§4-4 梁横截面上的正应力、梁的正应力强度条件

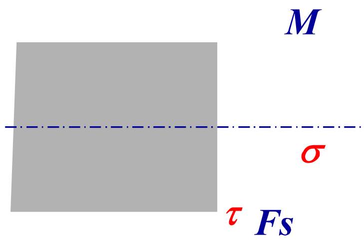
一、概述

二、纯弯曲时梁横截面上的正应力

三、横力弯曲时的正应力

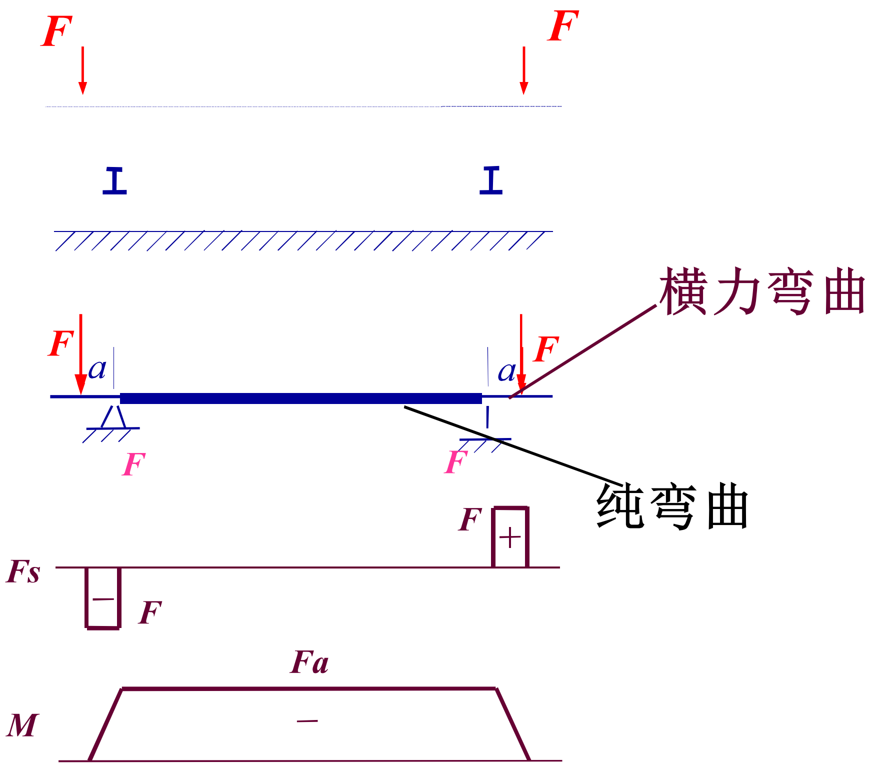
四、梁的正应力强度条件

一、 概述



$$M \Leftrightarrow \sigma \qquad F_s \Leftrightarrow \tau$$

一、 概述

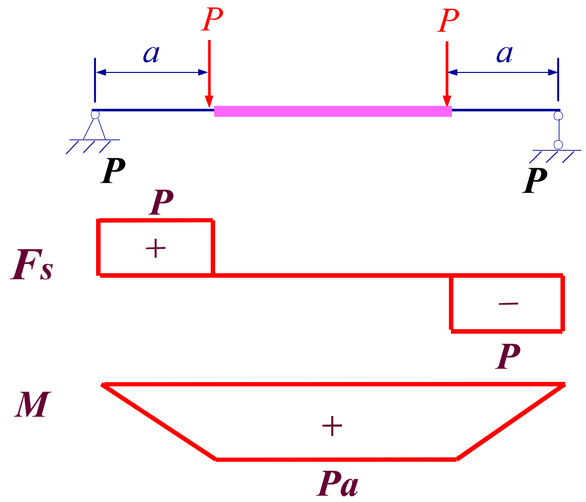


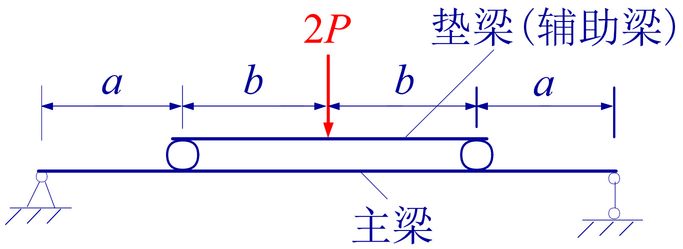
纯弯曲：横截面上剪力为零，弯矩为常量的弯曲。

横力弯曲：横截面上既有弯矩又有剪力的弯曲。

一、概述

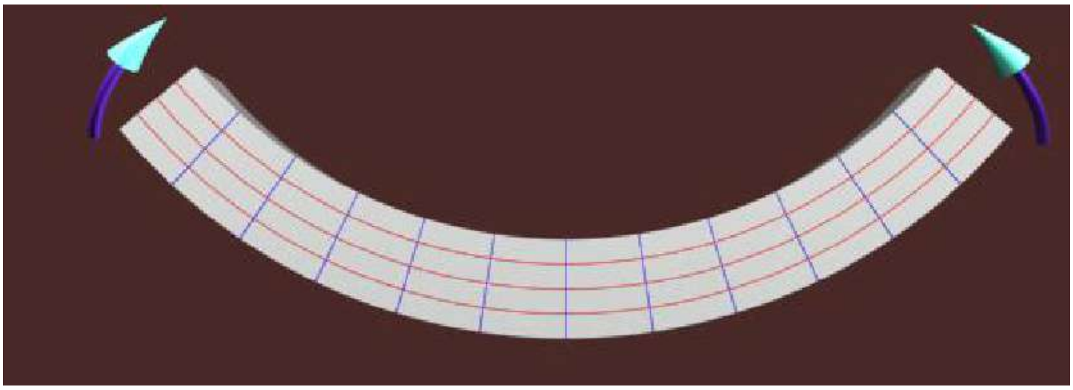
纯弯曲实验





二、纯弯曲时梁横截面上的正应力

1. 纯弯曲试验



1. 横向线： 直线**,**相对旋转了一个角度

2. 纵向线： 平行的弧线，距离没有改变，垂直于横向线

3. 上层纤维缩短，下层纤维伸长

平面假设:

梁内横截面变形后仍保持为平面，只是绕着某个轴转动一个角度,仍然与变形后的轴线垂直

单向受力假设:

纵向纤维之间没有挤压，各纵向纤维均处于单轴应力状态

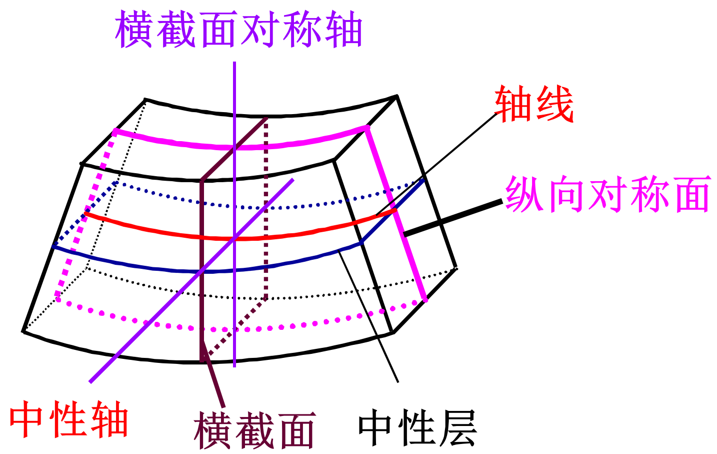
1. 横向线：　直线相对旋转了一个角度

2. 纵向线：平行的弧线，距离没有改变，垂直于横向线

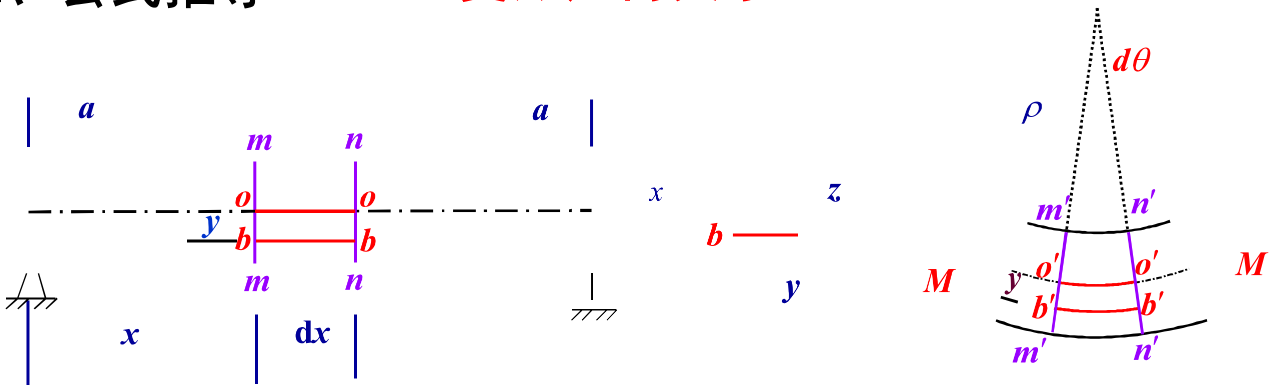
3. 上层纤维缩短，下层纤维伸长

既不伸长、也不缩短的纤维层 ———— **中性层**

中性层与横截面的交线 ———— **中性轴**



2、公式推导　　　变形几何关系



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{b'b' - bb}{bb} = \frac{b'b' - o'o'}{o'o'} = \frac{(\rho + y)\mathrm{d}\theta - \rho \mathrm{d}\theta}{\rho \mathrm{d}\theta}$$

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \qquad (a)$$

ρ ——中性层的曲率半径　对于指定的横截面=常量

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (a)$$

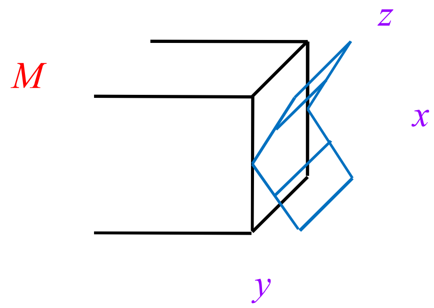
物理关系

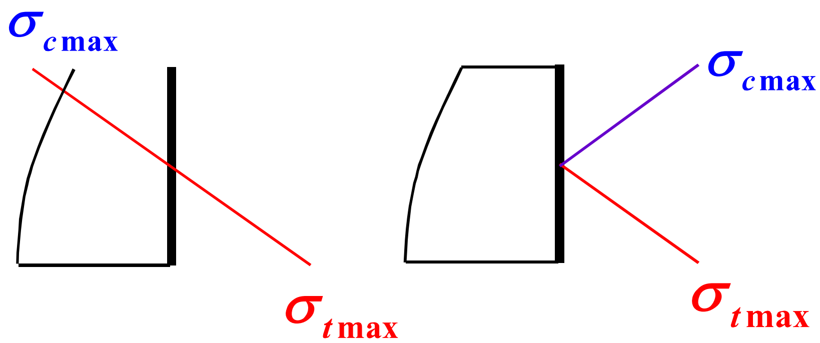
比例极限范围内:

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\sigma = E\frac{y}{\rho} \quad (b)$$

