第四节 长期趋势分析

一、时间序列的构成因素和分析模型

二、长期趋势测定方法之时距扩大法

三、长期趋势测定方法之移动平均法

四、长期趋势测定方法之趋势模型法

五、长期趋势测定方法之趋势外推预测

一、构成因素和分析模型

（一）时间序列的构成因素:

（1）长期趋势（T）
（2）季节变动（S）
（3）循环变动（C）

—可解释的变动

（4）不规则变动（I） —不可解释的变动

1. 长期趋势变动（T）

又称趋势变动

—时间序列在较长持续期内表现出来的总态势。

—是由现象内在的根本性的、本质因素决定的，支配着现象沿着一个方向持续上升、下降或在原有水平上起伏波动。

2. 季节变动（S）

由于自然季节因素（气候条件）或人文习惯季节因素（节假日）更替的影响，时间序列随季节更替而呈现的周期性变动。

季节周期:

—通常以"年"为周期、

—也有以"月、周、日"为周期的—准季节变动。

3.循环变动（*C*）

—时间序列中以若干年为周期、上升与下降交替出现的循环往复的运动。

如：经济增长中："繁荣－衰退－萧条－复苏－繁荣"—商业周期。

固定资产或耐用消费品的更新周期等。

季节变动和循环变动的比较

变动	周期规律	波动成因
季节	固定周期	自然因素 制度性因素
循环	规律性低	经济系统的内部因素

4. 随机变动（I）：

—由于偶然性因素的影响而表现出的不规则波动。故也称为**不规则变动**。

随机变动的成因：

—自然灾害、意外事故、政治事件；

—大量无可言状的随机因素的干扰。

（二）时间序列分析模型

1. 加法模型： $Y=T+S+C+I$

假定四种变动因素相互独立，数列各时期发展水平是各构成因素之总和。

2. 乘法模型： $Y=T\times S\times C\times I$

假定四种变动因素之间存在着交互作用，数列各时期发展水平是各构成因素之乘积。

（三）时间序列的分解分析

时间序列的分解分析就是按照时间序列的分析模型，测定出各种变动的具体数值。其分析取决于时间序列的构成因素。

1、仅包含趋势变动和随机变动（年度数据）：
乘法模型为：$Y=T \times I$
加法模型为：$Y=T+I$

消除随机变动，测算出 长期趋势。

2. 含趋势、季节和随机变动:

按月（季）编制的时间序列通常具有这种形态。

分析步骤:

a. 分析和测定趋势变动，求趋势值 T；

b. 对时间序列进行调整，得出不含趋势变动的时间序列资料。

乘法 $$\frac{Y}{T}=\frac{T \times S \times I}{T}=S \times I$$

加法 $$Y-T=(T+S+I)-T$$
$$=S+I$$

c. 对以上的结果进一步进行分析，消除随机变动 I 的影响，得出季节变动的测定值 S。

分解分析的作用：

1. 测定各构成因素的数量表现，认识和掌握现象发展规律;

2.将某一构成因素从数列中分离出来，便于分析其它因素的变动规律;

3.为时间序列的预测奠定基础。

二、长期趋势的测定方法

长期趋势测定的方法:

1. 时距扩大法;
2. 移动平均法;
3. 数学模型法等。

1. 时距扩大法：

是测定长期趋势最原始、最简单的方法。

将时间序列的时间单位予以扩大，并将相应时间内的指标值加以合并，从而得到一个扩大了时距的时间序列。

作用：—消除较小时距单位内偶然因素的影响，显示现象变动的基本趋势

时距扩大法

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{求和} & \text{求平均} \\
\left.\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}\right\} & y_1+y_2+y_3 & \bar{y}_2=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3} \\
\left.\begin{array}{l} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{array}\right\} & y_4+y_5+y_6 & \bar{y}_5=\dfrac{y_4+y_5+y_6}{3} \\
\vdots & & \\
\left.\begin{array}{l} y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{array}\right\} & y_{n-2}+y_{n-1}+y_n & \bar{y}_{n-1}=\dfrac{y_{n-2}+y_{n-1}+y_n}{3}
\end{array}
$$

