# 第五章 统计量及其分布

第一节 经验分布函数

第二节 统计量及其分布

第三节 重要分布和定理



## 第三节 重要分布和定理

一、$\chi^2$-分布

二、$t$ -分布

三、$F$ -分布

四、几个重要定理

利用统计量对总体的某种性质进行推断时，一般要借助于统计量的分布。因此，计算统计量的分布在数理统计中就显得非常重要，通常称统计量的分布为抽样分布。

寻求统计量的分布往往十分困难，很多统计量我们只能求得它的极限分布，然而统计量的极限分布只适用于大样本的问题。在常见的小样本问题中，必须知道统计量的精确分布。由于常见的总体大都服从（或近似服从）正态分布，而关于正态总体的抽样分布，人们已经作了比较充分的讨论，得到许多深入的结果。因此有关正态总体的一些常用统计量的分布是不难确定的。

下面先来介绍数理统计中三个重要分布，它们与正态分布有着密切的联系。



$\chi^2$-分布，$t$-分布，$F$-分布是三个连续性随机变量的分布，它们在统计学中占有极其重要的地位，产生这三个分布的主要源泉是正态随机变量，它们是若干个正态随机变量的三种特殊函数的分布，因此在统计学中处理由对正态随机变量的观测而取得的数据时，这三个分布起核心作用，下面对此进行讨论。

## 一、$\chi^2$-分布

$\chi^2$-分布是从正态分布派生出来的一个分布，尽管它由正态分布产生，但它在数理统计中一直占有主要的地位，许多分布可以用 $\chi^2$-分布来近似。下面将推出：独立同标准正态分布的$n$个随机变量平方和服从自由度为$n$的 $\chi^2$-分布。

1、定义：若连续型随机变量 $\xi$ 具有分布密度：

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{(n/2)-1}e^{-n/2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中$n$是正整数，$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$，则称 $\xi$ 为服从自由度为$n$的 $\chi^2$-分布，记为：$\xi\sim\chi^2(n)$。自由度为$n$的 $\chi^2$-分布即参数为 $(1/2,\ n/2)$ 的 $Ga$ 分布，记为：$Ga(1/2,\ n/2)$



2、分布密度函数的图象

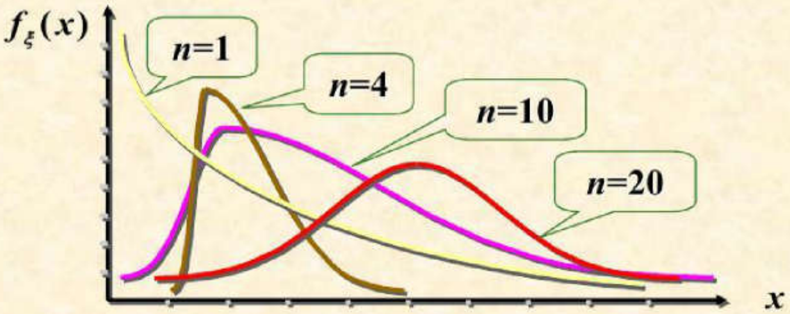



图5.3.1 不同样本容量的卡方分布示意图

3、$\alpha$ 分位数：

设随机变量 $\xi$ 的分布函数为 $F(x)$，对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，称 $F(x)=P(\xi\le x)=\alpha$ 的解 $x$ 为分布函数 $F(x)$的下侧 $\alpha$ 分位数，称 $1-F(x)=P(\xi>x)=\alpha$ 的解 $x$ 为$F(x)$的上侧 $\alpha$ 分位数。

第五章 统计量及其分布 统计学概论(温州大学陈希镇) 首页 返回 上页 下页 结束

4、查表求 $\xi \sim \chi^2(n)$ 的 $\alpha$ 分位数:

例5.2.1 设 $\xi \sim \chi^2(20)$, 求$x$ 使

$$P(\xi > x) = 0.05,\quad P(\xi \le x) = 0.05$$

解: 由 $P(\xi > x) = 0.05$, 查表可得: $x$ =31.410。由于 $P(\xi \le x) = 1 - P(\xi > x) = 0.05$, 得 $P(\xi > x) = 0.95$, 查表可得: $x$ =10.851。

注意事项:

(1)、书中的 $\chi^2$ 分位数表只给出上侧的分位数表;

