电动力学的相对论不变性

马孟森

山西大同大学物理与电子科学学院

November 29, 2013

teaching objectives

teaching objectives

1. 四维电流密度矢量；

teaching objectives

1. 四维电流密度矢量；
2. 四维势矢量;

teaching objectives

1. 四维电流密度矢量；
2. 四维势矢量;
3. 电磁场张量;

teaching objectives

1. 四维电流密度矢量；
2. 四维势矢量;
3. 电磁场张量;
4. 运动的带电粒子的电磁场;

teaching objectives

1. 四维电流密度矢量；
2. 四维势矢量;
3. 电磁场张量;
4. 运动的带电粒子的电磁场;
5. 电磁场不变量;

1. 四维电流密度矢量；
2. 四维势矢量;
3. 电磁场张量;
4. 运动的带电粒子的电磁场;
5. 电磁场不变量;

实验表明，带电粒子的电荷与它的运动速度无关，即电荷Q是一个洛伦兹标量，即

实验表明，带电粒子的电荷与它的运动速度无关，即电荷Q是一个洛伦兹标量，即

$$Q = \int \rho \mathrm{d} V = \text{不变量}$$

实验表明，带电粒子的电荷与它的运动速度无关，即电荷Q是一个洛伦兹标量，即

$$Q = \int \rho \mathrm{d} V = \text{不变量}$$

若静止粒子电荷密度为ρ_0,体积元为dV_0.当粒子以速度$\vec{u}$运动时，由于洛伦兹收缩

实验表明，带电粒子的电荷与它的运动速度无关，即电荷Q是一个洛伦兹标量，即

$$Q = \int \rho \mathrm{d}V = \text{不变量}$$

若静止粒子电荷密度为ρ_0,体积元为dV_0.当粒子以速度$\vec{u}$运动时，由于洛伦兹收缩

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}V_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

实验表明，带电粒子的电荷与它的运动速度无关，即电荷Q是一个洛伦兹标量，即

$$Q=\int \rho \mathrm{d}V=\text{不变量}$$

若静止粒子电荷密度为ρ_0,体积元为dV_0.当粒子以速度$\vec{u}$运动时，由于洛伦兹收缩

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}V_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

相　的

实验表明，带电粒子的电荷与它的运动速度无关，即电荷Q是一个洛伦兹标量，即

$$Q = \int \rho \mathrm{d}V = \text{不变量}$$

若静止粒子电荷密度为ρ_0,体积元为dV_0.当粒子以速度$\vec{u}$运动时，由于洛伦兹收缩

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}V_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

相　　的

1.四维电流密度矢量

$$\vec{J} = \rho\vec{u} = \gamma_u\rho_0\vec{u}$$

$$\vec{J} = \rho\vec{u} = \gamma_u \rho_0 \vec{u}$$

若引入电流密度第四分量:

$$\vec{J} = \rho\vec{u} = \gamma_u \rho_0 \vec{u}$$

若引入电流密度第四分量:$J_4 = ic\rho$

$$\vec{J} = \rho\vec{u} = \gamma_u \rho_0 \vec{u}$$

若引入电流密度第四分量:$J_4 = ic\rho$

则构成一个四维矢量:

$$\vec{J} = \rho\vec{u} = \gamma_u\rho_0\vec{u}$$

若引入电流密度第四分量:$J_4 = ic\rho$

则构成一个四维矢量: $J_\mu = \rho_0 U_\mu$

对　于四维空间矢量$x_\mu = (\vec{x}, ict)$，有电流密度四维矢量:

$$\vec{J} = \rho\vec{u} = \gamma_u \rho_0 \vec{u}$$

若引入电流密度第四分量:$J_4 = ic\rho$

则构成一个四维矢量: $J_\mu = \rho_0 U_\mu$

对　于四维空间矢量$x_\mu = (\vec{x}, ict)$, 有电流密度四维矢量:

$$J_\mu = (\vec{J}, ic\rho)$$

此时电荷守恒定律可表示为四维协变形式:

$$\vec{J} = \rho\vec{u} = \gamma_u \rho_0 \vec{u}$$

若引入电流密度第四分量:$J_4 = ic\rho$

则构成一个四维矢量:$J_\mu = \rho_0 U_\mu$

对应于四维空间矢量$x_\mu = (\vec{x}, ict)$,有电流密度四维矢量:

$$J_\mu = (\vec{J}, ic\rho)$$

此时电荷守恒定律可表示为四维协变形式:

