第二节　参数假设检验

一、U–检验

二、T–检验

三、χ^2–检验

四、F–检验

一、U-检验

1、单个正态总体均值的假设检验

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\sigma^2=\sigma_0^2$ 为已知，现要检验假设 $H_0:\mu=\mu_0$，这个假设检验称为单个正态总体均值的假设检验。

分析：如果原假设 $H_0:\mu=\mu_0$ 为真，那么样本均值 $\bar{\xi}$ 应在 μ_0 周围波动，且不会偏离 μ_0 太大，由于 $\bar{\xi}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$，

$$\therefore\ U=\frac{\bar{\xi}-u_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1) \qquad (8.2.1)$$

$\because\ E(U)=0$，故U在0附近波动不应太大，若超过一定范围，就认为不太可能发生。在显著性水平 α 给定时，这时构造的拒绝域应该是双侧的还是单侧的呢？

双侧检验和单侧检验时拒绝域的构造:

对给出的显著性水平 α, 在 H_0为真时,

1）在双侧检验时，查表得: $U_{1-\alpha/2}$,

构造拒绝域: $D=(|U|\geq U_{1-\alpha/2})$, 使: $P(|U|\geq U_{1-\alpha/2})=\alpha$,

其中 $u_{1-\alpha/2}$ 称为正态分布 $N(0,1)$ 的 $1-\alpha/2$ 的下分位点。

2）在左单侧检验时，查表得: U_{α},

构造拒绝域: $D=(U\leq U_{\alpha})$,

使得: $P(U\leq U_{\alpha})=\alpha$;

3）在右单侧检验时，查表得: $U_{1-\alpha}$,

构造拒绝域: $D=(U\geq U_{1-\alpha})$,

使得: $P(U\geq U_{1-\alpha})=\alpha$

从样本观测值算得U值，若U值落入拒绝域，则拒绝原假设，若U值落入接受域，就接受原假设。

在本问题中，由于 $E(U)=0$, 故U在0附近的波动不应太大，超过一定范围，就认为不太可能，因此要选用双侧检验。

对给出的显著性水平 α, 在 H_0为真时，查表得 $U_{1-\alpha/2}$,

构造拒绝域: $D=\{|U|\geq u_{1-\alpha/2}\}$, 使得 $P(|U|\geq u_{1-\alpha/2})=\alpha$,

从样本观测值算得(8. 2. 1)式的值是 $U_{值}$, 若 $|U_{值}|\geq u_{1-\alpha/2}$, 则拒绝原假设，这时认为总体均值与 μ_0有显著差异。

这种检验方法称为U-检验法。

例8.2.1 设某厂一车床生产的钮扣，据经验其直径服从正态分布 $N(\mu,\sigma_0^2)$，$\mu=26$，$\sigma_0=5.2$，为检验这一车床生产是否正常，现抽取容量 $n=100$ 的样本，算得其均值：$\bar{x}=26.56$，问这一车床生产是否正常？($\alpha=0.05$)

解：先提出原假设 $H_0:\mu_0=26$，取统计量：

$$U=\frac{\bar{\xi}-u_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

查正态分布表得：$u_{0.975}=1.96$，由此构造拒绝域：

$$D=(|U|\geq 1.96)\text{，使得}\quad P(|U|\geq u_{0.975})=0.05$$

由样本观测值算得：$U_{\text{值}}=\dfrac{26.56-26}{5.2/10}=1.08<1.96$,

因此不能拒绝原假设，从而认为生产是正常的。

2、两个正态总体均值的假设检验

设 $\xi\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$\eta\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$；$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 分别为取自正态总体 ξ，η 的样本，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 相互独立，且 σ_1^2，σ_2^2 已知，现要检验两总体的均值：μ_1，μ_2 是否相等。

