相对论力学

马孟森

山西大同大学物理与电子科学学院

November 29, 2013

teaching objectives

teaching objectives

1. 能量-动量四维矢量；

teaching objectives

1. 能量-动量四维矢量；
2. 质能关系；

teaching objectives

1. 能量-动量四维矢量；
2. 质能关系；
3. 相对论力学方程；

teaching objectives

1. 能量-动量四维矢量；
2. 质能关系；
3. 相对论力学方程;
4. 洛伦兹力；

teaching objectives

1. 能量-动量四维矢量；
2. 质能关系；
3. 相对论力学方程;
4. 洛伦兹力；

经典力学的基本规律是牛顿定律

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

经典力学的基本规律是牛顿定律

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

不协变！

经典力学的基本规律是牛顿定律

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

不协变！

引入四维速度：$U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx_\mu}{dt}$

经典力学的基本规律是牛顿定律

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

不协变！

引入四维速度：$U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx_\mu}{dt}$ 可以定义四维动量：

$$p_\mu = m_0 U_\mu$$

四维动量的空间分量和时间分量为：

1.能量-动量四维矢量

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$p_4 = ic\gamma m_0 = \frac{i}{c}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$p_4 = ic\gamma m_0 = \frac{i}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

当$v \ll c$时，$\vec{p}$ 趋于经典动量。

此时

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$p_4 = ic\gamma m_0 = \frac{i}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

当$v \ll c$时，$\vec{p}$ 趋于经典动量。

此时

$$p_4 = \frac{i}{c}(m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \cdots)$$

展开式中第二项是低速运动物体动能，因此p_4与物体能量有关!

设相对论中物体的能量为:

展开式中第二项是低速运动物体动能，因此p_4与物体能量有关!

设相对论中物体的能量为:

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

展开式中第二项是低速运动物体动能，因此p_4与物体能量有关!

设相对论中物体的能量为:

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

则 $p_4 = \frac{i}{c} W$.

相对论中物体的动能是

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

总能量为：$W = T + m_0c^2$

总能量为：$W = T + m_0c^2$

一部分是物体动能；另一部分为静止能量。

相对论协变性和能量守恒要求m_0c^2的存在。在一定条件下，物体的静止能量可以转化为其他形式的能量。

总能量为：$W = T + m_0c^2$

一部分是物体动能；另一部分为静止能量。

相对论协变性和能量守恒要求m_0c^2的存在。在一定条件下，物体的静止能量可以转化为其他形式的能量。

能量-动量四维矢量：$p_\mu = (\vec{p}, iW/c)$

总能量为：$W = T + m_0c^2$
一部分是物体动能；另一部分为静止能量。
相对论协变性和能量守恒要求m_0c^2的存在。在一定条件下，物体的静止能量可以转化为其他形式的能量。
能量-动量四维矢量：$p_\mu = (\vec{p}, iW/c)$
有p_μ可构成不变量：

$$p_\mu p_\mu = p^2 - \frac{W^2}{c^2} = \text{不变量}$$

因此，

$$W^2 - p^2c^2 = m^2{}_0c^4,$$
$$W = \sqrt{p^2c^2 + m^2{}_0c^4}$$

相对论中动量和能量的关系它是高能物理中的一个重要公式。

质能关系式对一个粒子适用，对一组粒子组成的复合物体也适用。当一组粒子构成复合物体时， 由于各粒子之间有相互作用能以及有相对运动的动能，因而当物体整体静止时， 它的总能量一般不等于所有粒子的静止能量之和，即 $W_0 \neq \sum_i m_{i0} c^2$，其中$m_{i0}$为第$i$个粒子的质量。

质能关系式对一个粒子适用，对一组粒子组成的复合物体也适用。当一组粒子构成复合物体时， 由于各粒子之间有相互作用能以及有相对运动的动能，因而当物体整体静止时， 它的总能量一般不等于所有粒子的静止能量之和，即 $W_0 \neq \Sigma_i m_{i0} c^2$，其中$m_{i0}$为第$i$个粒子的质量。
两者之差称为物体的结合能:

质能关系式对一个粒子适用，对一组粒子组成的复合物体也适用。当一组粒子构成复合物体时，由于各粒子之间有相互作用能以及有相对运动的动能，因而当物体整体静止时，它的总能量一般不等于所有粒子的静止能量之和，即 $W_0 \neq \sum_i m_{i0}c^2$，其中$m_{i0}$为第$i$个粒子的质量。
两者之差称为物体的结合能:

$$\Delta W = \sum_i m_{i0}c^2 - W_0$$

相应的，物体的质量也不等于组成它的各粒子的质量之和。两者之差称为质量亏损

相应的，物体的质量也不等于组成它的各粒子的质量之和。两者之差称为质量亏损

$$\Delta M = \sum m_{i0} - M_0$$

相应的，物体的质量也不等于组成它的各粒子的质量之和。两者之差称为质量亏损

$$\Delta M = \sum m_{i0} - M_0$$

质量亏损与结合能之间有关系：

相应的，物体的质量也不等于组成它的各粒子的质量之和。两者之差称为质量亏损

$$\Delta M = \sum m_{i0} - M_0$$

质量亏损与结合能之间有关系：

$$\Delta W = (\Delta M)c^2$$

引入“运动质量”

相应的，物体的质量也不等于组成它的各粒子的质量之和。两者之差称为质量亏损

$$\Delta M = \sum m_{i0} - M_0$$

质量亏损与结合能之间有关系：

$$\Delta W = (\Delta M)c^2$$

引入“运动质量”

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

相应的，物体的质量也不等于组成它的各粒子的质量之和。两者之差称为质量亏损

$$\Delta M = \sum m_{i0} - M_0$$

质量亏损与结合能之间有关系：

$$\Delta W = (\Delta M)c^2$$

引入“运动质量”

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

则 $\vec{p} = m\vec{v}$, $\quad W = mc^2$

粒子的质量常用MeV/c^2作单位表出，动量用MeV/c表出,能量用MeV表出。

$$1MeV = 1.602189 \times 10^{-13} J$$

例　带电π介子衰变为μ子和中微子:
$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$,
已知各粒子质量$m_\pi = 139.57MeV/c^2, m_\mu = 105.6MeV/c^2, m_\nu = 0$,
求π介子质心系中μ子的能量、动量、速度。

解　在π介子质心系中，μ介子的动量和能量为

$\vec{p} = 0, \quad W = m_\pi c^2$

设$p(\mu)$和$p(\nu)$分别是的动量，它们的能量分别是

$$W_{(\mu)} = \sqrt{p^2{}_{(\mu)}c^2 + m^2{}_\mu c^4}, W_{(\nu)} = p_{(\nu)}c$$

由动量和能量守恒定律得

解　在π介子质心系中，μ介子的动量和能量为

$\vec{p} = 0, \quad W = m_{\pi} c^2$

设$p(\mu)$和$p(\nu)$分别是的动量，它们的能量分别是

$$W_{(\mu)} = \sqrt{p^2{}_{(\mu)} c^2 + m^2{}_{\mu} c^4}, W_{(\nu)} = p_{(\nu)} c$$