横截面上正应力的分布图





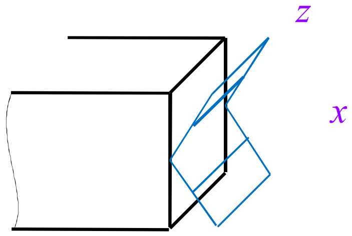
横截面上一点的正应力与该点到中性轴的距离成正比

a. 在中性轴上为零

b. 沿横截面的高度，正应力按线性规律变化；

静力关系

$$\sigma = E\frac{y}{\rho} \quad (b)$$

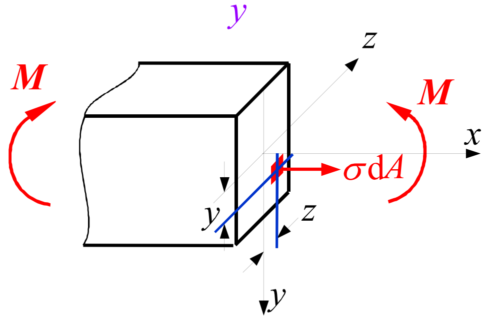


横截面上的应力构成空间平行力系

$$F_x = \int_A \sigma \mathrm{d}A = 0 \quad \text{(c)}$$

$$M_y = \int_A \sigma \mathrm{d}A \cdot z = 0 \quad (d)$$ 自然满足

$$M_Z = \int_A \sigma \mathrm{d}A \cdot y = M \quad (e)$$



$$I_{yz}=0$$

$$\boxed{M = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 \mathrm{d}A = \frac{E}{\rho} I_z}$$

$$\frac{E}{\rho} I_{yz} = 0$$

$$S_z = 0$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

中性轴必须通过横截面的形心

静力关系

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z}$$ 在纯弯曲时，梁的轴线被弯曲成 圆弧

$\frac{1}{\rho}$ 梁的中性层变形后的曲率，梁的轴线变形后的曲率

EI_z 梁的弯曲刚度　反映了梁抵抗弯曲变形的能力

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z} \qquad \sigma = E\frac{y}{\rho}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{My}{I_z}}$$ —— 纯弯曲时梁横截面上的正应力计算公式

M —该截面的弯矩

y —所求点到该截面中性轴的距离

I_z —该截面对中性轴的惯性矩

公式讨论

σ 的正负号的判断

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

1.直接代入M和 y代数值，σ求出为正，为拉应力；σ求出为负，为压应力。

2. 代入M和 y绝对值，再根据梁段的变形情况判断符号

符号判断法：

正弯矩：中性轴以下受拉，中性轴以上受压。

负弯矩：中性轴以下受压，中性轴以上受拉。

最大应力 $$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

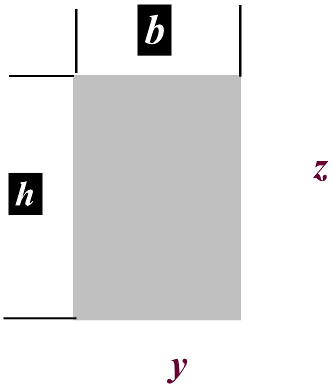
A.横截面关于中性轴对称时(如矩形、圆形等)

上下边缘同时达到最大值： $\sigma_{t\max} = \sigma_{c\max}$

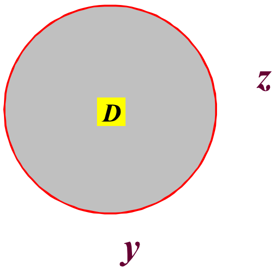
$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} \qquad \sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$$

$$\boxed{W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}}$$ —— 弯曲截面系数

W_z反映了梁抵抗弯曲破坏的能力



$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

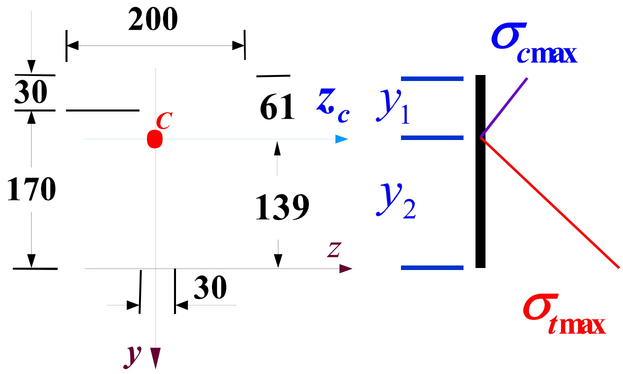


$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32}$$

A. 横截面关于中性轴对称时

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$$

B. 横截面关于中性轴不对称



$$\sigma_{t\max} \neq \sigma_{c\max}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z}$$

$$\sigma_{c\max} = \frac{My_1}{I_z} \qquad \sigma_{t\max} = \frac{My_2}{I_z}$$

三、横力弯曲时的正应力

横力弯曲

A. 变形后，横截面将发生翘曲，不再保持为平面

B. 纵向纤维之间还可能会发生挤压

精确的分析表明

当梁的跨长l与横截面的高度h之比大于5时

可按纯弯曲的正应力公式计算横力弯曲时的正应力

三、横力弯曲时的正应力

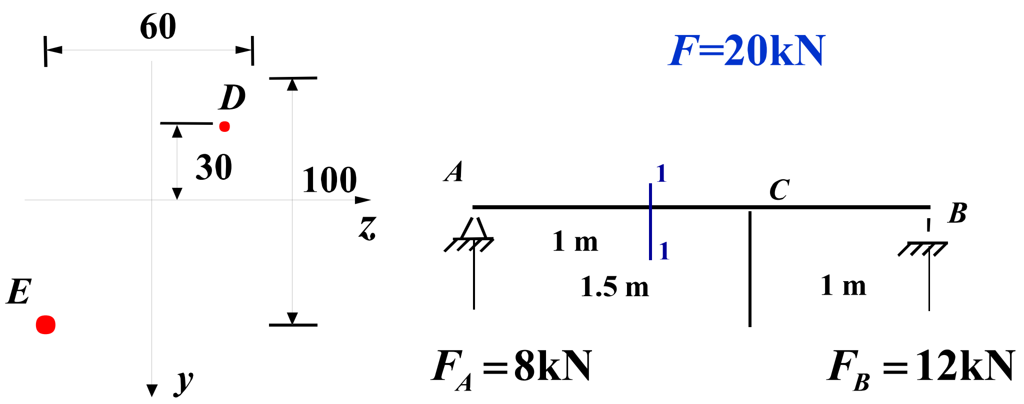
弯曲正应力：

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

最大正应力：

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$$

例1 试求图示矩形截面梁1-1截面上的*D*与*E*点的正应力



解：$\Sigma M_B = 0, 20\times 1 - F_A \times 2.5 = 0, F_A = 8\ \text{kN}$

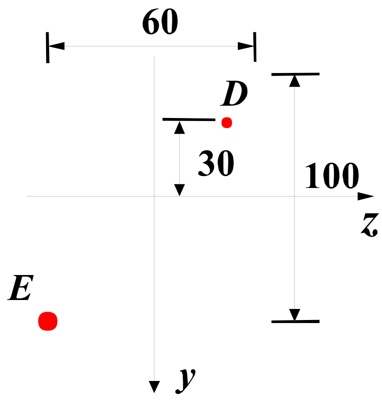
$$\Sigma M_A = 0, F_B \times 2.5 - 20\times 1.5 = 0, F_B = 12\ \text{kN}$$

$$M_{1-1} = 8\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{60\times 100^3}{12}\text{mm}^4 = 5\times 10^6\ \text{mm}^4 = 5\times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$M_{1-1} = 8\ \mathrm{kN \cdot m}$$

$$I_z = 5 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^4$$



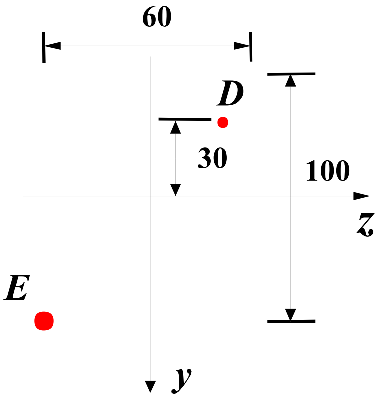
$$\sigma_D = \frac{M_{1-1} y_D}{I_z}$$

$$= \frac{8 \times 10^3 \times \left(-30 \times 10^{-3}\right)}{5 \times 10^{-6}} = -48\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_E = \frac{M_{1-1} y_E}{I_z} = \frac{8 \times 10^3 \times 50 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-6}} = 80\,\mathrm{MPa}$$

$$M_{1-1}=8\ \mathrm{kN\cdot m}$$

$$I_z=5\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4$$



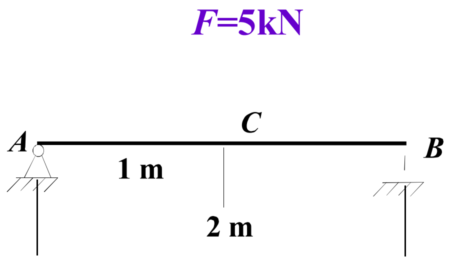
或

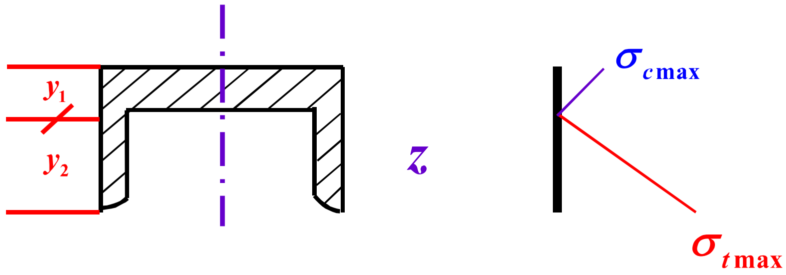
$$\sigma_D=\frac{M_{1-1}y_D}{I_z}=\frac{8\times10^3\times\left(30\times10^{-3}\right)}{5\times10^{-6}}=48\mathrm{MPa}\text{（压）}$$

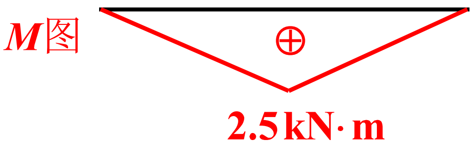
$$\sigma_E=\frac{M_{1-1}y_E}{I_z}=\frac{8\times10^3\times50\times10^{-3}}{5\times10^{-6}}=80\mathrm{MPa}\text{（拉）}$$

或 $\sigma_E=\dfrac{\sigma_D}{30}\times50=\dfrac{48}{30}\times50=80\mathrm{MPa}$

例：一跨中受集中荷载作用的简支梁，由18b号槽钢制成。求此梁的最大拉应力和最大压应力，并画出危险截面上的应力分布图。







解：（1）作弯矩图 $M_{\max} = 2.5\,\mathrm{kN\cdot m}$

（2）查表，得

$$I_z = 111\,\mathrm{cm}^4$$

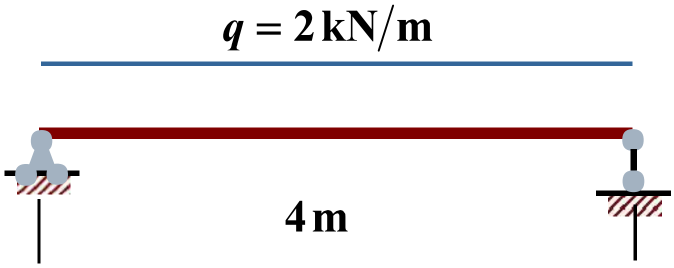
$$y_1 = 1.84\,\mathrm{cm} \quad y_2 = 7 - 1.84 = 5.16\,\mathrm{cm}$$

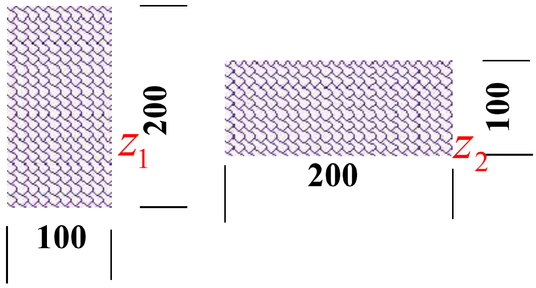
（3）计算最大应力

$$\sigma_{t\max} = \frac{M_{\max} y_2}{I_z} = \frac{2.5\times10^3 \times 5.16\times10^{-2}}{111\times10^{-8}}\,\mathrm{Pa} = 116.2\,\mathrm{MPa}$$