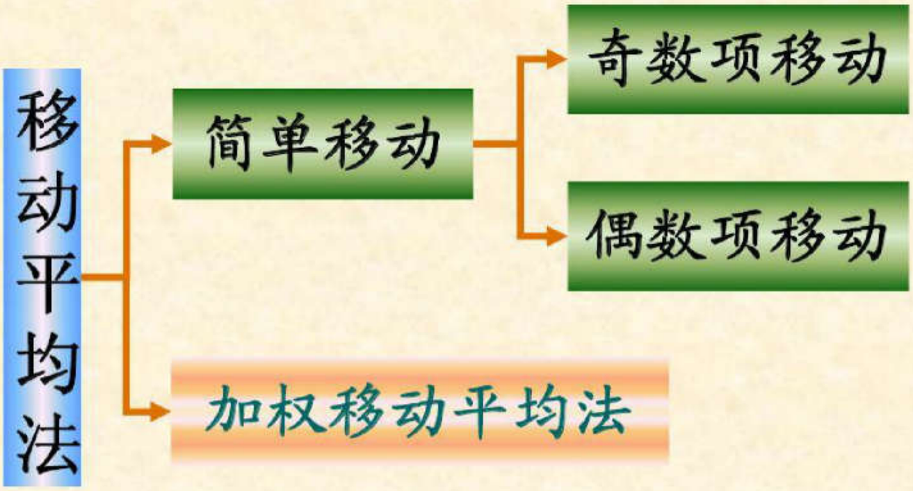
2. 移动平均法:

是测定时间序列趋势变动的基本方法。

对时间数列的各项数值，按照一定的时距进行逐期移动，计算出一系列序时平均数，形成一个派生的平均数时间数列，以此削弱不规则变动的影响，达到对原序列进行修匀的目的，显示出原数列的长期趋势。

若原数列呈周期变动，应选择现象的变动周期作为移动的时距长度。

2. 移动平均法:



（1）简单移动平均

奇数项移动平均法

原数列　t_1　t_2　t_3　t_4　t_5　t_6　t_7

移动平均　$\frac{t_1+t_2+t_3}{3}$　$\frac{t_2+t_3+t_4}{3}$　$\frac{t_3+t_4+t_5}{3}$　$\frac{t_4+t_5+t_6}{3}$　$\frac{t_5+t_6+t_7}{3}$

新数列　$\boxed{\overline{t}_2}$　$\boxed{\overline{t}_3}$　$\boxed{\overline{t}_4}$　$\boxed{\overline{t}_5}$　$\boxed{\overline{t}_6}$

时间序列 ： $y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, y_n$

$$M_2^{(1)} = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

$$M_3^{(1)} = \frac{1}{3}(y_2 + y_3 + y_4)$$

……

$$M_{n-1}^{(1)} = \frac{1}{3}(y_{n-2} + y_{n-1} + y_n)$$

（2）简单移动平均

偶数项移动平均法

偶数项的中心化简单平均数要经过两次移动计算才可得到。

例如：移动项数 $N=4$ 时，计算的移动平均数对应中项在两个时期的中间：

$$M_{2.5}^{(1)}=\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4)$$

$$M_{3.5}^{(1)}=\frac{1}{4}(y_2+y_3+y_4+y_5)$$

……

由于这样算出平均数的时期不明确，故不能作为趋势值。

解决办法：对第一次移动平均的结果，再作一次移动平均。

$$M_{3}^{(2)}=\frac{1}{2}(M_{2.5}^{(1)}+M_{3.5}^{(1)})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{y_1+2y_2+2y_3+2y_4+y_5}{4}$$

$$\therefore\quad M_{3}^{(2)}=\frac{\frac{1}{2}y_1+y_2+y_3+y_4+\frac{1}{2}y_5}{4}$$

$$M_{4}^{(2)}=\frac{\frac{1}{2}y_2+y_3+y_4+y_5+\frac{1}{2}y_6}{4}$$

……

偶数项“移动法则”：

1. 要取“ $2n+1$ ”项；
2. 采用“首尾取半法”计算移动平均数；
3. 作为 $n+1$ 项的长期趋势值。

偶数项移动平均法 （移动项数 $N=4$）

1. y_1
2. y_2
3. y_3
4. y_4
5. y_5
6. y_6
7. y_7
8. y_8
9. y_9

⋮

n. y_n

移动平均

$$\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\quad \frac{y_2+y_3+y_4+y_5}{4},\quad \frac{y_3+y_4+y_5+y_6}{4},\quad \frac{y_4+y_5+y_6+y_7}{4}$$