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

洛伦兹规范条件下势方程

$$\nabla^2 \mathrm{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 J$$

洛伦兹规范条件下势方程

$$\nabla^2 \mathrm{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 J$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

洛伦兹规范条件下势方程

$$\nabla^2 \mathrm{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 J$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathrm{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

也可表示为协变形式。利用

洛伦兹规范条件下势方程

$$\nabla^2 \mathrm{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 J$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathrm{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

也可表示为协变形式。利用

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

得到

$$\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{J}, \quad \Box\phi = -\mu_0 c^2\rho$$

若将$\vec{A}$和ϕ合并为一个四维势矢量:

得到

$$\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{J}, \quad \Box\phi = -\mu_0 c^2\rho$$

若将$\vec{A}$和ϕ合并为一个四维势矢量:

$$A_\mu = (\overrightarrow{A}, \frac{i}{c}\phi)$$

得到

$$\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{J}, \quad \Box\phi = -\mu_0 c^2\rho$$

若将$\vec{A}$和ϕ合并为一个四维势矢量:

$$A_\mu = (\overrightarrow{A}, \frac{i}{c}\phi)$$

则有

$$\Box A_\mu = -\mu_0 J_\mu, \quad \frac{\partial \mathrm{A}_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

从

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

从

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

得到

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \ \ldots$$

从

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

得到

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \ \cdots$$

和

$$E_1 = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right), \ \cdots$$

引入 $F_{\mu\upsilon} = \frac{\partial A_\upsilon}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\upsilon}$

电磁场构成一个四维张量:

电磁场构成一个四维张量:

$$F_{\mu\upsilon} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}$$

电磁场构成一个四维张量:

$$F_{\mu\upsilon} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}$$

此时麦克斯韦方程组可以写为协变形式:

电磁场构成一个四维张量:

$$F_{\mu\upsilon} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}$$

此时麦克斯韦方程组可以写为协变形式:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} + \mu_0\overrightarrow{J} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial F_{\mu\upsilon}}{\partial x_\upsilon} = \mu_0 J_\mu$$

另一对方程可写为:

另一对方程可写为:

$$\begin{cases} \nabla B = 0 \\ \nabla \times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial F_{\mu\upsilon}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\upsilon\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\upsilon} = 0$$

由张量变换关系: $F'_{\mu\upsilon} = a_{\mu\lambda} a_{\upsilon\tau} F_{\lambda\tau}$ 可得

电磁场变换关系:

$$E'_1 = E_1, \quad B'_1 = B_1$$

另一对方程可写为:

$$\begin{cases} \nabla B = 0 \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial F_{\mu\upsilon}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\upsilon\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\upsilon} = 0$$

由张量变换关系: $F'_{\mu\upsilon} = a_{\mu\lambda} a_{\upsilon\tau} F_{\lambda\tau}$ 可得
电磁场变换关系:

$$E'_1 = E_1, \quad B'_1 = B_1$$

$$E'_2 = \gamma \left(E_2 - vB_3\right), \quad B'_2 = \gamma \left(B_2 + \frac{v}{c^2} E_3\right)$$

另一对方程可写为:

$$\begin{cases} \nabla B = 0 \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial F_{\mu\upsilon}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\upsilon\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\upsilon} = 0$$

由张量变换关系: $F'_{\mu\upsilon} = a_{\mu\lambda} a_{\upsilon\tau} F_{\lambda\tau}$ 可得

电磁场变换关系:

$$E'_1 = E_1, \quad B'_1 = B_1$$

$$E'_2 = \gamma \left(E_2 - vB_3\right), \quad B'_2 = \gamma \left(B_2 + \frac{v}{c^2} E_3\right)$$

$$E'_3 = \gamma \left(E_3 + vB_2\right), \quad B'_3 = \gamma \left(B_3 - \frac{v}{c^2} E_2\right)$$

粒子带电量e,以速度$\vec{v}$运动。选参考系Σ'固定在粒子上，则Σ'系的观察者看到

粒子带电量e,以速度$\vec{v}$运动。选参考系Σ'固定在粒子上，则Σ'系的观察者看到

$$\vec{E}' = \frac{e\vec{x}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad \vec{B}' = 0$$

粒子带电量e,以速度$\vec{v}$运动。选参考系Σ'固定在粒子上，则Σ'系的观察者看到

$$\vec{E}' = \frac{e\vec{x}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad \vec{B}' = 0$$

因此Σ系上的观察者测得:

粒子带电量e,以速度$\vec{v}$运动。选参考系Σ'固定在粒子上，则Σ'系的观察者看到

$$\vec{E}' = \frac{e\vec{x}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad \vec{B}' = 0$$