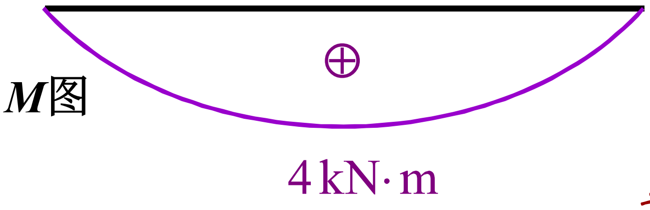
$$\sigma_{c\max} = \frac{M_{\max} y_1}{I_z} = \frac{2.5\times10^3 \times 1.84\times10^{-2}}{111\times10^{-8}}\,\mathrm{Pa} = 41.4\,\mathrm{MPa}$$

例题 试计算图示简支矩形截面木梁平放与竖放时的最大正应力，并加以比较。





解：



竖放

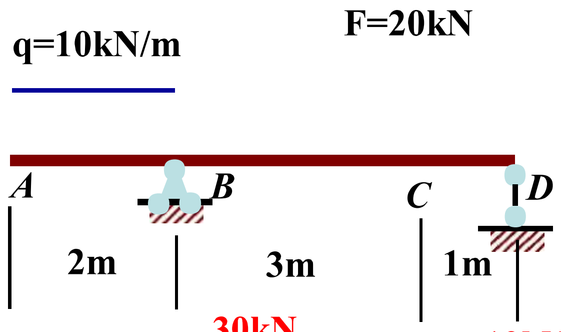
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{z_1}} = \frac{4\times 10^3}{\frac{0.1\times 0.2^2}{6}}\,\text{Pa} = 6\,\text{MPa}$$

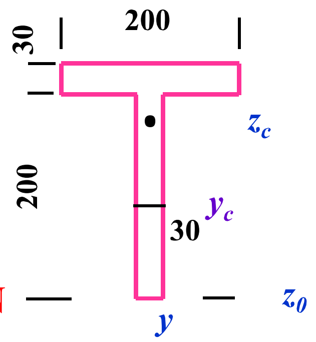
平放

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{z_2}} = \frac{4\times 10^3}{\frac{0.2\times 0.1^2}{6}}\,\text{Pa} = 12\,\text{MPa}$$

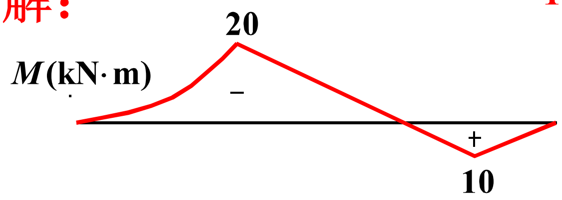
竖放比平放好

例：求 M^+_{max}, M^-_{max} 并求各自的最大拉应力和最大压应力





解：

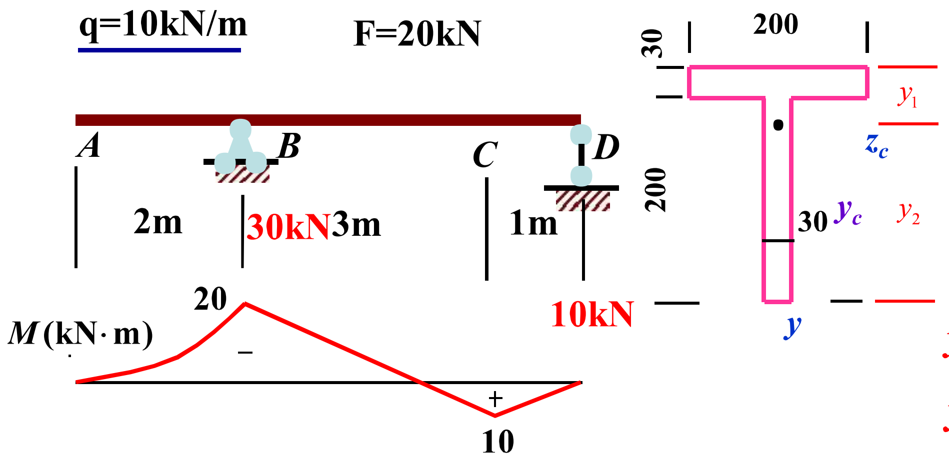


$$M^+_{max} = 10\text{kN}\cdot\text{m} \quad M^-_{max} = 20\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$y_C = \frac{200\times30\times215 + 200\times30\times100}{200\times30 + 200\times30} = 157.5 \text{ mm}$$

$$I_{z_C} = \frac{200\times30^3}{12} + 200\times30\times57.5^2 + \frac{30\times200^3}{12} + 200\times30\times57.5^2$$

$$= 60.1\times10^6 \ \text{mm}^4$$



$$y_C = 157.5\ \text{mm}$$

$$I_{z_C} = 60.1\times10^{6}\ \text{mm}^4$$

$$M_{\max}^{+} = 10\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{\max}^{-} = 20\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$y_1 = 230 - y_C = 72.5\,\text{mm}$$

$$y_2 = y_C = 157.5\,\text{mm}$$

$$B截面:\sigma_{B\text{tmax}} = \sigma_{B上} = \frac{M_B y_1}{I_{z_C}} = \frac{20\times10^3\times72.5\times10^{-3}}{60.1\times10^6\times10^{-12}}\text{Pa} = 24.1\text{MPa}$$

$$\sigma_{B\text{cmax}} = \sigma_{B下} = \frac{M_B y_2}{I_{z_c}} = \frac{20\times10^3\times157.5\times10^{-3}}{60.1\times10^6\times10^{-12}}\text{Pa} = 52.4\text{MPa}$$

$$C截面:\sigma_{\text{Ctmax}} = \sigma_{\text{C}下} = \frac{M_C y_2}{I_{z_c}} = \frac{10\times10^3\times157.5\times10^{-3}}{60.1\times10^6\times10^{-12}}\text{Pa} = 26.2\text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{Ccmax}} = \sigma_{\text{C}上} = \frac{M_C y_1}{I_{z_C}} = \frac{10\times10^3\times72.5\times10^{-3}}{60.1\times10^6\times10^{-12}}\text{Pa} = 12.1\text{MPa}$$

四、梁的正应力强度条件

$$\sigma_{\max} \le [\sigma]$$

(1)对于抗拉和抗压强度相等的材料(如低碳钢)

$$|\sigma|_{\max} \le [\sigma]$$

(2)对于抗拉和抗压强度不相等的材料(如铸铁）

$$\sigma_{t\max} \le [\sigma_t] \qquad \sigma_{c\max} \le [\sigma_c]$$

解题步骤:

1、内力分析，画内力图 ——— 目的：确定危险截面

2、应力分析，求最大应力 ——— 目的：确定危险点及最大应力

3、强度计算

危险截面：

对等直梁而言

（A）截面关于中性轴对称时（多为塑性材料），同一截面上的最大拉、压应力相等，故危险截面为 $|M|_{\max}$ 所在截面，最大应力：

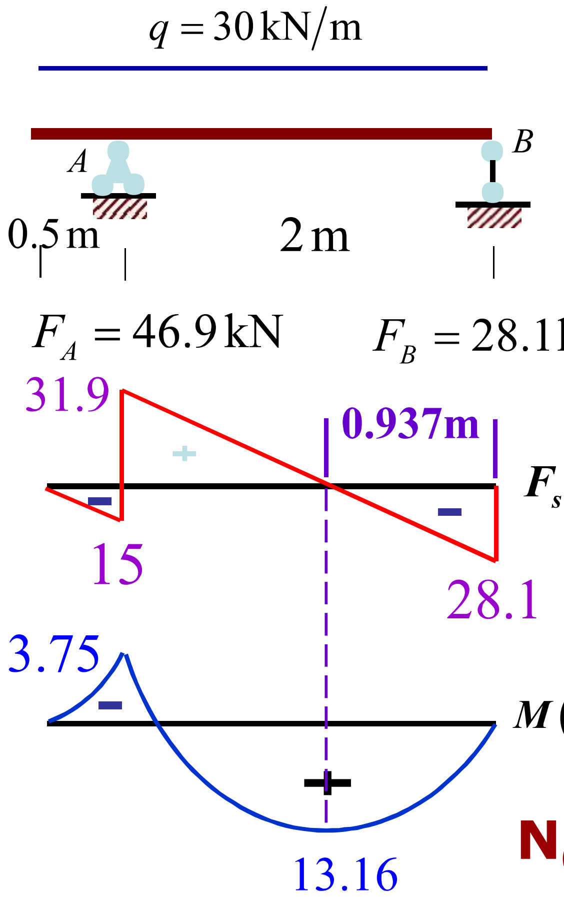
$$\sigma_{\max}=\frac{|M|_{\max}}{W_z}$$

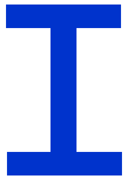
（B）截面关于中性轴不对称时（多为脆性材料），同一截面上的最大拉、压应力不相等，危险截面有两个：

$(M_+)_{\max}$、$(M_-)_{\max}$ 所在截面

此时，要确定全梁的最大拉、压应力，需分别计算最大正、负弯矩所在截面的最大拉、压应力，再作比较。

例题 已知工字钢［σ］=215MPa。试选择工字钢型号。





解：1　作剪力、弯矩图

$$M_{\max} = 13.16\,\mathrm{kN\cdot m}$$

2、选择工字钢型号

由

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_Z} \le [\sigma]$$

得

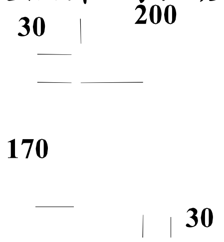
$$W_Z \ge \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{13.16\times10^3}{215\times10^6}\,\mathrm{m}^3$$

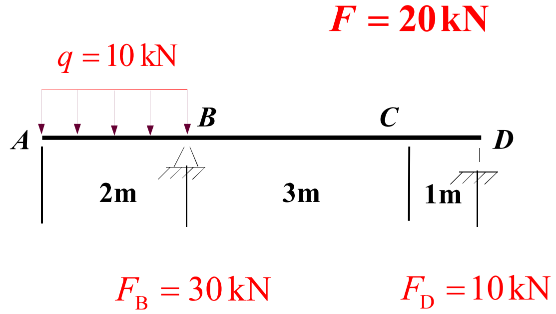
$$= 61.2\,\mathrm{cm}^3$$

查表

N_0 12.6工字钢　W_Z=77.5cm³

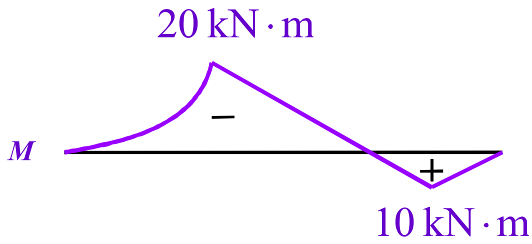
例　铸铁梁的受载情况以及截面尺寸如图所示。铸铁材料的许用拉应力 $[\sigma^+]=[\sigma_t]=40\ \text{MPa}$ ，许用压应力 $[\sigma^-]=[\sigma_c]=100\ \text{MPa}$ ，试按正应力强度条件校核梁的强度。