移正平均

$$\frac{\dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}+\dfrac{y_2+y_3+y_4+y_5}{4}}{2}=\frac{\frac{1}{2}y_1+y_2+y_3+y_4+\frac{1}{2}y_5}{4}$$

$$\frac{\dfrac{y_2+y_3+y_4+y_5}{4}+\dfrac{y_3+y_4+y_5+y_6}{4}}{2}=\frac{\frac{1}{2}y_2+y_3+y_4+y_5+\frac{1}{2}y_6}{4}$$

例　对以下数据计算移动平均数

年份	产量（y吨）	移动平均数	
		n = 3	n = 4
1998	440 431	—	—
1999	469 331	496 847.3	—
2000	580 780	539 793.7	528 415.8
2001	569 270	566 061.0	555 814.5
2002	548 133	566 074.0	—
2003	580 819	—	—

（2）加权移动平均法:

—是对各期指标值进行加权后计算的平均数。注意事项:

一般计算奇数项加权移动平均数;

权数以二项展开式为基础。

中项的权数最大，两边对称，逐期减小。

如$N = 3$ 时，应以

$(a + b)2 = a2 + 2ab + b2$ 的系数

1，2，1 为权数:

1. y_1

2. y_2

3. y_3

4. y_4

5. y_5

$$\frac{y_1+2y_2+y_3}{4}$$

$$\frac{y_2+2y_3+y_4}{4}$$

$$\frac{y_3+2y_4+y_5}{4}$$

$$M_{\varpi 2}^{(1)}=\frac{y_1+2y_2+y_3}{4}$$

$$M_{\varpi 3}^{(1)}=\frac{y_2+2y_3+y_4}{4}$$

……

$$M_{\varpi t}^{(1)}=\frac{y_{t-1}+2y_t+y_{t+1}}{4}$$

如：$N=5$ 时，应以

$(a+b)^4=$

$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ 的系数

1，4，6，4，1 为权数：

$$M_{\varpi 3}^{(1)}=\frac{y_1+4y_2+6y_3+4y_4+y_5}{16}$$

$$M_{\varpi 4}^{(1)}=\frac{y_2+4y_3+6y_4+4y_5+y_6}{16}$$

……

$$M_{\varpi t}^{(1)}=\frac{y_{t-2}+4y_{t-1}+6y_t+4y_{t+1}+y_{t+2}}{16}$$

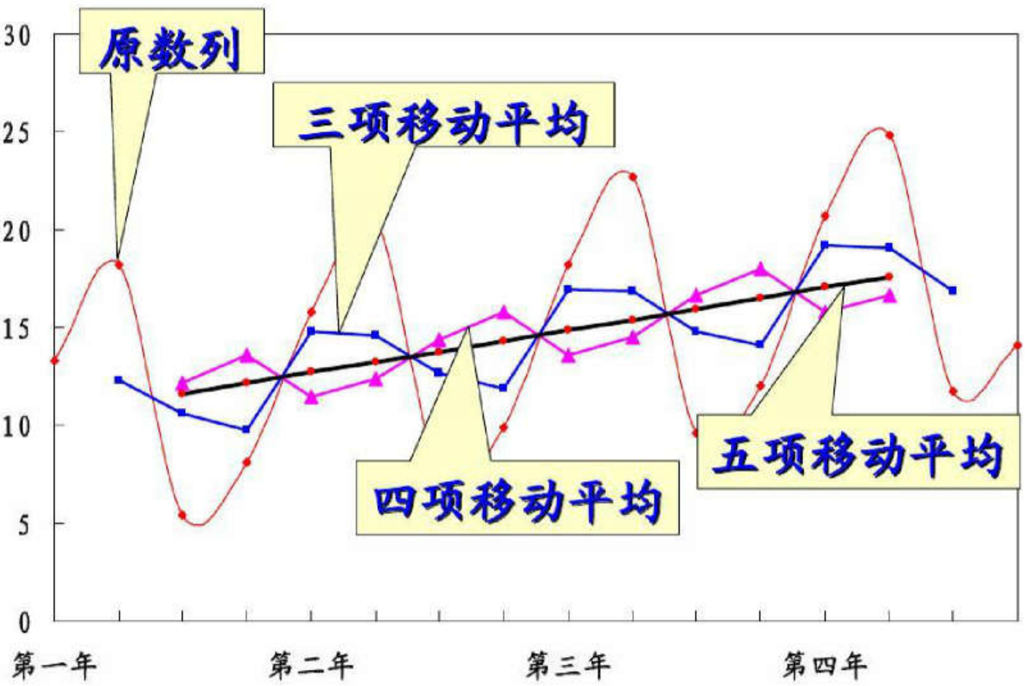
移动平均法的特点

移动平均对数列具有平滑修匀作用，移动项数越多，平滑修匀作用越强；

由移动平均数组成的趋势值数列，较原数列的项数少，N为奇数时，趋势值数列首尾各少 $(N-1)/2$ 项；N为偶数时，首尾各少 $N/2$ 项；