(2)、若要求下侧分位数, 则可通过以下公式转化

$$P(\xi \le x) = 1 - P(\xi > x) = \alpha \Longleftrightarrow P(\xi > x) = 1 - \alpha$$



5、相关定理 $\chi^2$-分布具有可加性

定理5.2.1 设随机变量 $\xi \sim \chi^2(n_1)$, $\eta \sim \chi^2(n_2)$, 且 $\xi$, $\eta$ 相互独立, 则两个随机变量的和 $\xi + \eta \sim \chi^2(n_1 + n_2)$。

推论5.2.1 设随机变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 相互独立, $\xi_i \sim \chi^2(n_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则随机变量 $\sum \xi_i \sim \chi^2(\sum n_i)$。

定理5.2.2 设随机变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 相互独立, $\xi_i \sim N(0,1)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则随机变量 $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sim \chi^2(n)$。

本定理说明: $\chi^2$-分布是由正态分布派生出来的: $n$个相互独立且服从标准正态分布随机变量的平方和服从自由度为$n$ 的 $\chi^2$-分布。

推论5.2.2　若变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立，$\xi_i \sim N(\mu,\sigma^2)$，$i=1,2,\cdots,n$，则随机变量 $\sum_{i=1}^{n}(\frac{\xi_i-\mu_i}{\sigma_i})^2 \sim \chi^2(n)$



## 二、$t$ -分布

1、定义：若连续型随机变量 $\xi$ 具有分布密度：

$$f_\xi(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}},\quad -\infty<x<\infty$$

其中$n$为正整数，则称随机变量 $\xi$ 服从自由度为$n$的$t$ -分布。记为 $\xi \sim t(n)$。

## 2、分布密度函数的图象

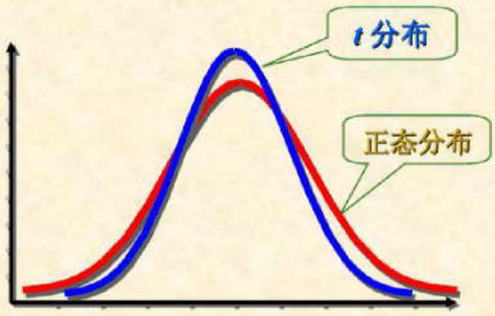



图5.3.2　t 分布与标准正态分布的图形

$t$-分布的密度函数的图形也呈对称性分布，接近正态分布。

## 3、$\alpha$ 分位数:

对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，满足 $F(x)=P(\xi\le x)=\alpha$ 的$x$称为 $t(n)$ 分布的下侧 $\alpha$ 分位数(简称为 $\alpha$ 分位数)，记: $x=t_{\alpha}(n)$。



## 4、查表求 $\xi\sim t(n)$ 的 $\alpha$ 分位数:

例5.2.2　设 $\xi\sim t(15)$，求 $x$ 使 ① $P(t(15)\le x)=0.95$; ② $P(t(15)\le x)=0.05$。

解: 由于 $\xi\sim t(15)$，　$P(t(15)<x)=0.95$,

查表得　$t_{0.95}(15)=1.7531$

要求 $P(t(15)\le x)=0.05$,　即求: $t_{0.05}(15)=?$

但表中没有 $t_{0.05}(15)$，由分布的对称性，可以转而求

$$P(t\le x)=P(t\ge -x)=1-\alpha=0.95$$

查表得 $-x=t_{0.95}(15)=1.7531$,　$\therefore$　$x=t_{0.05}(15)=-1.7531$

第五章 统计量及其分布　统计学概论(温州大学陈希镇) 首页 返回 上页 下页 结束

5、相关定理

定理5.2.3 设随机变量 $\xi \sim N(0,1)$，$\eta \sim x^2(n)$，且$\xi$，$\eta$ 相互独立，则随机变量 $t=\dfrac{\xi}{\sqrt{\eta/n}} \sim t(n)$。

本定理说明：$t$ -分布与正态分布也有密切的联系：变量的分子是服从标准正态分布的变量，分母是服从自由度为$n$ 的 $\chi^2$ -分布的变量除以$n$ 的算术根，其自由度恰好是$n$ 。