分析：提出原假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$，or $H_0:\mu_1-\mu_2=0$,

$$\because\ \xi\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ \eta\sim N(\mu_2,\sigma_2^2),$$

$$\therefore\ \bar{\xi}\sim N(\mu_1,\sigma_1^2/m),\ \bar{\eta}\sim N(\mu_2,\sigma_2^2/n),$$

$$\bar{\xi}-\bar{\eta}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n})$$

构造统计量：$$U=\frac{(\bar{\xi}-\bar{\eta})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,1)$$

在原假设成立的条件下，有:

$$U=\frac{\bar{\xi}-\bar{\eta}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,1) \qquad (8.2.2)$$

又E(U)=0，故U在0附近波动不应太大，U远离0的可能性很小，在显著性水平 α 给定时，可构造拒绝域:

$$D=(|U|\geq u_{1-\alpha/2}),\text{ 使得 } P(|U|\geq u_{1-\alpha/2})=\alpha,$$

从样本观测值计算(7.2.2)式得 $U_{值}$，若 $|U_{值}|\geq u_{1-\alpha/2}$，则拒绝原假设，否则就接受原假设。

例8.2.2 由过去资料知甲、乙两煤矿的含灰率分别服从正态分布 $N(\mu_1,7.5)$，$N(\mu_2,2.6)$，现从两矿各抽出一些样品，分析其含灰率分别是:

甲矿：24.3，20.8，23.7，21.3，17.4 (%)；

乙矿：18.2，16.9，20.2，16.7 (%)。

问甲乙两矿所采煤的含灰率的均值是否有显著差异？$(\alpha=0.10)$

分析：已知以甲、乙两矿所采煤的含灰率是两个正态总体

$$\xi\sim N(\mu_1,7.5),\ \eta\sim N(\mu_2,2.6),$$

问题归结为根据所给样本观测值对方差已知的两个正态总体均值是否相等进行的检验问题。

解：提出原假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$

$$\because\ \bar{\xi}-\bar{\eta}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

在原假设成立的情况下，$U=\dfrac{\bar{\xi}-\bar{\eta}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$,

取 $\alpha=0.10$, 查表可得拒绝域:

$$D=(-\infty,-1.64]\cup[1.64,+\infty)$$

由所给样本观察值算得: $\bar{x}=21.5$, $\bar{y}=18$

于是算得U统计量为:

$$U_{值}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{21.5-18}{\sqrt{\dfrac{7.5}{5}+\dfrac{2.6}{4}}}=2.39>1.64$$

$U_{值}$ 落入拒绝域，所以拒绝原假设。

因此可以认为：两矿含灰率的均值有显著差异。

二、T-检验

1、单个正态总体(σ^2 未知)的假设检验

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，σ^2 未知现要检验假设 $H_0:\mu=\mu_0$，由于σ^2未知，因此(7.2.1)中的统计量U就不能使用。

能否对表达式 $U=\dfrac{\bar{\xi}-u_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 进行改造?

若用方差的无偏估计 $S_n^{*2}=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$ 代替 σ^2, 则得

统计量:
$$T=\frac{\xi-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}}\sim t(n-1),\qquad (8.2.3)$$

使用这类统计量进行假设检验就称为：T-检验。

$\because\ E(T)=0$，故T在0附近波动不应太大，超过一定范围就认为不太可能发生。对给出的显著性水平 α，在 H_0为真时，

1）在双侧检验时，查表得：$t_{1-\alpha/2}(n-1)$,

构造拒绝域： $D=(|T|\ge t_{1-\alpha/2}(n-1))$,

使得： $P(|T|\ge t_{1-\alpha/2}(n-1))=\alpha$

2）在左单侧检验时，查表得：$t_{\alpha}(n-1)$,

构造拒绝域： $D=(T\le t_{\alpha}(n-1))$,

使得： $P(T\le t_{\alpha}(n-1))=\alpha$

3）在右单侧检验时，查表得：$t_{1-\alpha}(n-1)$,

构造拒绝域： $D=(T\ge t_{1-\alpha}(n-1))$,

使得： $P(T\ge t_{1-\alpha}(n-1))=\alpha$

从样本观测值算得T值，若T值落入拒绝域，拒绝原假设，若T值落入接受域，就接受原假设。

例8.2.3 某型号玻璃纸的横向延伸率要求不低于65%，且服从正态分布 $N(65,\sigma^2)$，现对该型号的玻璃纸测得100个数据如下表所示。在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验该批玻璃纸横向延延伸率指标是否符合要求？