因此Σ系上的观察者测得:

$$E_x = \frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad B_x{}' = 0,$$

粒子带电量e,以速度$\vec{v}$运动。选参考系Σ'固定在粒子上，则Σ'系的观察者看到

$$\vec{E}' = \frac{e\vec{x}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad \vec{B}' = 0$$

因此Σ系上的观察者测得:

$$E_x = \frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad B_x{}' = 0,$$

$$E_y = \gamma\frac{ey'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad B_y{}' = -\gamma\frac{v}{c^2}\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3},$$

粒子带电量e,以速度$\vec{v}$运动。选参考系Σ'固定在粒子上，则Σ'系的观察者看到

$$\vec{E}' = \frac{e\vec{x}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad \vec{B}' = 0$$

因此Σ系上的观察者测得:

$$E_x = \frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad B_x{}' = 0,$$

$$E_y = \gamma\frac{ey'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad B_y{}' = -\gamma\frac{v}{c^2}\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3},$$

$$E_z = \gamma\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad B_z{}' = \gamma\frac{v}{c^2}\frac{ey'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3},$$

粒子带电量e,以速度$\vec{v}$运动。选参考系Σ'固定在粒子上，则Σ'系的观察者看到

$$\vec{E}' = \frac{e\vec{x}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad \vec{B}' = 0$$

因此Σ系上的观察者测得:

$$E_x = \frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad B_x{}' = 0,$$

$$E_y = \gamma\frac{ey'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad B_y{}' = -\gamma\frac{v}{c^2}\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3},$$

$$E_z = \gamma\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad B_z{}' = \gamma\frac{v}{c^2}\frac{ey'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3},$$

用Σ系上的距离表示电磁场。利用

$$x' = \gamma x\,,\quad y' = y\,,\quad z' = z\,,$$

用Σ系上的距离表示电磁场。利用

$$x' = \gamma x\,,\quad y' = y\,,\quad z' = z\,,$$

得到

$$\vec{E} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{e\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) r^2 + \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c}\right)^2\right]^{3/2}}$$

用Σ系上的距离表示电磁场。利用

$$x' = \gamma x\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,,$$

得到

$$\vec{E} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{e\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) r^2 + \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}\,.$$

当 $v \ll c$,

4.运动的带电粒子的电磁场

当 $v \ll c$,

$$\vec{E} = \frac{e\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \vec{E}_0 \,,$$

当 $v \ll c$,

$$\vec{E} = \frac{e\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \vec{E}_0\,,$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_0 = \frac{\mu_0 e\vec{v}\times\vec{x}}{4\pi r^3}\,.$$

当 $v \ll c$,

$$\vec{E} = \frac{e\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \vec{E}_0 \, ,$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_0 = \frac{\mu_0 e\vec{v}\times\vec{x}}{4\pi r^3} \, .$$

当 $v \sim c$, 在与v垂直方向有

$$\vec{E} = \gamma\frac{e\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} >> \vec{E}_0,$$

当 $v \ll c$,

$$\vec{E} = \frac{e\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \vec{E}_0\,,$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_0 = \frac{\mu_0 e\vec{v}\times\vec{x}}{4\pi r^3}\,.$$

当 $v \sim c$, 在与v垂直方向有

$$\vec{E} = \gamma\frac{e\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} >> \vec{E}_0,$$

在与v平行方向有

$$\vec{E} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{e\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} << \vec{E}_0\,.$$

指标收缩可构造洛仑兹不变量:

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = B^2 - \frac{1}{c^2}E^2 \ .$$

利用全反对称张量

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = +1, \ \mu\nu\lambda\tau\text{可经过偶次置换变为}1234$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = -1, \ \mu\nu\lambda\tau\text{可经过奇次置换变为}1234$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = 0, \ \ \mu\nu\lambda\tau\text{有任意两个指标相同}$$

可构造出

指标收缩可构造洛仑兹不变量:

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = B^2 - \frac{1}{c^2}E^2 \ .$$

利用全反对称张量

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = +1,\ \mu\nu\lambda\tau\text{可经过偶次置换变为}1234$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = -1,\ \mu\nu\lambda\tau\text{可经过奇次置换变为}1234$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = 0,\ \ \mu\nu\lambda\tau\text{有任意两个指标相同}$$

可构造出

$$\frac{i}{8}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}F_{\mu\nu}F_{\lambda\tau} = \frac{1}{c}\vec{B}\cdot\vec{E}$$