## 三、$F$ -分布

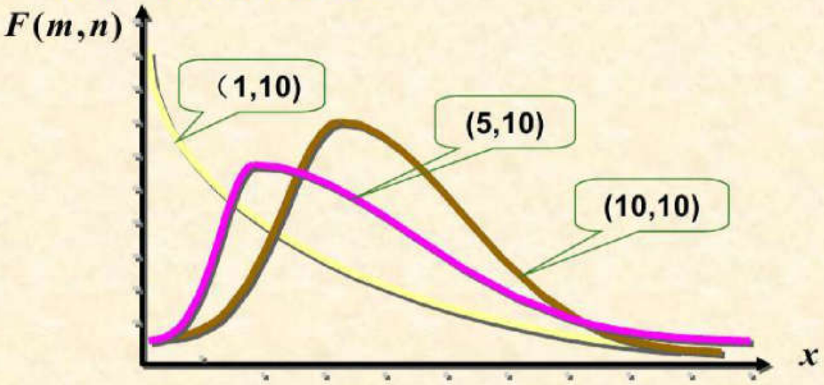
1、定义：若连续型随机变量 $\xi$ 具有分布密度：

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma[(m+n)/2]}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\dfrac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中$m$，$n$ 为正整数，则称 $\xi$ 服从第一自由度为$m$，第二自由度为$n$的$F$-分布，记为：$\xi \sim F(m,n)$。

图5.2.3

## 2、分布密度函数的图象




$F$－分布密度函数的图形其形状与$m$，$n$有关，若 $m$ 固定，函数的形状与$n$有很大关系，$n$越小偏态越严重，反之也一样。

## 3、$\alpha$ 分位数:

若$\xi \sim F(m,n)$，对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，满足 $P(\xi \le x)=\alpha$ 的$x$称为$F(m,n)$分布的下侧 $\alpha$ 分位数(简称$\alpha$ 分位数)。



## 4、查表求 $\xi \sim F(m,n)$ 的 $\alpha$ 分位数:

例5.2.3　若 $\xi \sim F(15,10)$，求$x$，使① $P(\xi \le x)=0.95$；② $P(\xi \le x)=0.05$。

解：由于 $\xi \sim F(15,10)$，　$P(\xi \le x)=0.95$，

查表得：　$x=F_{0.95}(15,10)=2.85$，

② 要查 $P(\xi \le x)=0.05=?$ 表上没给出，利用转换公式：

$$F_{\alpha}(m,n)=1/F_{1-\alpha}(n,m)$$

$$x=F_{0.05}(15,10)=\frac{1}{F_{1-0.05}(10,15)}=\frac{1}{2.54}\approx 0.3937$$

## 5. $F$－分布如何产生

定理5.2.4 若随机变量 $\xi \sim x^2(m)$，$\eta \sim x^2(n)$，且 $\xi$，$\eta$ 相互独立，则随机变量 $F=\dfrac{\xi/m}{\eta/n}\sim F(m,n)$。

定理表明，$F$－分布是由两个服从 $\chi^2$－分布的变量分别除以它们的自由度后的商的分布，其第一个自由度恰为分子的自由度，第二个自由度恰为分母的自由度。

若随机变量 $\xi \sim F(m,n)$，则随机变量 $\eta=\dfrac{1}{\xi}\sim F(n,m)$。

这说明：服从$F$–分布的随机变量的倒数也服从F–分布，但其自由度与原来的两个自由度对调。



## 四、几个重要定理

定理5.2.5 设总体 $\xi$ 的分布函数 $F(x)$ 具有二阶矩，即 $E(\xi)=\mu<\infty$，$D(\xi)=\sigma^2<\infty$，若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是取自这个总体的一个样本，则样本均值 $\xi$ 的期望和方差分别是：

$$E\bar{\xi}=\mu, \qquad V(\bar{\xi})=\sigma^2/n$$

若假设总体的原点矩 $v_k=E\xi^k$ 和中心矩 $\mu_k=E(\xi-v_1)^k$ $k=1,2,3,4$ 都存在，则样本方差的数学期望和方差依次是：

$$E(S_n^2)=\frac{n-1}{n}\mu_2,\ V(S_n^2)=\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n}-\frac{2(\mu_4-2\mu_2^2)}{n^2}+\frac{\mu_4-3\mu_2^2}{n^3}$$

且样本均值与样本方差的协方差为：

$$Cov(\bar{\xi},S_n^2)=\frac{n-1}{n^2}\mu_3$$

**定理5.2.6** 设 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)'$，$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)'$ 为两个随机向量，且 $\eta=A\xi$，其中 $A=(a_{ij})$ 为一个 $n\times n$ 阶方阵，则

$$E(\eta)=A(E\xi),\ V(\eta)=A[V(\xi)]A'$$

**引理5.1** 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立且服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布的随机变量，$A$ 是 $n\times n$ 阶正交矩阵，令

