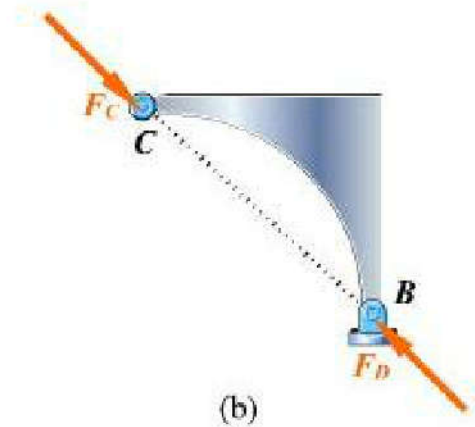
例

不计三铰拱桥的自重与摩擦，  
画出左、右拱  $AB, CB$  的受力图  
与系统整体受力图。

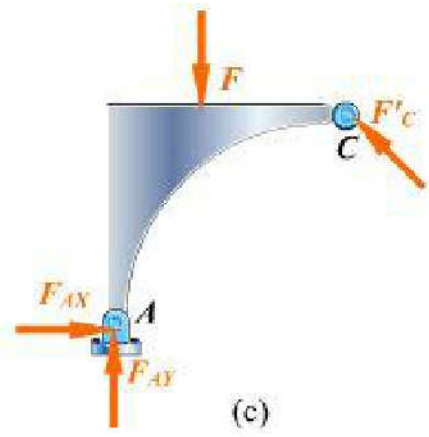


解：

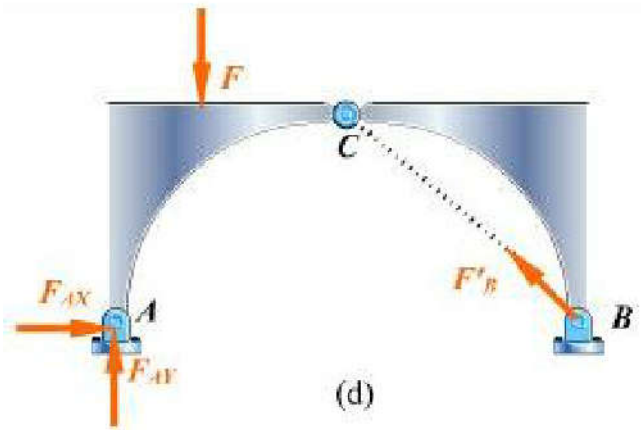
右拱  $CB$  为二力构件，其受力  
图如图 (b) 所示



取左拱  $AC$ , 其受力图如图 (c) 所示

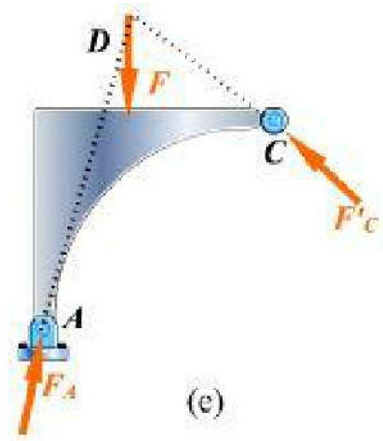


系统整体受力图如图 (d) 所示

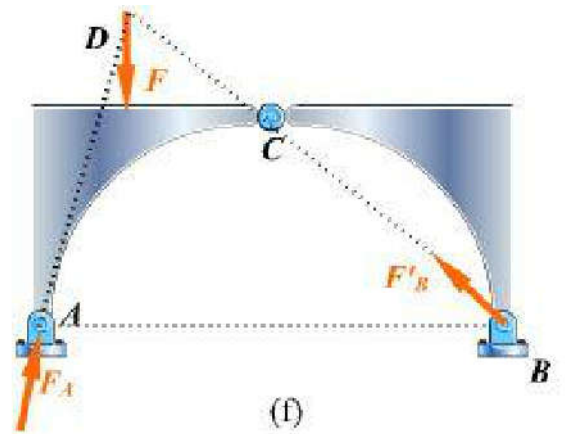


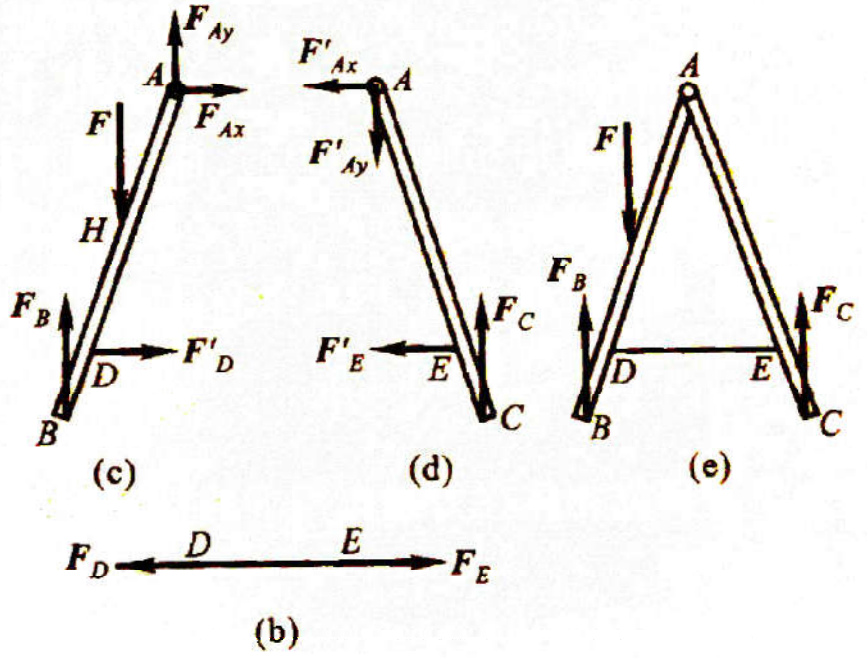
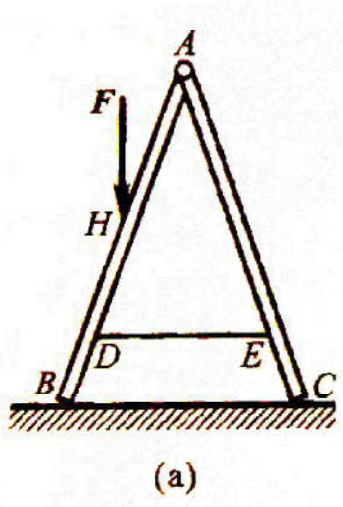


