§5　某些具体空间集合准紧性的判别法

数学与计算机科学学院 康淑瑰

主要内容

- 一　空间 R^n 中集合准紧性、紧性的判别法
- 二　空间 $C[a,b]$ 中集合准紧性的判别法
- 三　空间 $L^P[a,b]$（$1<P<\infty$）中集合准紧性的判别法

（一） R^n 中集合准紧性、紧性的判别法

例 1 空间 $R^n(C^n)$ 中的任何有界集都是准紧的，任何有界闭集都是紧的.

证：设 $A \subset R^n$ 有界，任取点列 $\{x^{(m)}\} \subset A$，下证从 $\{x^{(m)}\}$

中可取出收敛的子列. 设 $x^{(m)} = \{\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)}\}$.

$$\{\xi_1^{(m)}\}\text{有界} \to \exists\text{子列}\{\xi_1^{(m_1)}\}, \{m_1\} \subset N$$

$$\{\xi_2^{(m_1)}\}\text{有界} \to \exists\text{子列}\{\xi_2^{(m_2)}\}, \{m_2\} \subset \{m_1\}$$

$$\begin{matrix} \xi_1^{(1)} & \xi_2^{(1)} & \cdots & \xi_n^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} & \xi_2^{(2)} & \cdots & \xi_n^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1^{(m)} & \xi_2^{(m)} & \cdots & \xi_n^{(m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

（致密性定理：有界数列必有收敛子列）.

找到一部分由自然数组成的数列$\{m_n\}$使得

$\{\xi_1^{(m_n)}\},\{\xi_2^{(m_n)}\},\cdots,\{\xi_n^{(m_n)}\}$都收敛，故$\{x^{(m_n)}\}\subset\{x^{(m)}\}$在$R^n$中收敛，这说明$A$准紧. 若A为闭集，则$\{x^{(m_n)}\}\subset\{x^{(m)}\}$在$A$中收敛，所以$A$是紧集。

同理，在C^n中任一有界集都是准紧集。

（二） 空间$C[a,b]$中集合准紧性的判别法

定义 5.1 设F是一族从(X,d)到(Y,ρ)的函数，如果对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$使得对$\forall f\in F$，当$d(x,x^{'})<\delta$时，有

$$\rho(f(x),f(x^{'}))<\varepsilon,$$

则称F是等度连续的．强调其与一致连续之间的关系.

$\exists k>0$，对$\forall f\in F$，有$|f(x)|\le k$（$x\in(X,d)$），称F是有界的（或称一致有界的）.

下面我们给出著名 $Arzela-Ascoli$ 的定理:

定理 5.1 集合 $A \subset C[a,b]$ 准紧的充要条件是：A 是一致有界的且 A 是等度连续的.

证：必要性　设 A 准紧，则 A 是全有界的，从而 A 是有界的．即存在 $M>0$，使得对任意的 $x \in A$ 都有 $\rho(0,x)<M$，即 A 是一致有界的．

下证 A 是等度连续的． 对 $\forall\varepsilon>0$，由于 A 是准紧的，故存在 A 的有限 $\frac{\varepsilon}{3}-$ 网 $\{x_j\}_{j=1}^{n_0}$，即对

$\forall x\in A,\exists x_{j_0},s.t.\rho(x,x_{j_0})<\frac{\varepsilon}{3}$， 则 $|x(t)-x_{j_0}(t)|<\frac{\varepsilon}{3}$ （$\forall t$）。

又因为 $x_{j_0}\in C[a,b]$，所以 x_{j_0} 在 $[a,b]$ 一致连续，即对上述的 $\varepsilon,\exists\delta>0$， $\forall t',t''\in[a,b]$，只要 $|t'-t''|<\delta$，就有 $|x_{j_0}(t')-x_{j_0}(t'')|<\frac{\varepsilon}{3}$．于是当 $|t'-t''|<\delta$ 时，

$$
\begin{aligned}
&|x(t')-x(t'')|\\
\le\ &|x(t')-x_{j_0}(t')|+|x_{j_0}(t')-x_{j_0}(t'')|+|x_{j_0}(t'')-x(t'')|\\
<\ &\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

由于 ε 的任意性，且 δ 只依赖于 ε，故 A 是等度连续的．

充分性 设 A 是有界且等度连续的，下证 A 是准紧的. 由于 $C[a,b]$ 是完备的，故只需证明 A 是全有界的.

依等度连续的定义，对

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t', t'' \in [a,b]$, 若 $|t' - t''| < \delta$, 有

$$\left|x(t') - x(t'')\right| < \frac{\varepsilon}{3}, (\forall x \in A). \qquad (1)$$

取自然数 n，使得 $\dfrac{b-a}{n} < \delta$，将 $[a,b]$ 分成 n 等分，分点为 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$，若 t', t'' 同属于某个小区间，不等式（1）便成立.

作 R^{n+1} 中的点集 $\hat{A}=\{(x(t_0),x(t_1),...,x(t_n)):x\in A\}$，由于 A 是有界，故 $\hat{A}$ 在 R^{n+1} 中有界，所以 $\hat{A}$ 在 R^{n+1} 中准紧．于是在 R^{n+1} 中存在有限的 $\varepsilon/3$ 网，记为 $\{x_j(t_0),x_j(t_1),\cdots,x_j(t_n)\}_{j=1}^{k}=\hat{B}$，对应于 $\hat{B}$ 中的有限集，在 A 中有函数组成有限子集 $B=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$．下证此有限集就是 A 的一个 $\varepsilon-$网．任取 $x\in A$，则 $\{x(t_0),x(t_1),\cdots,x(t_n)\}\in\hat{A}$，则

$$\exists j_0:1\le j_0\le k, s.t, \rho(x,x_{j_0})=(\sum_{i=0}^{n}\left|x(t_i)-x_{j_0}(t_i)\right|^2)^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而对 $\forall i$，有 $\left|x(t_i)-x_{j_0}(t_i)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ ． 任取

$t\in[a,b],\exists i\in[0,n],s.t,t\in[t_i,t_{i+1}]$，有：

$$\left|x(t)-x_{j_0}(t)\right|\le\left|x(t)-x(t_i)\right|+\left|x(t_i)-x_{j_0}(t_i)\right|+\left|x_{j_0}(t_i)-x_{j_0}(t)\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

所以 $\rho(x,x_{j_0})=\max\limits_{t\in[a,b]}\left|x(t)-x_{j_0}(t)\right|<\varepsilon$，说明 B 是 A 的 $\varepsilon-$网，

故 A 是准紧的.

（三）空间 $L^P[a,b]$（ $1<P<\infty$）中集合准紧性的判别法

定理 5.2 空间$L^P[a,b]$（$1<P<\infty$）中集合A准紧的充要条件是：

（1）A是有界的，即存在常数

$k>0, s.t,$对$\forall x\in, \int_a^b |x(t)|^p dt \le k^p$；

（2）对$\forall \varepsilon>0, \exists\delta>0$，只要$0<h<\delta$，有：

$$\rho(x_n, x)=(\int_a^b |x_n(t)-x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon, (\text{其中} x_n(t)=\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x(s)ds)$$

对一切$x\in A$成立.（证略）

谢 谢 大 家!