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)'=A(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)'$$

则 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)'$ 也相互独立且服从正态分布。



**定理5.2.7(费歇定理)** 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为取自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$，则有

(1) $\bar{\xi}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$；(2) $\frac{nS^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2\sim\chi^2(n-1)$；

(3) $\bar{\xi}$ 与 $S^2$ 相互独立。

证明：(1) $\because$ $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立同正态分布，

$\therefore$ $\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 仍是一个正态随机变量。

$$E\bar{\xi}=E(\frac{1}{n}\sum\xi_i)=\frac{1}{n}\sum E\xi_i=\mu,$$

$$V(\bar{\xi})=V(\frac{1}{n}\sum\xi_i)=\frac{1}{n^2}\sum V(\xi_i)=\frac{\sigma^2}{n}$$

故　$\bar{\xi}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$

(2) 作正交变换: $\eta = A\xi$, 其中 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)'$, $\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)'$, $A$是如下正交矩阵:

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2\times1}} & \frac{-1}{\sqrt{2\times1}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3\times2}} & \frac{1}{\sqrt{3\times2}} & \frac{-2}{\sqrt{3\times2}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{-(n-1)}{\sqrt{n(n-1)}} \end{bmatrix}$$

由于A是正交矩阵，于是由引理1知 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 相互独立且服从正态分布。又 $E(\eta_1)=\sqrt{n}\mu$, $V(\eta_1)=\sigma^2$,



故 $$E(\eta)=AE(\xi)=(\sqrt{n}\mu,0,\cdots,0)',$$
$$V(\eta)=A(V\xi)A'=A(\sigma^2 I_n)A'=\sigma^2 AA'=\sigma^2 I_n,$$

由此知 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 相互独立，$\eta_1\sim N(\sqrt{n}\mu,\sigma^2)$, $\eta_i\sim N(0,\sigma^2)$, $i=2,3,\cdots,n$, 由于A是正交矩阵，

$$\sum_{i=1}^n \eta_i^2=\eta'\eta=\xi'A'A\xi=\xi'\xi=\sum_{i=1}^n \xi_i^2,$$
$$=\sum_{i=1}^n(\xi_i-\bar{\xi})^2+n\bar{\xi}^2=nS_n^2+n\bar{\xi}^2$$
$$\eta_1=\sum_{i=1}^n \xi_i/\sqrt{n}=\sqrt{n}\bar{\xi},\quad n\bar{\xi}^2=\eta_1^2,$$
$$nS_n^2=\sum_{i=1}^n\eta_i^2-\eta_1^2=\sum_{i=2}^n\eta_i^2,$$

故 (2) $$nS_n^2/\sigma^2=\sum_{i=2}^n(\eta_i/\sigma)^2\sim\chi^2(n-1)$$

(3) $\bar{\xi}$ 与 $S^2$ 相互独立。

**定理5.2.8** 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，则（1） $U=\dfrac{\bar{\xi}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$;

（2）$T=\dfrac{\sqrt{n-1}(\bar{\xi}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$ 或 $T=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{\xi}-\mu)}{S^*}\sim t(n-1)$。

证明： (1)、由定理5.2.7知：$\bar{\xi}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$,

故 $$U=\frac{\sqrt{n}(\bar{\xi}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)。$$

(2)、$\because$ $\bar{\xi}$, $S^2$ 相互独立，且 $nS^2/\sigma^2\sim\chi^2(n-1)$,

由(1)知 $\sqrt{n}(\bar{\xi}-\mu)/\sigma\sim N(0,1)$, 又 $\sqrt{n}(\bar{\xi}-\mu)/\sigma$ 与 $nS/\sigma^2$ 相互独立，所以 $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{\xi}-\mu)/\sigma}{\sqrt{nS^2/(n-1)\sigma^2}}=\dfrac{\sqrt{n-1}(\bar{\xi}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$。



**定理5.2.9** 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为取自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 的一个样本，而 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$为取自正态总体 $N(\mu_2,\sigma^2)$的一个样本。假设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 相互独立，则

（1）$U=\dfrac{\bar{\xi}-\bar{\eta}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{1/m+1/n}}\sim N(0,1)$;