横向延伸率%	35.5	37.5	39.5	41.5	43.5	45.5	47.5	49.5
频数	7	8	11	9	9	12	17	14
横向延伸率%	51.5	53.5	55.5	57.5	59.5	61.5	63.5	
频数	5	3	2	0	2	0	1	

解：提出原假设 $H_0:\mu_0\ge 65\ \ or\ \ \mu_0=65\leftrightarrow H_1:\mu_0<65$

取统计量： $$T=\frac{\bar{\xi}-\mu}{S_n^*/\sqrt{100}}\sim t(99),$$

根据题意，这是单侧显著性检验，在 $\alpha=0.05$下，

查表得： $t_{0.05}(99)=-1.65$,

于是得拒绝域:

$$D=(T\le -1.65),\ \text{使得}\quad P(T\le -1.65)=0.05$$

由样本算得:

$$\bar{x}=45.06,\quad S_n^*=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=5.818$$

$$T_{\text{值}}=\frac{\bar{x}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}}=\frac{45.06-65}{5.818/10}=-34.27<-1.65$$

故拒绝原假设，即认为这批玻璃纸没有达到横向延伸率指标。

2、两个正态总体的假设检验

当两个正态总体的方差未知(两者须相等)时，要检验两总体的均值是是否相等，这时要使用T-检验。

设$\xi\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$\eta\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n_1}$；$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n_2}$分别为取自正态总体$\xi$，$\eta$的样本，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n_1}$和$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n_2}$相互独立，且$\sigma^2$未知，现要检验两总体的均值$\mu_1=\mu_2$否？

分析：提出原假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$，or $H_0:\mu_1-\mu_2=0$,

由于σ^2未知，必须利用样本修正方差S_1^{*2}，S_2^{*2}求得:

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^{*2}+(n_2-1)S_2^{*2}}{n_1+n_2-2}\quad \text{作为}\sigma^2\text{的估计。}$$

构造统计量: $$T=\frac{\bar{\xi}-\bar{\eta}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\cdot\frac{(n_1-1)S_1^{*2}+(n_2-1)S_2^{*2}}{n_1+n_2-2}}}$$

$$T=\frac{\bar{\xi}-\bar{\eta}}{\sqrt{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})\cdot\frac{(n_1-1)S_1^{*2}+(n_2-1)S_2^{*2}}{n_1+n_2-2}}}\sim t(n_1+n_2-2) \quad (8.2.4)$$

在显著性水平 α 给定时，查表求临界值：

$$t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2),$$

于是构造拒绝域：

$$D=(|T|\geq t_{1-\alpha/2}),\text{ 使得 } P(|T|\geq t_{1-\alpha/2})=\alpha,$$

从样本观测值算得T值，若T值落入拒绝域，拒绝原假设，若T值落入接受域，就接受原假设。

特别，当 $n_1=n_2=n$ 时，T统计量可简化为：

$$T=\frac{\bar{\xi}-\bar{\eta}}{\sqrt{\frac{(S_1^{*2}+S_2^{*2})}{n}}}\sim t(2n-2) \quad (8.2.5)$$

例8.2.4 在一台自动车床上加工直径为2.050毫米的轴，现每相隔2小时各取容量都为10的样本，所得数据见下表：

号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
本1	2.066	2.063	2.060	2.067	2.063	2.063	2.059	2.062	2.062	2.060
本 2	2.063	2.060	2.057	2.056	2.059	2.058	2.062	2.059	2.059	2.057