解：

1、作梁的弯矩图

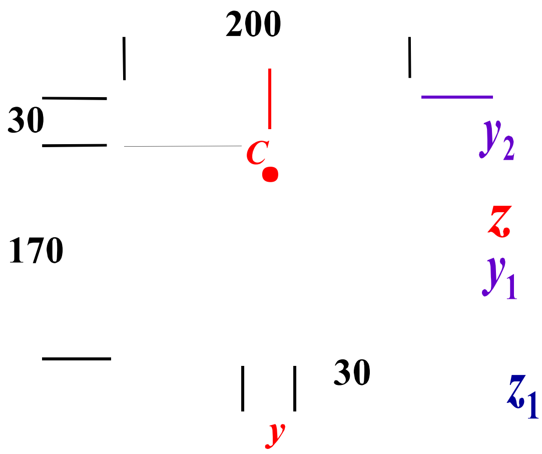


危险截面

$$M_B, M_C$$

$$\begin{cases} \sigma_{t\max} \le [\sigma_t] \\ \sigma_{c\max} \le [\sigma_c] \end{cases}$$

2、计算截面的几何性质



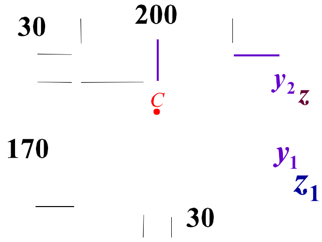
$$y_2 = \frac{200\times30\times15+170\times30\times(30+85)}{200\times30+170\times30} = 61\text{mm}$$

$$y_1 = 200 - y_2 = 139\ \text{mm}$$

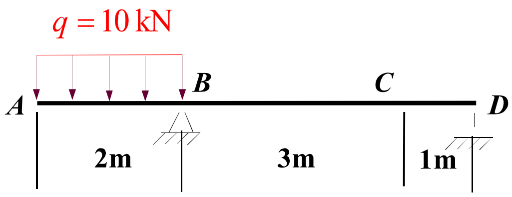
$$I_z = \frac{200\times30^3}{12} + 200\times30\times(61-15)^2 + \frac{30\times170^3}{12} + 170\times30\times(30+85-61)^2$$

$$= 4.03\times10^7\ \text{mm}^4$$

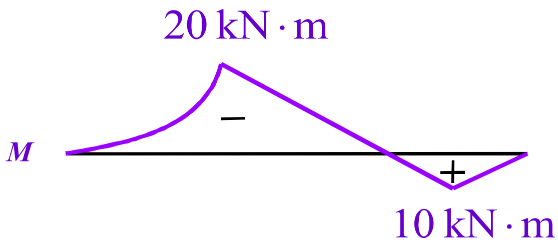
3、强度计算



$F = 20\,\mathrm{kN}$



$F_{QB} = 30\,\mathrm{kN}$ $F_{RD} = 10\,\mathrm{kN}$



B截面

$$(\sigma_t)_{B\max} = \frac{M_B y_2}{I_z} = 30.3\ \mathrm{MPa}$$

$$(\sigma_c)_{B\max} = \frac{M_B y_1}{I_z} = 69.0\ \mathrm{MPa}$$

C截面

$$(\sigma_t)_{C\max} = \frac{M_C y_1}{I_z} = 34.5\ \mathrm{MPa}$$

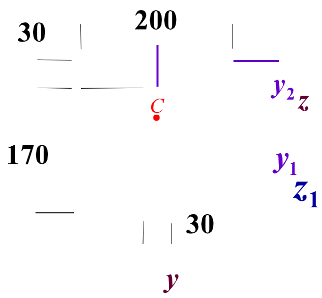
$$(\sigma_c)_{C\max} = \frac{M_C y_2}{I_z} = 15.2\ \mathrm{MPa}$$

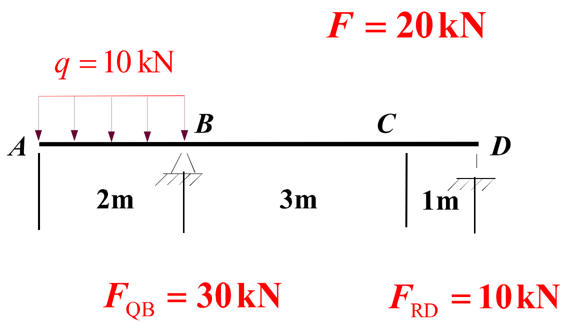
$$(\sigma_c)_{\max} = 69.0\ \mathrm{MPa} \le [\sigma_c]$$

$$(\sigma_t)_{\max} = 34.5\ \mathrm{MPa} \le [\sigma_t]$$

强度满足要求

$$(\sigma_c)_{\max} = 69.0\ \text{MPa}$$
$$(\sigma_t)_{\max} = 34.5\ \text{MPa}$$





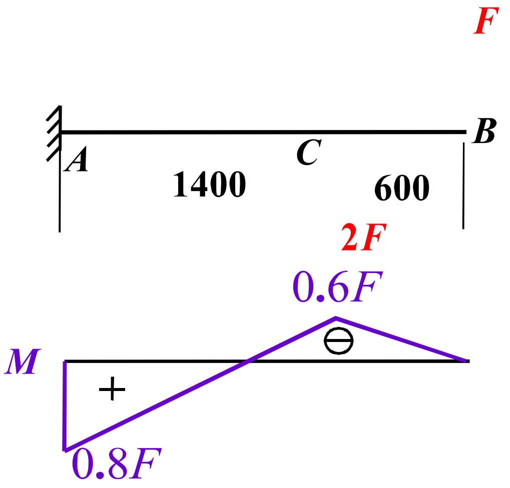
4、讨论

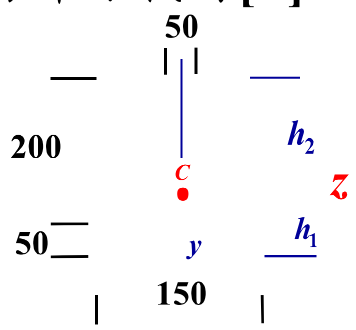
(1) 若梁的载荷不变，将*T*形横截面倒置(成⊥形横截面)，是否合理？

$$(\sigma_t)_{\max} = 69.0\ \text{MPa} \geq [\sigma_t]$$
$$(\sigma_c)_{\max} = 34.5\ \text{MPa}$$

因此:倒置不合理

例　铸铁梁的受载情况以及截面尺寸如图所示。铸铁材料的许用拉应力 $[\sigma_t]=40\ \mathrm{MPa}$，许用压应力 $[\sigma_c]=160\ \mathrm{MPa}$，其中 $I_z=10180\ \mathrm{cm}^4$，$h_1=9.64\ \mathrm{cm}$，试计算该梁的许可载荷[F]。





解：作弯矩图

危险截面为

$$M_A=0.8F$$

$$M_C=0.6F$$

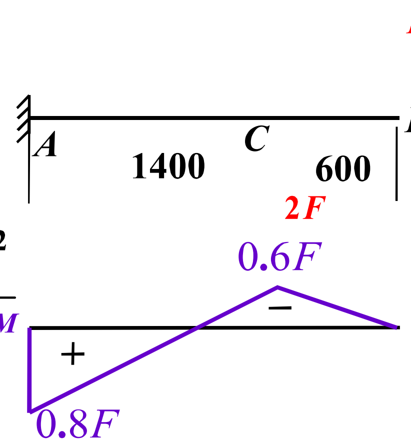
***A*截面：**

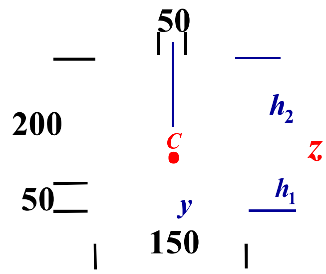
$$(\sigma_t)_{A\max}=\frac{M_A h_1}{I_z}=\frac{0.8F\times 9.64\times 10^{-2}}{10180\times 10^{-8}}=757.6F$$

$$(\sigma_c)_{A\max}=\frac{M_A h_2}{I_z}=\frac{0.8F\times(25-9.64)\times 10^{-2}}{10180\times 10^{-8}}=1207.2F$$

C截面：

$$(\sigma_t)_{C\max}=\frac{M_C h_2}{I_z}$$





$$=\frac{0.6F\times(25-9.64)\times10^{-2}}{10180\times10^{-8}}$$

$$=905.4F$$

$$(\sigma_c)_{C\max}=\frac{M_C h_1}{I_z}=\frac{0.6F\times9.64\times10^{-2}}{10180\times10^{-8}}=568.2F$$

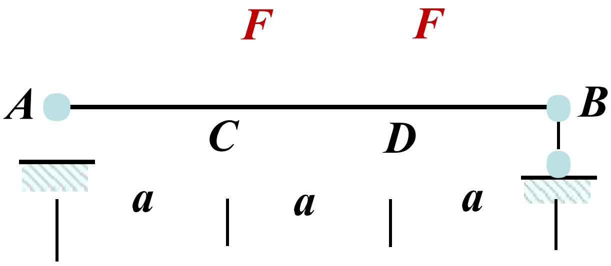
对全梁

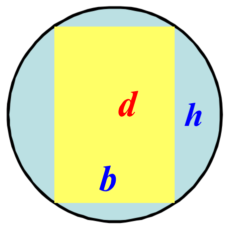
由 $(\sigma_t)_{\max}=905.4F\le[\sigma_t]=40\times10^6$ 得 $F\le44.2\,\mathrm{kN}$

由 $(\sigma_c)_{\max}=1207.2F\le[\sigma_c]=160\times10^6$ 得 $F\le132.5\,\mathrm{kN}$

故许可荷载 $[F]=44.2\,\mathrm{kN}$

例：矩形截面简支梁由圆形木材刨成，已知F=5kN，a=1.5m，[σ]=10MPa，试确定此矩形截面h/b的最优比值，使其截面的抗弯截面系数具有最大值，并计算所需圆木的最小直径d。



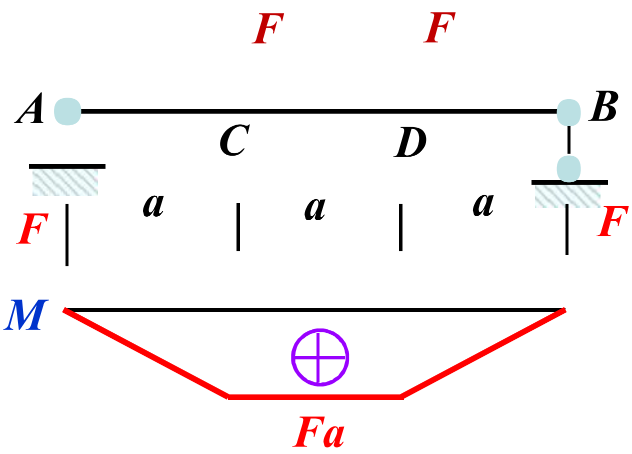


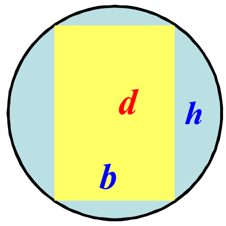
解:1、确定W_Z最大时的h/b

$$W_z=\frac{bh^2}{6}=\frac{b(d^2-b^2)}{6}$$

令 $\frac{\mathrm{d}W_Z}{\mathrm{d}b}=0$ 　则 $\frac{1}{6}(d^2-3b^2)=0$ 　$b^2=\frac{1}{3}d^2$ 　$h^2=d^2-b^2=\frac{2}{3}d^2$

故 $\frac{h}{b}=\sqrt{2}$





F=5kN，a=1.5m

[σ]=10MPa

$$\frac{h}{b}=\sqrt{2}$$

2、确定圆木直径d

$$M_{\max} = Fa = 7.5\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma]$$

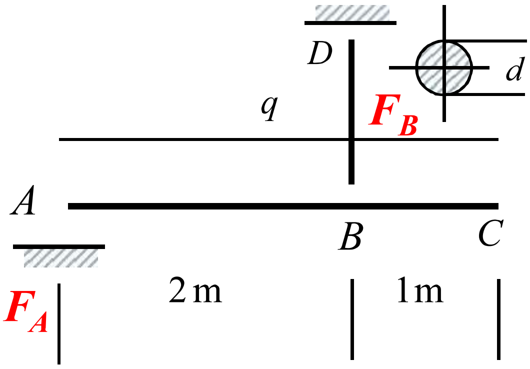
$$W_z \ge \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{7.5\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}}{10\times10^6\ \text{Pa}} = 75\times10^4\ \text{mm}^3$$