考虑到左拱 $AC$ 三个力作用下平衡，也可按三力平衡汇交定理画出左拱 $AC$ 的受力图，如图（e）所示



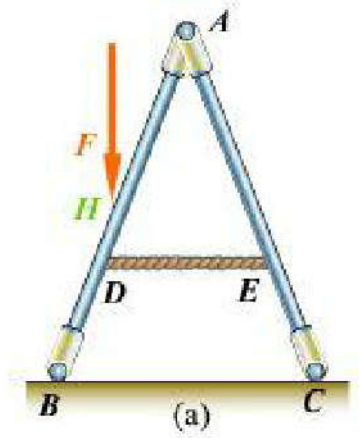
此时整体受力图如图（f）所示





例

不计自重的梯子放在光滑水平地面上，画出梯子、梯子左右两部分与整个系统受力图。图(a)



解：

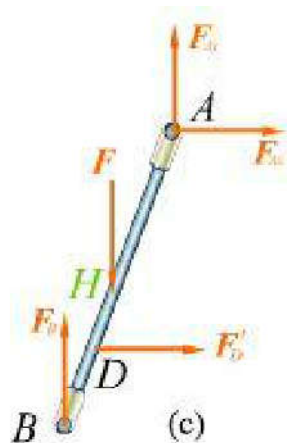
绳子受力图如图 (b) 所示



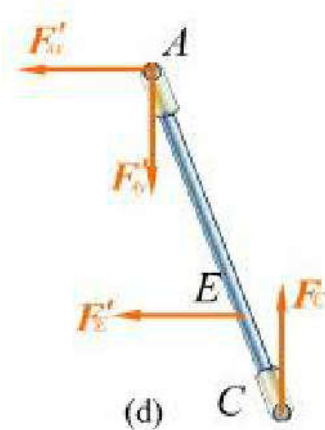
(b)



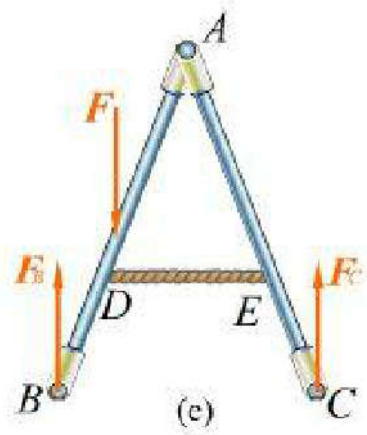
梯子左边部分受力图  
如图 (c) 所示



梯子右边部分受力图  
如图 (d) 所示



整体受力图如图 (e) 所示



提问：左右两部分梯子在 $A$ 处，绳子对左右两部分梯子均有力作用，为什么在整体受力图没有画出？