假设轴直径服从正态分布，试分析这台车床的生产是否稳定？

解：轴直径服从正态分布，由于样本取自同一台车床，可以认为 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，提出检验假设 $H_0:\mu_1=\mu_2\leftrightarrow H_1:\mu_1\neq\mu_2$

由于本例中 $n_1=n_2=10$，检验统计量为：

$$T=\frac{\bar{\xi}-\bar{\eta}}{\sqrt{\frac{(S_1^{*2}+S_2^{*2})}{n}}}\sim t(2n-2)$$

由样本算得：$\bar{x}=2.063$，$\bar{y}=2.059$，

$$S_1^{*2}=0.00000956,\quad S_2^{*2}=0.00000489,$$

给定的 $\alpha=0.01$， 查表得临界值： $t_{0.995}(18)=2.878$

于是得拒绝域：

$$D=(|T|\geq 2.878),\ 使得\quad P(|T|\geq 2.878)=0.05,$$

$$\because\quad T_{值}=\frac{2.063-2.059}{\sqrt{\dfrac{0.00000956+0.00000489}{10}}}=3.3>2.878$$

故拒绝原假设，即认为两个子样的均值是有差异的。因此，这台车床的生产是不稳定的。

三、χ^2-检验

前面介绍的U-检验与T-检验都是有关均值假设的显著性检验问题，下面讨论的是有关方差假设的显著性检验问题。

1、单个正态总体方差的假设检验

设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的样本，要求检验的假设是 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$

(1) 当 $\mu=\mu_0$ 时，样本方差 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_0)^2$ 是总体方差 σ_0^2 的无偏估计。 因此，统计量：

$$\chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)\qquad(8.2.6)$$

由于$E(\chi^2(n))=n$，因此这个统计量的值应在n周围随机波动。

构造拒绝域的方法:

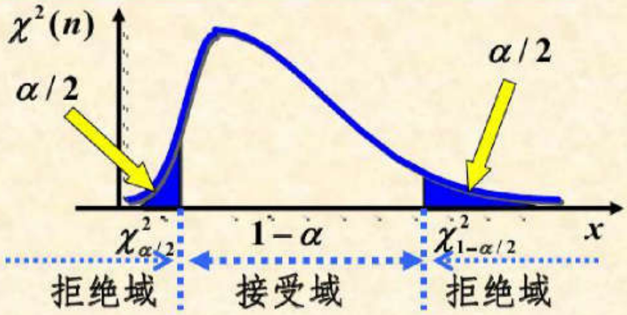
对给定的 α,

查表求得:

$\chi^2_{\alpha/2}(n)$, $\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$

构造拒绝域是:

$D=(0,\chi^2_{\alpha/2}]\bigcup[\chi^2_{1-\alpha/2},\infty)$



构造双侧拒绝域的示意图

落入拒绝域的概率是:

$P\{(0,\chi^2_{\alpha/2}]\bigcup[\chi^2_{1-\alpha/2},\infty)\}=\alpha$

从样本观测值算得卡方值，若卡方值落入拒绝域，拒绝原假设，若卡方值落入接受域，就接受原假设。

这种检验就称为卡方检验。

(1) 当 μ 未知时，这时要用 $\bar{\xi}$ 作为 μ 的无偏估计。

在原假设 H_0 成立的情况下，统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

对给定的 α，查表求得:

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1),\quad \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$$

构造拒绝域是:

$$D=(0,\chi^2_{\alpha/2}(n-1)]\bigcup[\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),\infty)$$

根据样本计算卡方的值，若其值落入拒绝域，就拒绝原假设，否则就接受原假设。

例8.2.5 某厂一自动车床加工零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，原来加工精度 $\sigma_0^2=0.18$，经过一段时间生产后，要检验一下这一车床是否保持原来加工精度，为此抽取这车床所加工的31个零件，测得数据如下表所示：