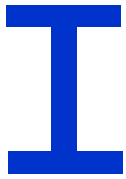
$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{1}{6}[(\sqrt{2}b)^2\cdot b] = 75\times10^4\ \text{mm}^3$$

$$b = 131\,\text{mm}$$

$$d^2 = h^2 + b^2 = 3b^2 = 515\times10^2\ \text{mm}^2 \quad 得 \quad d = 227\,\text{mm}$$

例题　图示结构承受均布荷载，AC为10号工字钢梁，B处用直径d=20mm的钢杆BD悬吊，梁和杆的许用应力均为[σ]＝160MPa。不考虑切应力，试计算结构的许可荷载[q]。





解：1、求支反力

$$\Sigma M_A = 0$$

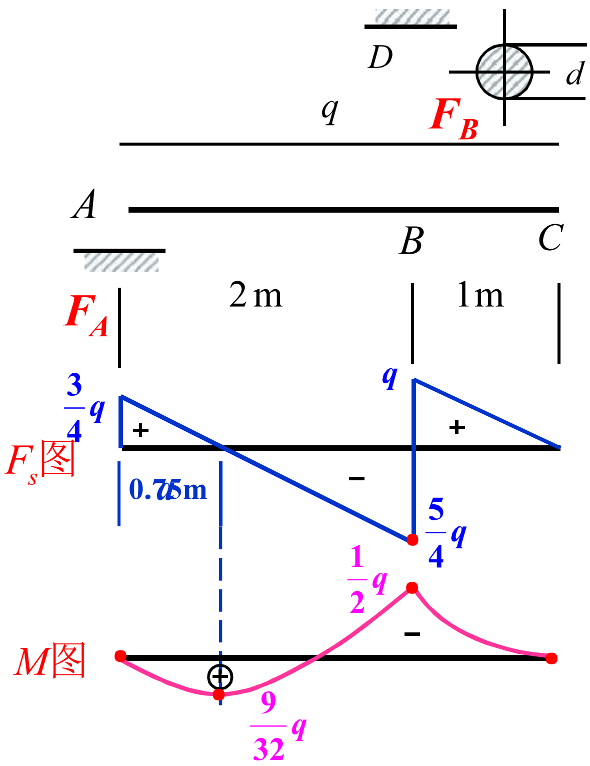
$$F_B \times 2 - q \times 3 \times \frac{3}{2} = 0$$

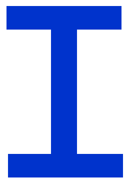
$$F_B = \frac{9q}{4}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$q \times 3 \times \frac{1}{2} - F_A \times 2 = 0$$

$$F_A = \frac{3q}{4}$$





$$F_A=\frac{3q}{4}\qquad F_B=\frac{9q}{4}$$

2、作剪力、弯矩图

$$F_{sB左}=F_A-2q=-\frac{5q}{4}$$

$$M_C=0$$

$$M_B=-q\times1\times\frac{1}{2}=-\frac{q}{2}$$

$$M_A=0$$

剪力为零的截面位置：

$$F_s=F_A-qa=0\qquad a=\frac{F_A}{q}=\frac{3}{4}\text{m}$$

$$M_{极值}=F_A\times\frac{3}{4}-q\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}q\times\frac{3}{4}-\frac{9}{32}q=\frac{9}{32}q$$

图示结构承受均布荷载，AC为10号工字钢梁，B处用直径d=20mm的钢杆BD悬吊，梁和杆的许用应力均为[σ]=160MPa。不考虑切应力，试计算结构的许可荷载[q]。

3、根据梁的强度条件确定荷载

$$\left|M\right|_{\max} = \frac{q}{2}$$

查表得

NO.10工字钢: $W_z = 49\,\mathrm{cm}^3$

$$\sigma_{\max} = \frac{\left|M\right|_{\max}}{W_z} = \frac{0.5q}{W_z} \le [\sigma]$$

$$q \le \frac{W_Z[\sigma]}{0.5} = \frac{49\times10^{-6}\times160\times10^{6}}{0.5}\,\mathrm{N/m} = 15.68\,\mathrm{kN/m}$$

图示结构承受均布荷载，AC为10号工字钢梁，B处用直径d=20mm的钢杆BD悬吊，梁和杆的许用应力均为[σ] =160MPa 。不考虑切应力，试计算结构的许可荷载 [q]。

4、根据拉杆的强度条件确定荷载

$$F_{NBD}=\frac{9}{4}q$$

$$\sigma=\frac{F_{NBD}}{A}=\frac{\frac{9}{4}q}{\frac{\pi d^2}{4}}\leq[\sigma]$$

$$q\leq\frac{1}{9}\pi d^2[\sigma]=\frac{1}{9}\pi\times 20^2\times 10^{-6}\times 160\times 10^6\ \mathrm{N/m}=22.3\,\mathrm{kN/m}$$

故许可荷载 $[q]=15.68\,\mathrm{kN/m}$

§4.5 梁横截面上的切应力、梁的切应力强度条件

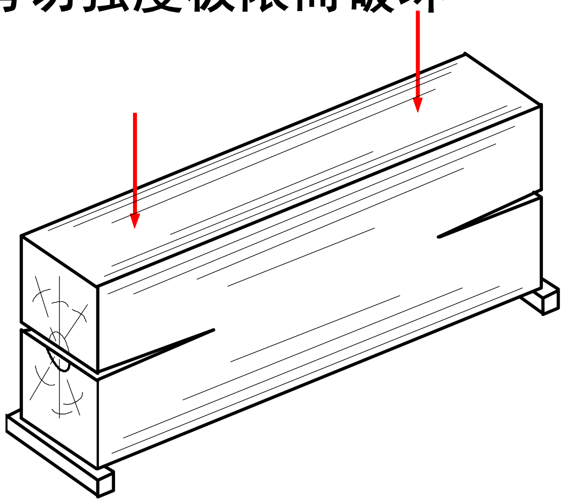
横力弯曲: 横截面上既有正应力、又有切应力

实践表明

有些梁是因正应力达到拉伸或压缩强度极限而破坏

另一些梁则是因切应力达到剪切强度极限而破坏

跨度小、截面高的木梁

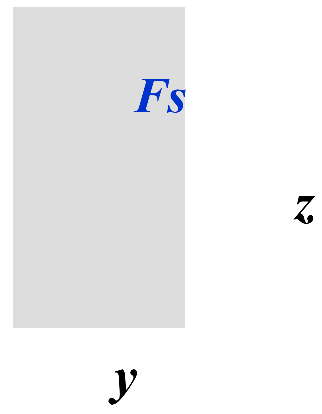


一、狭长矩形截面梁的切应力

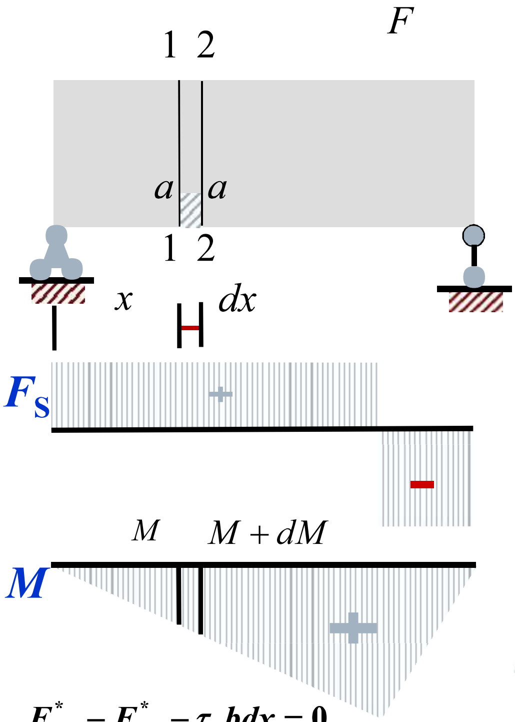
假设：

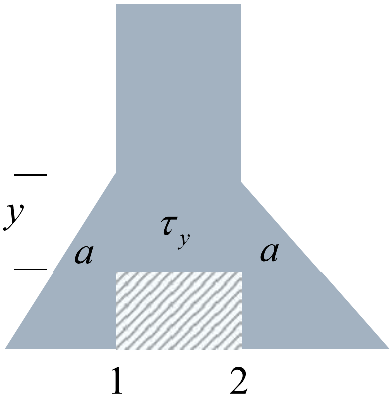
1、横截面上的τ方向与F_S平行

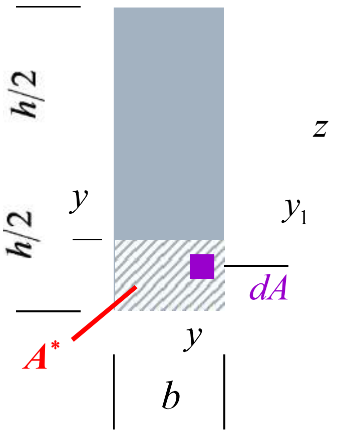
2、τ沿截面宽度是均匀分布的

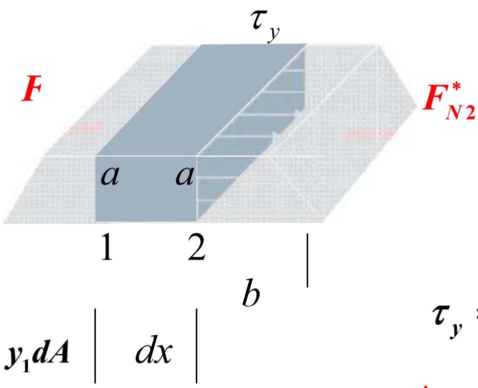


即横截面上距中性轴等远各点处的切应力相等。









$$\frac{dM}{I_z}\underbrace{\int_{A^*} y_1 dA}_{S_z^*} = \tau_y b dx$$

$$F^*_{N2} - F^*_{N1} - \tau_y b dx = 0$$

$$F^*_{N1} = \int_{A^*} \sigma_1 dA = \int_{A^*} \frac{My_1}{I_z} dA = \frac{M}{I_z}\int_{A^*} y_1 dA$$

$$\tau_y = \frac{S_z^*}{I_z b}\frac{dM}{dx}$$

$$F^*_{N2} = \int_{A^*} \sigma_2 dA = \int_{A^*} \frac{(M + dM)y_1}{I_z} dA$$

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b}$$

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_Z b}$$ —— 矩形截面梁弯曲时横截面上任一点的切应力计算公式

F_s — 横截面上的剪力； b —截面的宽度；

I_Z — 截面对中性轴的惯性矩；

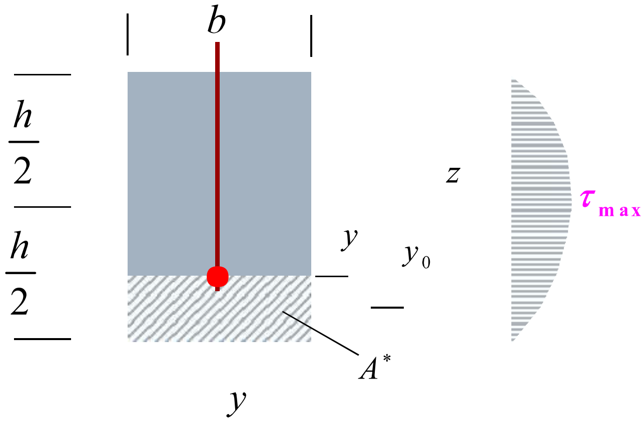
S_Z^* —该点横线以外部分的面积对中性轴的静矩。

$$S_Z^* = A^* y_0$$

$$= b(\frac{h}{2} - y)\left(y + \frac{h/2 - y}{2} \right)$$

$$= \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\tau_y = \frac{F_s}{2I_Z}(\frac{h^2}{4} - y^2)$$

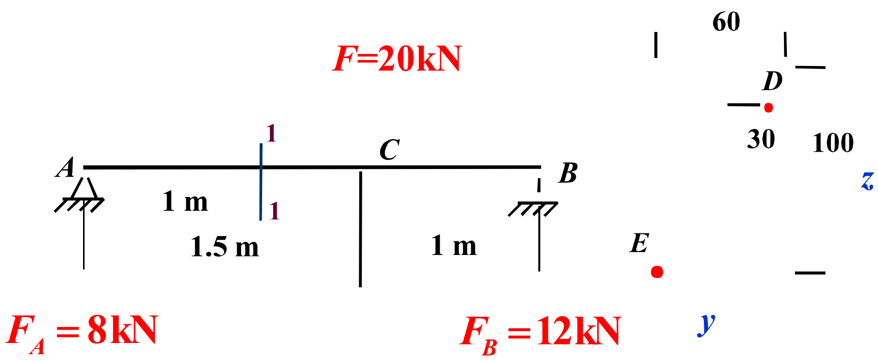


$$\tau_{\max} = \frac{F_s h^2}{8I_Z} = \frac{F_s h^2}{8\frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2}\frac{F_s}{A}$$

切应力沿截面高度抛物线分布，中性轴上切应力最大，上、下边缘处为零。

例: 试求图示矩形截面梁1-1截面上的D与E点的切应力.