局限：不能完整地反映原数列的长期趋势，不便于直接根据修匀后的数列进行预测。

某种商品零售量



3. 趋势模型法:

也称曲线配合法，它是根据时间序列的数据特征，建立一个合适的趋势方程来描述时间序列的趋势变动，推算各时期的趋势值。

建立趋势模型的程序:

1. 选择合适的模型:

判断方法:

a. 直接观察法（散点图法）

b. 增长特征法

常见的趋势方程

1）线性趋势方程

—逐期增长量大致相等。

$$\hat{y}_t = a + b \cdot t$$

2）二次曲线趋势方程

—逐期增长量大致等量递增或递减。

$$\hat{y}_t = a + bt + ct^2$$

3）指数曲线方程

—环比发展速度近似一个常数。

$$\hat{y}_t = ab^t$$

(1)线性方程： $\hat{y}_t = a + bt$

若时间序列的逐期增长量相对稳定近似一个常量，可配合直线方程。

(2)抛物线方程：$\hat{y}_t = a + bt + ct^2$

若时间序列的二级增长量大体相同，可配合抛物线方程。

(3)指数曲线方程： $\hat{y}_t = ab^t$

若时间序列的环比发展速度大体相同，可配合指数曲线方程。

	逐期增长量	二级增长量	环比发展速度
y_0	—	—	—
y_1	$\Delta_1 = y_1 - y_0$	—	y_1/y_0
y_2	$\Delta_2 = y_2 - y_1$	$\Delta_2 - \Delta_1$	y_2/y_1
y_3	$\Delta_3 = y_3 - y_2$	$\Delta_3 - \Delta_2$	y_3/y_2
y_4	$\Delta_4 = y_4 - y_3$	$\Delta_4 - \Delta_3$	y_4/y_3
y_5	$\Delta_5 = y_5 - y_4$	$\Delta_5 - \Delta_4$	y_5/y_4
$\vdots$	$\vdots$		

直线趋势方程： $\boxed{\hat{y} = a + bt}$

t	y_i	一阶差分$y_i - y_{i-1}$
1	$a+b$	—
2	$a+2b$	b
3	$a+3b$	b
4	$a+4b$	b
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a+nb$	b

抛物线趋势方程: $\hat{y} = a + bt + ct^2$

t	y_i	一阶差分	二阶差分
1	$a+b+c$	—	—
2	$a+2b+4c$	$b+3c$	—
3	$a+3b+9c$	$b+5c$	$2c$
4	$a+4b+16c$	$b+7c$	$2c$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a+nb+n^2c$	$b+(2n-1)c$	$2c$

指数曲线趋势方程: $\hat{y} = ab^t$

t	y_i	y_i / y_{i-1}
1	ab	—
2	ab^2	b
3	ab^3	b
4	ab^4	b
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	ab^n	b