零件长度 x_i	10.1	10.3	10.6	11.2	11.5	11.8	12.0
频数 n_i	1	3	7	10	6	3	1

在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验车床的精度是否有变化？

解：检验假设是 $H_0:\sigma^2\le 18 \leftrightarrow H_1:\sigma^2>18$

本例均值未知，因此取统计量是：

$$\chi^2=\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$\because\ \alpha=0.05,\quad \therefore\ \chi^2_{0.95}(30)=43.8,$

故得拒绝域为： $D=[43.8,\infty)$

$$P\{[43.8,\infty)\}=0.05$$

由样本算得： $\bar{x}=11.08,\ S_n^{*2}=0.267$

$$\chi^2_{值}=\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2}=44.5>43.8$$

落入拒绝域，因此拒绝原假设。

这说明自动车床工作一段时间后精度变差。

四、F-检验

在用 T-检验来检验两个总体的均值是否相等时我们实际上作了一个假定：两个总体的方差是相等的。如果我们事先不知道两个总体方差是否相等，那么首先就必须检验方差是否相等。要检验两个正态总体的方差是否相等，就要使用F-检验。

设 $\xi \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$\eta \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n_1}$；$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n_2}$ 分别为取自正态总体 ξ，η 的样本，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n_1}$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n_2}$ 相互独立。现在要检验两总体的方差是否相等。

即检验假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$

在两总体的均值已知时，检验方法与卡方检验相似，因此下面只讨论两总体的均值未知的情况。

在原假设成立时，两个样本的方差之比应该在1周围随机摆作，这个比既不能太大也不能太小。

在原假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 为真时，统计量

$$F=\frac{S_1^{*2}}{S_1^{*2}}=\frac{S_1^{*2}/\sigma_1^2}{S_1^{*2}/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1) \qquad (8.2.7)$$

在显著性水平 α 下，查表得：

$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$，使得 $P[F\le F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)]=\alpha/2$,

$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$，使得 $P[F\ge F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)]=\alpha/2$

于是得拒绝域：

$$D=(0,F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)]\cup[F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1),\infty)$$

根据样本计算F值，若其值落入拒绝域，就拒绝原假设，否则就接受原假设。这种检验就称为F-检验。

要注意的是：一般F-分布表只给出 $F_{1-\alpha/2}$，没有给出$F_{\alpha/2}$的值，怎么办？

注意到：$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)}$ （8.2.8）

于是先求分位点： $F_{1-\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)$,

就可算出分位点： $F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

例8.2.6 为了比较甲，乙两种安眠药的疗效。把20名患者分成两组，每组10人。假定服药后延长的睡眠时间服从正态分布，所得数据见下表。两种药的疗效有无显著差别。$(\alpha=0.05)$

甲组	5.5	4.6	4.4	3.4	1.9	1.6	1.1	0.8	0.1	-0.1
乙组	3.7	3.4	2.0	2.0	0.8	0.7	0.0	-0.1	-0.2	-1.6

解：设服甲药后延长的睡眠时间 $\xi\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,

服乙药后延长的睡眠时间 $\eta\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

本例中 μ_1，μ_2，σ_1^2，σ_2^2 均未知。如何进行检验？

（1）先在 μ_1，μ_2 未知的情况下检验

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

在原假设成立的条件下取统计量：

$$F=\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

对 $\alpha = 0.05$, 查表得: $F_{0.975}(9,9) = 4.03$,

于是 $F_{0.025}(9,9) = \dfrac{1}{F_{0.975}(9,9)} = \dfrac{1}{4.03} = 0.25$

因此得拒绝域: $D = (0, 0.25] \cup [4.03, +\infty)$

根据样本算得: $\bar{x} = 2.33$, $\bar{y} = 0.75$,

$$S_1^{*2} = 4.01,\quad S_2^{*2} = 3.20$$

代入计算得 $F_{值} = \dfrac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}} = \dfrac{4.01}{3.20} = 1.25$

其值落入接受域, 因此认为: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

(2) 现在 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 的条件下检验

$$H_0' : \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1' : \mu_1 \neq \mu_2$$