解:



$$F_{S1} = 8\ \text{kN}$$

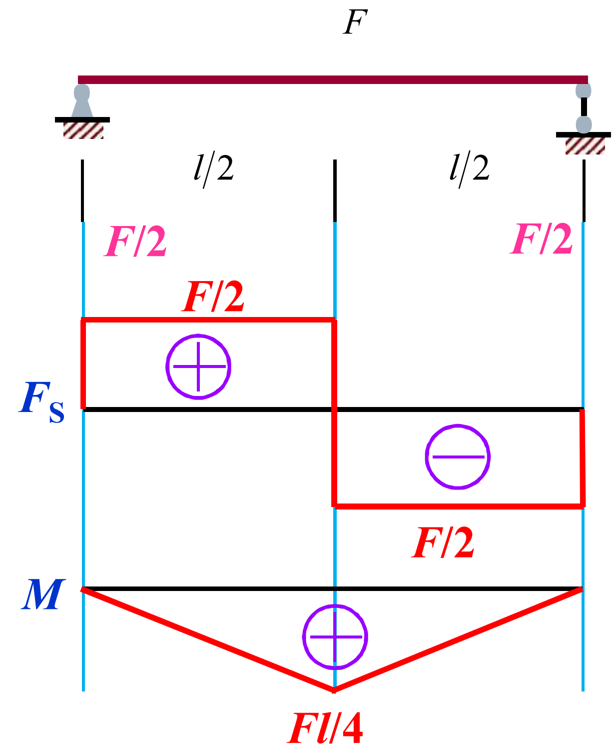
$$\tau_E = 0$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.06\times 0.1^3}{12} = 5\times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$S_{ZD}^{*} = 60\times 20\times 40 = 4.8\times 10^4\ \text{mm}^3$$

$$\tau_D = \frac{F_{S1}S_{zD}^{*}}{I_z b} = \frac{8\times 10^3\times 4.8\times 10^4\times 10^{-9}}{5\times 10^{-6}\times 60\times 10^{-3}} = 1.28\ \text{MPa}$$

例题　　矩形截面简支梁，加载于梁中点C，如图示。求$\sigma_{\max}$，$\tau_{\max}$ 。



解：

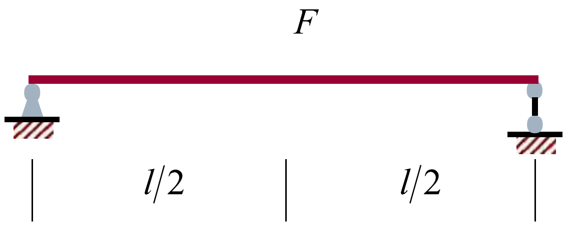
$$M_{\max} = \frac{Fl}{4} \qquad W_z = \frac{bh^2}{6}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{\dfrac{Fl}{4}}{\dfrac{1}{6}bh^2} = \frac{3Fl}{2bh^2}$$

$$F_{s\max} = \frac{F}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{F_{s\max}}{A} = \frac{3}{2}\frac{\dfrac{F}{2}}{bh} = \frac{3}{4}\frac{F}{bh}$$

例题 矩形截面简支梁，加载于梁中点C，如图示。求σ_{max}，τ_{max} 。



解：

$$M_{max}=\frac{FL}{4} \qquad W_Z=\frac{bh^2}{6}$$

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_Z}=\frac{\frac{FL}{4}}{\frac{1}{6}bh^2}=\frac{3FL}{2bh^2}$$

$$F_{s\max}=\frac{F}{2}$$

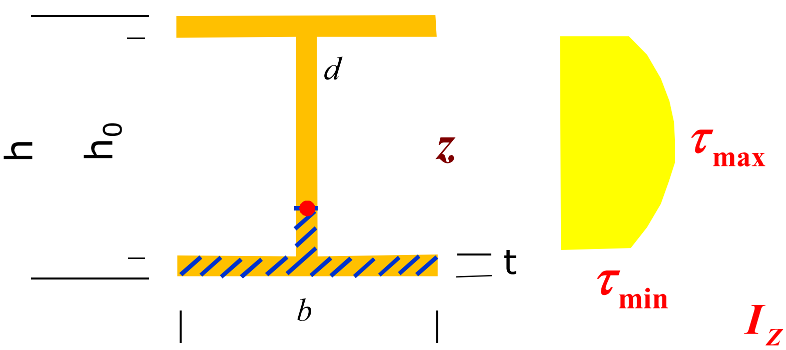
$$\tau_{max}=\frac{3}{2}\frac{F_s}{A}=\frac{3}{2}\frac{\frac{F}{2}}{bh}=\frac{3}{4}\frac{F}{bh}$$

$$\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}}=\frac{\frac{3}{2}\frac{FL}{bh^2}}{\frac{3}{4}\frac{F}{bh}}=\frac{2L}{h}$$

$$\frac{L}{h}>5 \qquad \frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}}>10$$

对细长等直梁 $\tau \ll \sigma$

二、工字形截面梁的切应力



横截面上的切应力(95-97)%由腹板承担，而翼缘仅承担了(3--5) %，且翼缘上的切应力情况又比较复杂．为了满足实际工程中计算和设计的需要仅分析腹板上的切应力．

腹板：狭长矩形

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z d}$$

式中：

I_z —— 整个工字形截面对中性轴的惯性矩

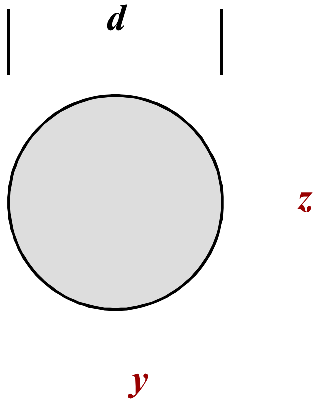
S_z^* —— 该点横线以外部分面积对中性轴的静矩

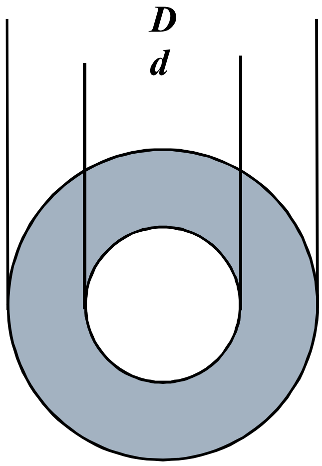
d —— 腹板的宽度

τ_{max} 发生在中性轴上，

对工字型钢，$\dfrac{I_z}{S_{z\max}^*}$ 查表获得

三、圆形和圆环形截面梁的最大切应力





$$\tau_{\max} = \frac{4}{3}\frac{F_S}{A}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\tau_{\max} = 2\frac{F_S}{A}$$

A为圆环形截面面积

四、梁的切应力强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{F_{S\max} S_{Z\max}^{*}}{I_Z b} \leq [\tau]$$

最大正应力发生在最大弯矩截面的上、下边缘处，该处的切应力为零，即正应力危险点处于单轴应力状态；

最大切应力通常发生在最大剪力截面的中性轴处，该处的正应力为零，即切应力危险点处于纯剪切应力状态。

$$\sigma_{max} = \frac{My_{max}}{I_z} \qquad \tau_{max} = \frac{F_S S^*_{z\max}}{I_z b}$$

讨论：

（1） 对于细长梁：其控制因素通常是弯曲正应力

一般不必校核弯曲切应力强度

但在以下几种情况中，必须考虑弯曲切应力强度

a. 小跨度梁

b. 支座附近有较大荷载

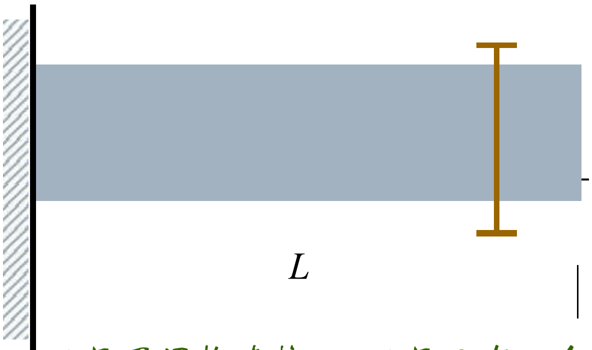
c. 铆接、焊接或胶合而成的梁

d. 木梁

(2) 在设计梁的截面时：通常先按正应力强度条件设计

再按切应力强度条件校核

例题 4.34 两个尺寸完全相同的矩形截面梁叠加在一起承受荷载如图示,若材料许用应力为[σ],其许可荷载[F]为多少?如将两根梁用一个螺栓联成一整体,则其许可荷载[F]为多少?若螺栓材料许用切应力为[τ],求螺栓的最小直径.



两梁叠加:

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{2W_z}=\frac{FL}{2\frac{bh^2}{6}}=\frac{3FL}{bh^2}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{3FL}{bh^2}\le[\sigma] \qquad [F]=\frac{bh^2[\sigma]}{3L}$$

两梁用螺栓连接　　两梁只有一个中性轴

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{FL}{\frac{b(2h)^2}{6}}=\frac{3FL}{2bh^2}\le[\sigma] \qquad [F]=\frac{2bh^2[\sigma]}{3L}$$

将两个梁连接成一个整体后,承载能力提高一倍.