（2） $T=\sqrt{\dfrac{mn(m+n-2)}{m+n}}\dfrac{\bar{\xi}-\bar{\eta}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{mS_1^2+nS_2^2}}\sim t(m+n-2)$。

在定理5.2.9中，若正态总体分别为$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 则结论为：（1） $U=\dfrac{\bar{\xi}-\bar{\eta}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}\sim N(0,1)$;

（2） $T=\sqrt{\dfrac{mn(m+n-2)}{n\sigma_1^2+m\sigma_2^2}}\dfrac{\bar{\xi}-\bar{\eta}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{mS_1^2/\sigma_1^2+nS_2^2/\sigma_2^2}}\sim t(m+n-2)$。

证明：由定理5.2.7知：

$$\bar{\xi}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\xi_i \sim N(\mu_1,\sigma^2/m),\qquad \bar{\eta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i \sim N(\mu_2,\sigma^2/n),$$

故 $mS_1^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m-1)$，　$nS_2^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$。

由定理条件知 $\bar{\xi}$，$\bar{\eta}$ 相互独立，$S_1^2$，$S_2^2$ 相互独立，因此

$$\bar{\xi}-\bar{\eta} \sim N\left(\mu_1-\mu_2,\ \frac{(m+n)\sigma^2}{mn}\right)。$$

因此（1）$U=\dfrac{\bar{\xi}-\bar{\eta}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma}\sqrt{\dfrac{mn}{m+n}} \sim N(0,1),$

$$W=\frac{mS_1^2}{\sigma^2}+\frac{nS_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2)$$

又由定理条件及定理5.2.7知：$\bar{\xi}$，$\bar{\eta}$，$S_1^2$，$S_2^2$ 也相互独立，从而U与W也相互独立。所以



$$T=\frac{U}{\sqrt{W/(m+n-2)}}$$

$$=\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}\frac{\bar{\xi}-\bar{\eta}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{mS_1^2+nS_2^2}} \sim t(m+n-2)。$$

推论5.2.4　若在定理5.2.9中还有 $\mu_1=\mu_2$，则

（1）$U=\dfrac{\bar{\xi}-\bar{\eta}}{\sigma}\sqrt{\dfrac{mn}{m+n}} \sim N(0,1);$

（2）$T=\sqrt{\dfrac{mn(m+n-2)}{m+n}}\cdot\dfrac{\bar{\xi}-\bar{\eta}}{\sqrt{mS_1^2+nS_2^2}} \sim t(m+n-2)。$

定理5.2.10 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为取自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的一个样本，而 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为取自正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的一个样本。且 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 相互独立，则

$$F=\frac{(n-1)mS_1^2\sigma_2^2}{(m-1)nS_2^2\sigma_1^2}\sim F(m-1,n-1)$$

证明：由定理5.2.7知

$$mS_1^2/\sigma_1^2\sim\chi^2(m-1),\quad nS_2^2/\sigma_2^2\sim\chi^2(n-1),$$

又由定理条件知 $mS_1^2/\sigma_1^2$ 与 $nS_2^2/\sigma_2^2$ 相互独立，所以

$$F=\frac{mS_1^2/(m-1)\sigma_1^2}{nS_2^2/(n-1)\sigma_2^2}=\frac{(n-1)mS_1^2\sigma_2^2}{(m-1)nS_2^2\sigma_1^2}\sim F(m-1,n-1)$$

特别，当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时， $F=\frac{(n-1)mS_1^2}{(m-1)nS_2^2}\sim F(m-1,n-1)$。



推论5.2.5 若在定理5.2.10 中有 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，则

$$F=\frac{(n-1)mS_1^2}{(m-1)nS_2^2}\sim F(m-1,n-1)。$$

如果使用样本修正方差，它们的比服从什么分布？

$$S_1^{*2}=\frac{1}{(m-1)}\sum_{i=1}^{m}(\xi_i-\bar{\xi})^2=\frac{m}{(m-1)}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\xi_i-\bar{\xi})^2=\frac{m}{(m-1)}S_1^2,$$

$$S_2^{*2}=\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\eta_i-\bar{\eta})^2=\frac{n}{(n-1)}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\eta_i-\bar{\eta})^2=\frac{n}{(n-1)}S_2^2,$$

故定理5.2.10的结论可表为： $\frac{S_1^{*2}/\sigma_1^2}{S_2^{*2}/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1);$

推论5.2.5的结论可表为： $S_1^{*2}/S_2^{*2}\sim F(m-1,n-1)$。