例4.4.2 已知1991－2008年我国汽车产量数据如下表所示，试计算（1）3年移动平均值；（2）根据修匀后的数据用最小二乘法建立趋势方程；（3）根据趋势方程预测2008年的汽车产量。

表4.4　1991－2008年我国汽车产量数据

年份	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
产量X_i(万辆)	17.56	19.63	23.98	31.64	43.72	36.98	47.18	64.47	58.35	51.40
三年移动平均Y_i	---	20.39	25.08	33.11	37.45	42.63	49.54	56.75	58.07	60.39

年份	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
产量X_i(万辆)	71.42	106.67	129.85	136.69	145.27	147.52	158.25	163.00	
三年移动平均Y_i	76.50	102.65	124.40	137.27	143.16	150.351	156.26	---	

2.估计模型的参数的方法：

分段平均法

最小二乘法

三点估计法…

3. 计算趋势变动测定值

把自变量 t 的取值，依次代入趋势方程，求出相应时期的趋势变动测定值。

直线趋势的测定：最小二乘法

直线趋势方程: $\hat{y} = a + bt$

经济意义：数列水平的平均增长量

用最小平方法 求解参数 a、b ，有

$$\sum y = na + b\sum t$$
$$\sum ty = a\sum t + b\sum t^2$$

$$b = \frac{n\sum ty - \sum t \sum y}{n\sum t^2 - (\sum t)^2}$$
$$a = \bar{y} - b\bar{t}$$

例4.4.3 已知某省GDP资料（单位：亿元）如下，拟合直线趋势方程，并预测1999年的水平。

年份	t	GDP (y)	ty	t^2
1986	1	7610.6	7610.6	1
1987	2	8491.3	16982.6	4
1988	3	9448.0	28344.0	9
1989	4	9832.2	39328.8	16
1990	5	10209.1	51045.5	25
1991	6	11147.7	66886.2	36
1992	7	12735.1	89145.7	49
1993	8	14452.9	115623.2	64
1994	9	16283.1	146547.9	81
1995	10	17993.7	179937.0	100
1996	11	19718.4	216902.4	121
1997	12	21454.7	257456.4	144
1998	13	23129.0	300677.0	169
合计	91	182505.8	1516487.3	819

解：已知 $n=13, \sum t=91, \sum y=182505.8,$

$\sum ty=1516487.3, \sum t^2=819$，则

$$b=\frac{n\sum ty-\sum t\sum y}{n\sum t^2-(\sum t)^2}=\frac{13\times 1516487.3-91\times 182505.8}{13\times 819-91^2}$$

$$=1312.89$$

$$a=\bar{y}-b\bar{t}=\frac{182505.8}{13}-1312.89\times\frac{91}{13}=4848.68$$

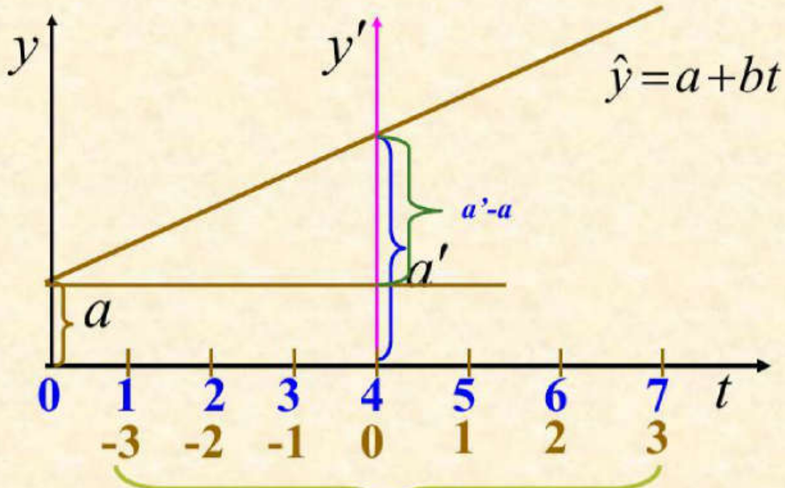
即直线趋势方程为：

$$\hat{y}=4848.68+1312.89t$$

预测:

$$\hat{y}_{1999}=4848.68+1312.89\times 14$$
$$=23229.14(\text{亿元})$$

求解a、b的简捷方法



取时间数列中间项为原点

$$\sum t=0$$

当$\sum t=0$时，有

$$\sum y = na + b\sum t$$
$$\sum ty = a\sum t + b\sum t^2$$

$$\sum y = na$$
$$\sum ty = b\sum t^2$$

$$b = \frac{n\sum ty - \sum t\sum y}{n\sum t^2 - (\sum t)^2}$$
$$a = \bar{y} - b\bar{t}$$

$$b = \frac{\sum ty}{\sum t^2}$$
$$a = \frac{\sum y}{n} = \bar{y}$$

N为奇数时，令$t = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

N为偶数时，令$t = \ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots$

年份	t	t	GDP (y)	ty	t^2
1986	1	-6	7610.6	-45663.6	36
1987	2	-5	8491.3	-42456.5	25
1988	3	-4	9448.0	-37792.0	16
1989	4	-3	9832.2	-29496.6	9
1990	5	-2	10209.1	-20418.2	4
1991	6	-1	11147.7	-11147.7	1
1992	7	0	12735.1	0	0
1993	8	1	14452.9	14452.9	1
1994	9	2	16283.1	32566.2	4
1995	10	3	17993.7	53981.1	9
1996	11	4	19718.4	78873.6	16
1997	12	5	21454.7	107273.5	25
1998	13	6	23129.0	138774.0	36
合计	91	0	182505.8	238946.7	182

解：取中间项第 7项为原点，有 $\sum t=0$，$n=13$，

$\sum y=182505.8,\sum ty=238946.7,\sum t^2=182$，则

$$b=\frac{\sum ty}{\sum t^2}=\frac{238946.7}{182}=1312.89$$

$$a=\frac{\sum y}{n}=\bar{y}=\frac{182505.8}{13}=14038.91$$

即直线趋势方程为：

$$\hat{y}=14038.91+1312.89t$$

预测：$\hat{y}_{1999}=14038.91+1312.89\times 7=23229.14$（亿元）

（2）指数曲线模型 $\hat{y}=ab^t$

由 $y=ab^t$

有 $\lg y=\lg a+t\lg b$

令$y'=\lg y,A=\lg a,B=\lg b$

则 $y'=A+Bt$

用最小二乘法求出A、B。

进而求出a,b。

3.计算趋势值。

（2）加权最小二乘法

普通最小二乘法 $Q=\sum(y_i-\hat{y}_i)^2=\min$

加权最小二乘法 $S=\sum W^{n-i}(y_i-\hat{y}_i)^2=\min \quad 0<W<1$

W^{n-i}称为加权系数。

由于加权系数序列单调递增，因此给予远期数据较小的权数，给予近期数据较大的权数。加权系数对于远期数据起“打折扣”的作用，折扣的程度取决于W值的大小，W的值越接近于0，折扣作用越大； W的值越接近于1，折扣作用越小；当W=1时，即为普通最小二乘法。

为满足 $S=\sum W^{n-i}(y_i-\hat{y}_i)^2=\min$ 若$\hat{y}=a+bt$

分别求S对a和对b的偏导数，整理得

$$\begin{cases}\sum W^{n-i}y_i=a\sum W^{n-i}+b\sum W^{n-i}t \\ \sum W^{n-i}ty_i=a\sum W^{n-i}t+b\sum W^{n-i}t^2\end{cases}$$

解出a和b，即得模型。

$$\begin{cases}\hat{y}=66.95+8t\text{—加权最小二乘法} \\ \hat{y}=75.07+6.82t\text{—普通最小二乘法}\end{cases}$$

$$\text{相对误差}=\frac{\text{误差}}{\text{实际值}}=\frac{y_i-\hat{y}_i}{y_i}$$

普通最小二乘与加权最小二乘误差比较:

加权最小二乘法有效地减少了近期误差，达到了使近期预测值接近其实际值的目的。

二者的根本区别在于误差的分布不同，而不是加权最小二乘法的误差平方和一定小。事实上，加权最小二乘法在减小近期数据误差的同时，往往会扩大远期数据的误差。