梁中性层处切应力

$$\tau_{\max}=\frac{3}{2}\frac{F_s}{A}=\frac{3}{2}\frac{\frac{2bh^2[\sigma]}{3L}}{2bh}=\frac{h[\sigma]}{2L}$$

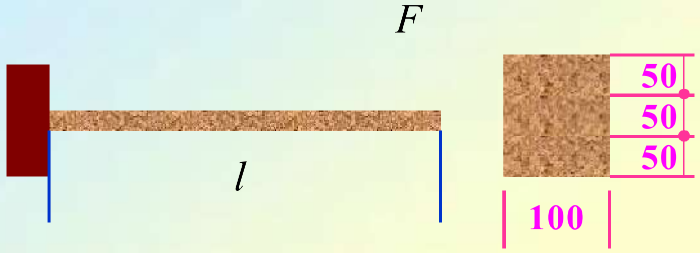
中性层剪力

$$F_s=\tau_{\max}bL$$

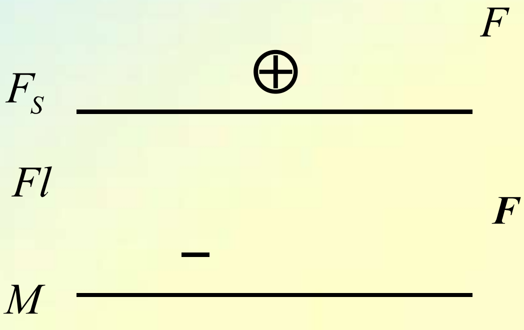
$$\tau=\frac{F_s}{A}=\frac{\frac{h}{2}b[\sigma]}{\frac{\pi d^2}{4}}\le[\tau]$$

$$d\ge\sqrt{\frac{2hb[\sigma]}{\pi[\tau]}}$$

例　悬臂梁由三块木板粘接而成。跨度为1m。胶合面的许可切应力为0.34MPa，木材的[σ]= 10 MPa，[τ]=1MPa，求许可荷载。



解：1. 画梁的剪力图和弯矩图



2. 按正应力强度条件计算许可荷载

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{6Fl}{bh^2}\le[\sigma]$$

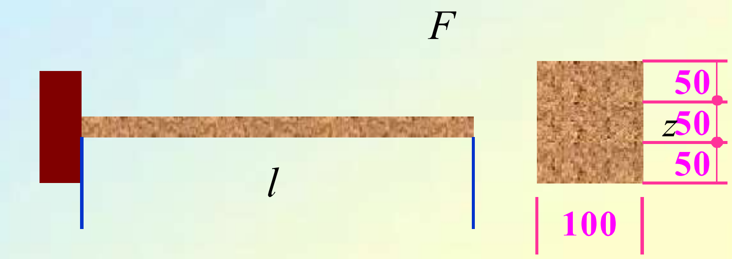
$$F\le\frac{[\sigma]bh^2}{6l}=\frac{10^7\times0.1\times0.15^2}{6}=3750\text{N}=3.75\text{kN}$$

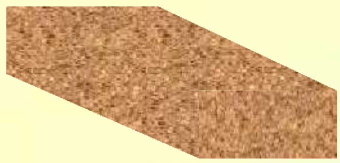
3. 按切应力强度条件计算许可荷载

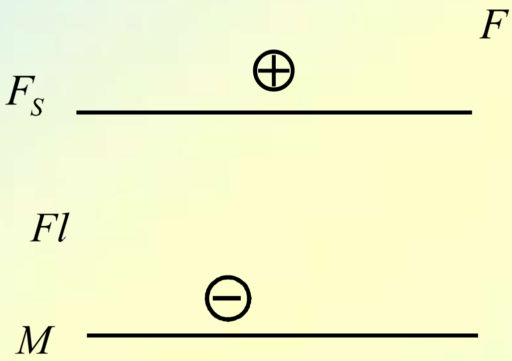
$$\tau_{\max}=\frac{3F_{S\max}}{2A}=\frac{3F}{2bh}\le[\tau]$$

$$F\le\frac{2[\tau]bh}{3}=\frac{2\times10^6\times0.1\times0.15}{3}=10000\text{N}=10\text{kN}$$

4. 按胶合面强度条件计算许可荷载







$$\tau_{胶}=\frac{F_S S_z^*}{I_z b}=\frac{Fb\left(\frac{h}{3}\right)^2}{\frac{bh^3}{12}b}=\frac{4F}{3bh}\le[\tau]_{胶}$$

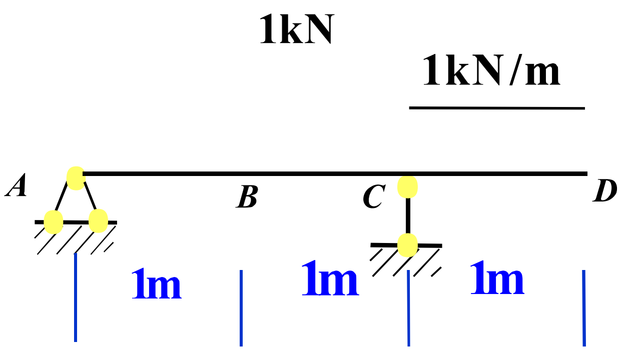
$$F\le\frac{3bh[\tau]_{胶}}{4}=\frac{3\times0.1\times0.15\times0.34\times10^6}{4}$$

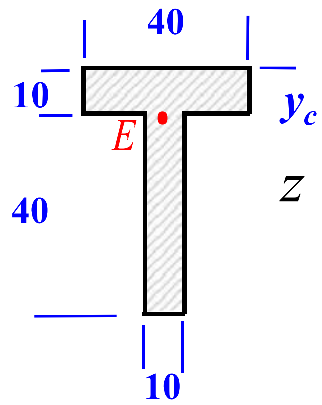
$$=3825\mathrm{N}=3.825\mathrm{kN}$$

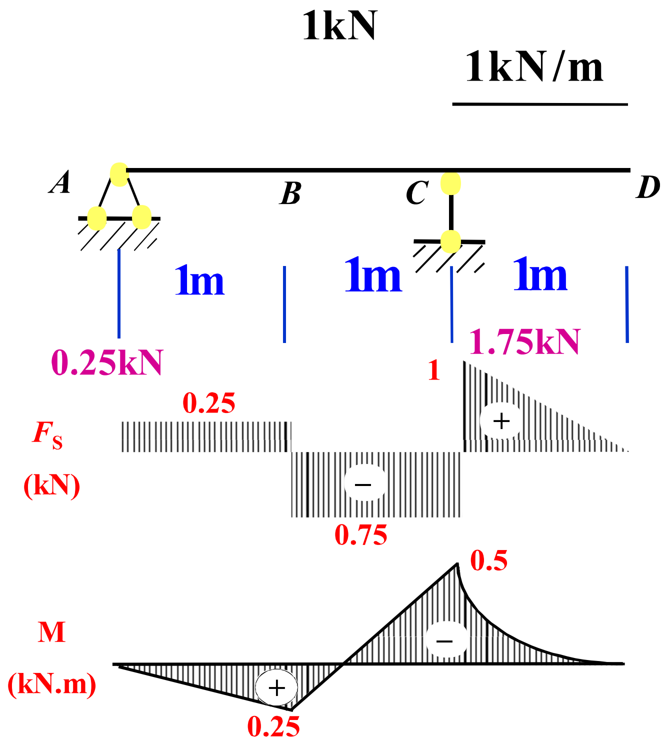
5. 梁的许可荷载为

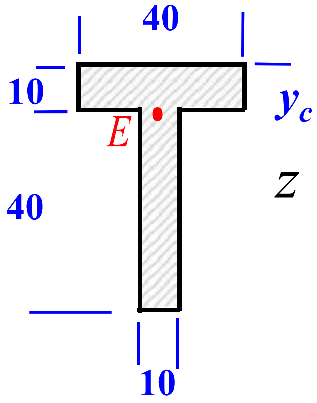
$$[F]=3.75\mathrm{kN}$$

例 T形梁尺寸及所受荷载如图所示, 已知$[\sigma]_c$=100MPa，$[\sigma]_t$=50MPa，$[\tau]$=40MPa，y_c=17.5mm，$I_z=18.2\times10^4\mathrm{mm}^4$。求：1)$C$左侧截面$E$点的正应力、切应力；2)校核梁的正应力、切应力强度。







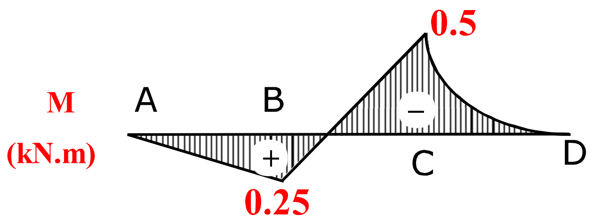


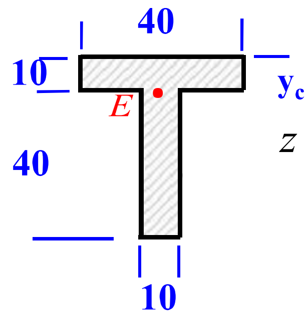
1）求支座约束力：

$$F_A = 0.25\text{kN}，\ F_C = 1.75\text{kN}$$

2）作梁的Fs和M图

$$F_{SC左} = -0.75\text{kN}，\ M_C = -0.5\text{kN}\cdot\text{m}$$

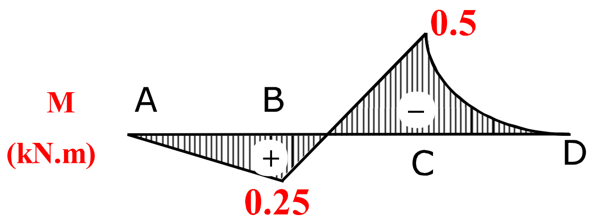


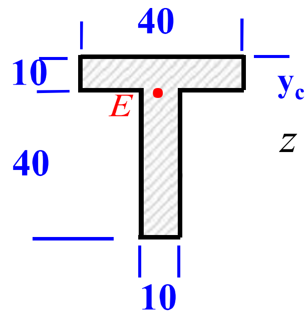


$$\begin{cases} F_{SC左} = -0.75\text{kN} & y_C = 17.5\,\text{mm} \\ M_C = -0.5\text{kN}\cdot\text{m} & I_Z = 18.2\times10^4\ \text{mm}^4 \end{cases}$$

$$3)\sigma_E = \frac{M_C y_E}{I_Z} = \frac{0.5\times10^3\times7.5\times10^{-3}}{18.2\times10^4\times10^{-12}} = 20.6\text{MPa(拉)}$$

$$\tau_E = \left|\frac{F_{SC左}S_z^*}{I_z b}\right| = \frac{0.75\times10^3\times(400\times12.5)\times10^{-9}}{18.2\times10^4\times10^{-12}\times10\times10^{-3}} = 2.1\text{MPa}$$



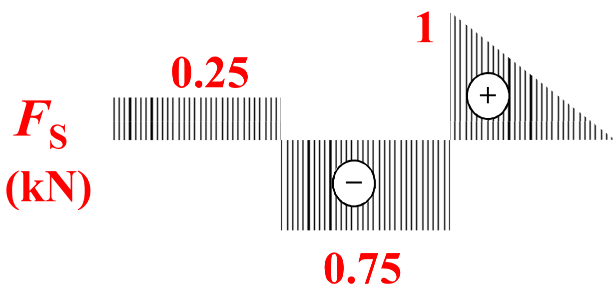


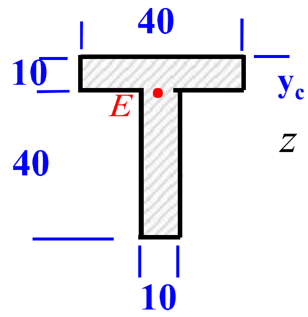
4)

$$\begin{cases} \sigma_{B\text{tmax}} = \dfrac{M_B(50-y_c)}{I_z} = 44.6\,\text{MPa} < [\sigma]_\text{t} \\ \sigma_{B\text{cmax}} = \dfrac{M_B y_c}{I_z} = 24.0\,\text{MPa} < [\sigma]_\text{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{C\text{tmax}} = \dfrac{M_C y_c}{I_z} = 48.0\,\text{MPa} < [\sigma]_\text{t} \\ \sigma_{C\text{cmax}} = \dfrac{M_C(50-y_c)}{I_z} = 89.2\,\text{MPa} < [\sigma]_\text{c} \end{cases}$$