由动量和能量守恒定律得

$$\vec{p}_{(\mu)} + \vec{p}_{(\nu)} = 0,$$

解　在π介子质心系中，μ介子的动量和能量为

$$\vec{p} = 0, \quad W = m_\pi c^2$$

设$p(\mu)$和$p(\nu)$分别是的动量，它们的能量分别是

$$W_{(\mu)} = \sqrt{p^2{}_{(\mu)}c^2 + m^2{}_\mu c^4}, W_{(\nu)} = p_{(\nu)}c$$

由动量和能量守恒定律得

$$\vec{p}_{(\mu)} + \vec{p}_{(\nu)} = 0,$$

$$\sqrt{p^2{}_{(\mu)}c^2 + m^2{}_\mu c^4} + p_{(\nu)}c = m_\pi c^2$$

$$|\vec{p}_{(\mu)}| + |\vec{p}_{(\nu)}| = 0,$$

$$p = \frac{m^2{}_{\mu} - m^2{}_{\pi}}{2m_{\pi}} c,$$

$$W = m_{\pi} c^2 - pc = \frac{m^2{}_{\mu} + m^2{}_{\pi}}{2m_{\pi}} c^2$$

得到

$$p = 29.79 Mev/c, \qquad W(\mu) = 109.78 MeV/c^2$$

$$|\vec{p}_{(\mu)}| + |\vec{p}_{(\nu)}| = 0,$$

$$p = \frac{m^2{}_{\mu} - m^2{}_{\pi}}{2m_{\pi}} c,$$

$$W = m_{\pi}c^2 - pc = \frac{m^2{}_{\mu} + m^2{}_{\pi}}{2m_{\pi}} c^2$$

得到

$$p = 29.79 Mev/c, \qquad W(\mu) = 109.78 MeV/c^2$$

μ子的速度为

$$|\vec{p}_{(\mu)}| + |\vec{p}_{(\nu)}| = 0,$$

$$p = \frac{m^2{}_{\mu} - m^2{}_{\pi}}{2m_{\pi}} c,$$

$$W = m_{\pi} c^2 - pc = \frac{m^2{}_{\mu} + m^2{}_{\pi}}{2m_{\pi}} c^2$$

得到

$p = 29.79 Mev/c, \qquad W(\mu) = 109.78 MeV/c^2$

μ子的速度为

$$v = 0.2714c$$

动量随固有时的变化率$\frac{dp_\mu}{d\tau}$是一个四维矢量。引入四维力矢量

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

低速运动情况，K_μ的空间分量过渡到经典力F,其第四分量

动量随固有时的变化率$\frac{dp_\mu}{d\tau}$是一个四维矢量。引入四维力矢量

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

低速运动情况，K_μ的空间分量过渡到经典力F,其第四分量

$$-icK_4 = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$= \frac{c^2}{W}\mathrm{p} \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}\tau} = \upsilon \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{K} \cdot \upsilon$$

动量随固有时的变化率$\frac{dp_\mu}{d\tau}$是一个四维矢量。引入四维力矢量

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

低速运动情况，K_μ的空间分量过渡到经典力F,其第四分量

$$-icK_4 = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$
$$= \frac{c^2}{W}\mathrm{p} \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}\tau} = \upsilon \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{K} \cdot \upsilon$$

作用于速度为υ的物体上的四维力为

动量随固有时的变化率$\frac{dp_\mu}{d\tau}$是一个四维矢量。引入四维力矢量

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

低速运动情况，K_μ的空间分量过渡到经典力F,其第四分量

$$-icK_4 = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$
$$= \frac{c^2}{W}\mathrm{p} \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}\tau} = \upsilon \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{K} \cdot \upsilon$$

作用于速度为υ的物体上的四维力为

$$K_\mu = (\vec{K}, \frac{i}{c}\vec{K} \cdot \vec{\upsilon})$$

相对论协变的力学方程

相对论协变的力学方程

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{p}}{\mathrm{d}\tau}, \quad \mathrm{K} \cdot \upsilon = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}$$

相对论协变的力学方程

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{p}}{\mathrm{d}\tau}, \quad \mathrm{K} \cdot v = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}$$

若用坐标时dt表示，为

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\mathrm{K} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}, \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\mathrm{K} \cdot v = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

相对论协变的力学方程

$$\mathrm{K}=\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}\tau},\quad \mathrm{K}\cdot\upsilon=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}$$

若用坐标时dt表示，为

$$\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\mathrm{K}=\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}t},\quad \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\mathrm{K}\cdot\upsilon=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

定义力 $F=\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}K$

相对论协变的力学方程

$$\mathrm{K}=\frac{\mathrm{d}\mathrm{p}}{\mathrm{d}\tau},\quad \mathrm{K}\cdot\upsilon=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}$$

若用坐标时dt表示，为

$$\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\mathrm{K}=\frac{\mathrm{d}\mathrm{p}}{\mathrm{d}t},\quad \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\mathrm{K}\cdot\upsilon=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

定义力 $F=\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}K$，则相对论力学方程为

$$\mathrm{F}=\frac{\mathrm{d}\mathrm{p}}{\mathrm{d}t},\quad \mathrm{F}\cdot\upsilon=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

洛仑兹力公式:$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
用电磁场张量$F_{\mu\nu}$和四维速度U_μ构成一个四维矢量

$$K_\mu = eF_{\mu\nu}U_\nu,$$

可证

洛仑兹力公式:$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
用电磁场张量$F_{\mu\nu}$和四维速度U_μ构成一个四维矢量

$$K_\mu = eF_{\mu\nu}U_\nu,$$

可证

$$\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

因此，洛伦兹力公式满足相对论协变性的要求。

洛仑兹力公式:$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
用电磁场张量$F_{\mu\nu}$和四维速度U_{μ}构成一个四维矢量

$$K_{\mu} = eF_{\mu\nu}U_{\nu},$$

可证

$$\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

因此，洛伦兹力公式满足相对论协变性的要求。协变的力密度公式：

$$f_{\mu} = F_{\mu\nu}J_{\nu}$$