这是在两总体相等时检验它们的均值是否相等的问题。

本例中 $n_1 = n_2 = 10$, 取统计量:

$$T = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{\dfrac{(S_1^{*2} + S_2^{*2})}{n}}} \sim t(2n-2)$$

对 $\alpha = 0.05$, $t_{0.975}(18) = 2.101$, 检验的拒绝域是:

$D = (|T| \geq 2.101)$, 使得 $P(|T| \geq 2.101) = 0.05$,

把样本均值、修正方差代入计算得:

$$T_{值} = \frac{2.33 - 0.75}{\sqrt{\dfrac{4.01 + 3.20}{10}}} = 1.86 < 2.101$$

其值不落入拒绝域, 因此接受原假设。

检验结果认为: 两种安眠药疗效无显著差异。

第八章 假设检验 (2)　统计学概论(温州大学陈希镇) 首页 返回 上页 下页 结束

现在可以回答在第一节提出的问题:

例8.1.1 为了检验“指导—自主学习”教改实验的效果，从参加该教改实验的某校初二年段随机抽取两个小组，在数学教学中，实验组使用新课程学习教学方法，对照组使用传统教学方法，经一段教学后用同一份试卷进行测试，两组学生的分数见下表:

实验组成绩	64	58	65	56	58	45	55	63	66	69
对照组成绩	60	59	57	41	38	52	46	51	49	58

问: 指导—自主学习方法是否优于传统教学方法? $(\alpha=0.05)$

请同学们思考要怎样解答!

解: 设在启发式教学法下学生考试成绩 $\xi\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,

在传统教学法下学生考试成绩 $\eta\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

本例中 μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2 均未知，因此先作方差相等的检验。

（1）先在 μ_1, μ_2 未知的情况下检验

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2\leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

取统计量: $F=\dfrac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

对 $\alpha=0.05$, 查表得: $F_{0.975}(9,9)=4.03$,

$$F_{0.025}(9,9)=1/F_{0.975}(9,9)=0.25$$

因此得拒绝域: $D=(0,0.25]\cup[4.03,+\infty)$

由于 $\bar{x}=59.9$, $\bar{y}=51.1$, $S_1^{*2}=(6.999)^2$, $S_2^{*2}=(7.666)^2$

代入检验统计量计算得: $F_{值}=\dfrac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}=\dfrac{(6.999)^2}{(7.666)^2}=0.834$

其值落入接受域，因此认为：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$

（2）现在 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 的条件下检验

$$H_0':\mu_1=\mu_2 \leftrightarrow H_1':\mu_1\neq\mu_2$$

本例中 $n_1=n_2=10$，取统计量：

$$T=\frac{\bar{\xi}-\bar{\eta}}{\sqrt{\frac{(S_1^{*2}+S_2^{*2})}{n}}}\sim t(2n-2)$$

检验的拒绝域是：$D=(|T|\geq 2.101)$

计算T值得：$T_{值}=\dfrac{59.9-51.1}{\sqrt{\dfrac{(6.999)^2+(7.666)^2}{10}}}=2.681\ >2.101$

拒绝原假设，即认为启发式教育法优于传统教育法。

五、配对数据的检验

有时为了比较两种产品，两种仪器，或两种试验方法等的差异，常常在相同的条件下做对比试验，得到一批成对(配对)的观测值，然后对观测数据进行分析。作出推断，这种方法常称为配对分析法。

例8.2.7 比较甲乙两种橡胶轮胎的耐磨性，今从甲乙两种轮胎中各随机地抽取8个，其中各取一个组成一对。再随机选择8架飞机，将8对轮胎随机地搭配给8架飞机，做耐磨性实验飞行一段时间的起落后，测得轮胎磨损量（单位：mg）数据如下：

轮胎甲：4900，5220，5500，6020，6340，7660，8650，4870

轮胎乙；4930，4900，5140，5700，6110，6880，7930，5010

试问这两种轮胎的耐磨性有无显著差异？