该梁满足正应力强度要求





5）切应力强度校核：

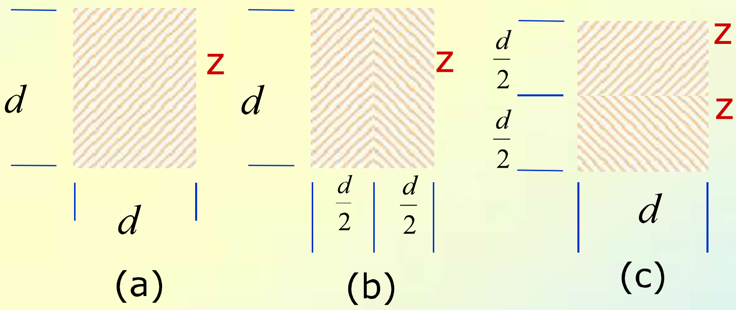
$$\tau_{\max} = \frac{F_{S\max} S^*_{z\max}}{I_z b}$$

$$= \frac{10^3 \times [10 \times (50 - y_c)^2 / 2] \times 10^{-9}}{18.2 \times 10^4 \times 10^{-12} \times 10 \times 10^{-3}}$$

$$= 2.9\text{MPa} < [\tau]$$

该梁满足切应力强度要求

例： 承受相同弯矩M_z的三根直梁，其截面组成方式如图所示。图（a）的截面为一整体；图（b）的截面由两矩形截面并列而成（未粘接）；图（c）的截面由两矩形截面上下叠合而成（未粘接）。三根梁中的最大正应力分别为σ_{max}（a）、 σ_{max}（b）、σ_{max}（c）。关于三者之间的关系有四种答案，试判断哪一种是正确的。



$(A)\quad \sigma_{\max}(a) < \sigma_{\max}(b) < \sigma_{\max}(c);$

$(B)\quad \sigma_{\max}(a) = \sigma_{\max}(b) < \sigma_{\max}(c);$

$(C)\quad \sigma_{\max}(a) < \sigma_{\max}(b) = \sigma_{\max}(c);$

$(D)\quad \sigma_{\max}(a) = \sigma_{\max}(b) = \sigma_{\max}(c)$。

$$\sigma_{\max}(a) = \frac{M_z}{\frac{d^3}{6}} = \frac{6M_z}{d^3}$$

$$\sigma_{\max}(c) = \frac{\frac{M_z}{2}}{\frac{d\left(\frac{d}{2}\right)^2}{6}} \cdot = \frac{12M_z}{d^3}$$

$$\sigma_{\max}(b) = \frac{\frac{M_z}{2}}{\frac{\frac{d}{2}.d^2}{6}} \cdot = \frac{6M_z}{d^3}$$

答案：B

§4.6 梁的合理设计

1．弯曲正应力是控制梁强度的主要因素；

$$\sigma_{\max}=\frac{|M|_{\max}}{W_z}\le[\sigma]$$

2．提高梁强度的措施：

1)采用合理的截面形状，提高弯曲截面系数W_z

2)采用等强度梁或变截面梁

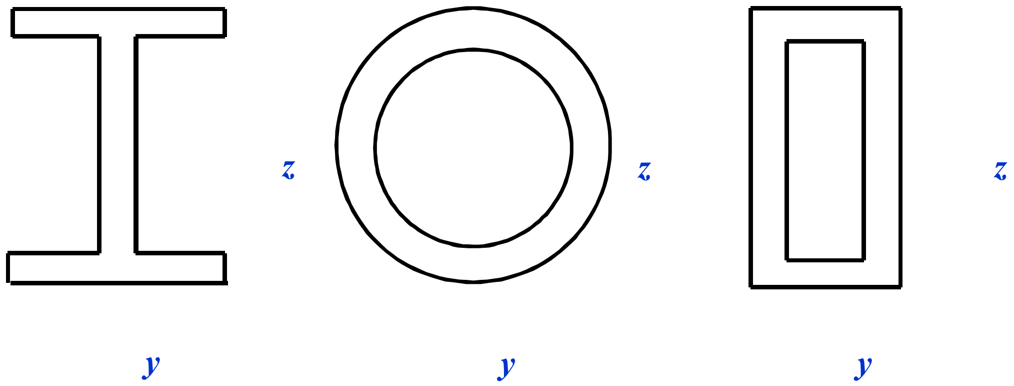
3)改善梁的受力条件，降低$M_{\max}$

一、梁的合理截面形状

1．面积A不变，W_z越大，则截面 形状越合理

1)为提高W_z/A，截面上的材料应尽可能远离中性轴

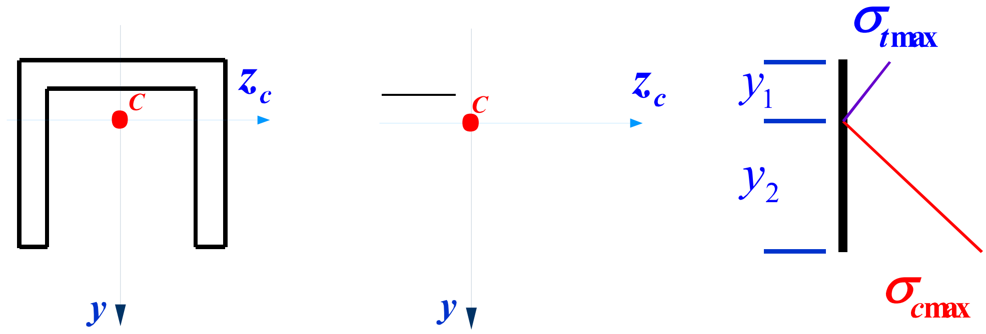
2)优先采用工字形、槽形、箱形和圆环形截面



2．材料特性对截面形状的要求

1)拉压强度相等的材料，采用关于中性轴对称的截面

2)抗拉、压强度不同的材料，采用中性轴偏向受拉侧的截面形状，如T形、槽形等截面

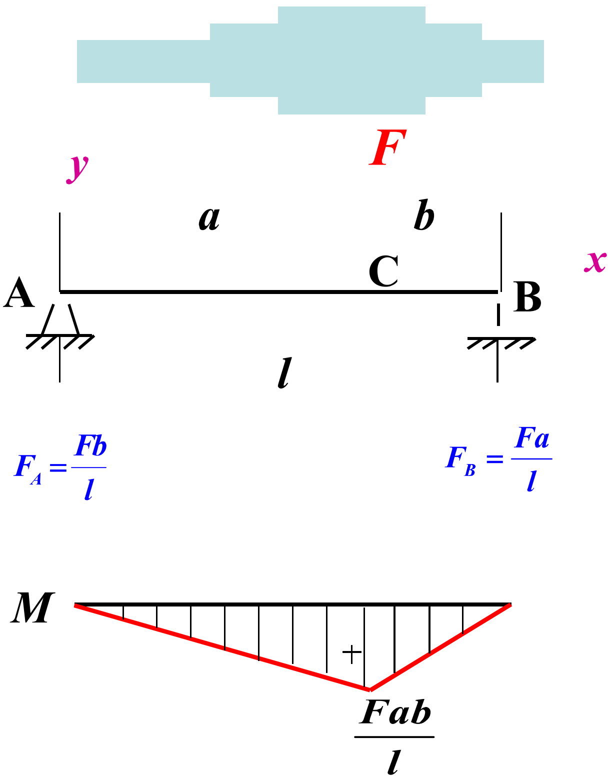


3．同时需考虑弯曲切应力强度

由腹板和翼缘组成的薄壁截面，如型钢截面等，弯曲正应力主要由两端翼缘承担，弯曲切应力主要由中间腹板承担

二、采用等强度梁或变截面梁

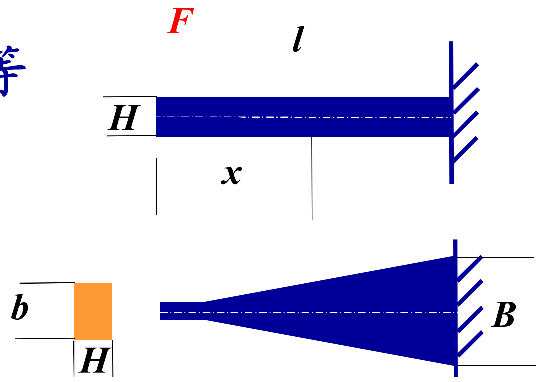
变截面梁：



等强度梁：各横截面最大正应力都相等，并均达到材料的许用应力的变截面梁

1．等强度观点的等高矩形截面悬臂梁的宽度$b(x)$

固定端和x截面最大正应力相等



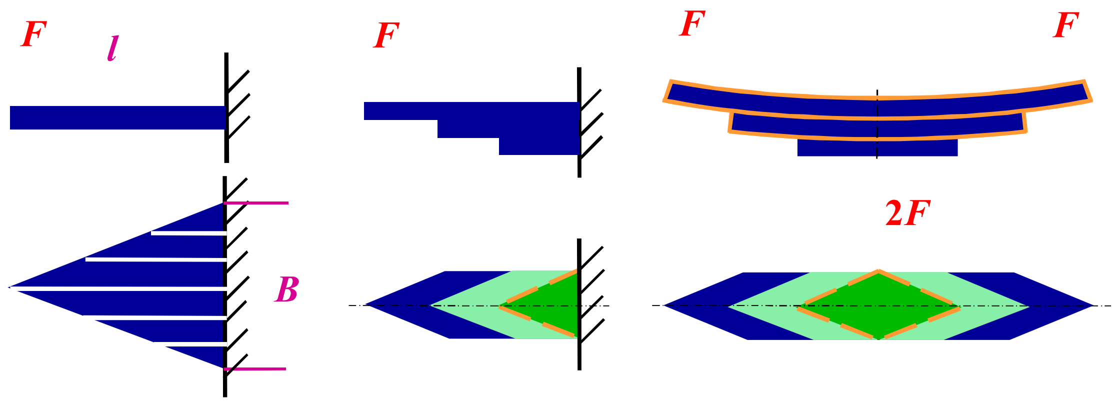
$$\sigma_{\max}=\frac{6Fl}{BH^2}=\frac{6Fx}{b(x)H^2}$$

$$b(x)=B\frac{x}{l}$$

注意：自由端应按切应力强度条件确定截面的最小宽度。

该等强度梁的重量是同样强度等截面梁的一半

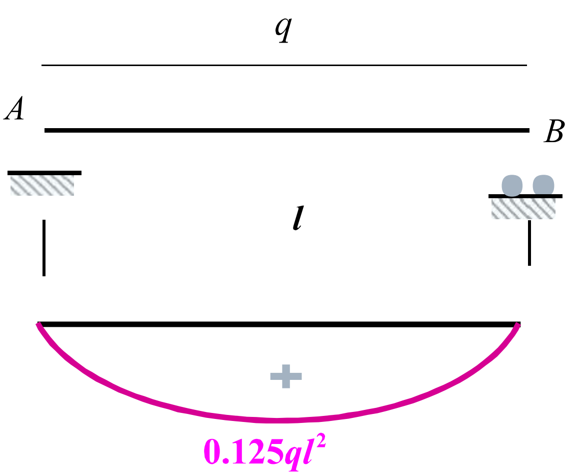
2、叠板弹簧设计思路：

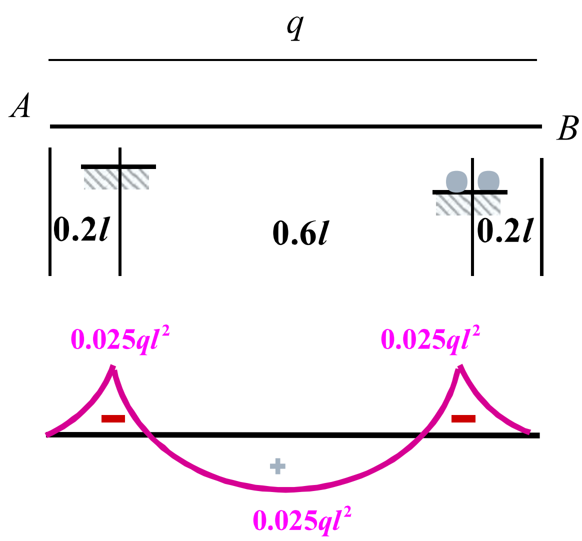


三、合理布置梁的形式和荷载，以降低最大弯矩值

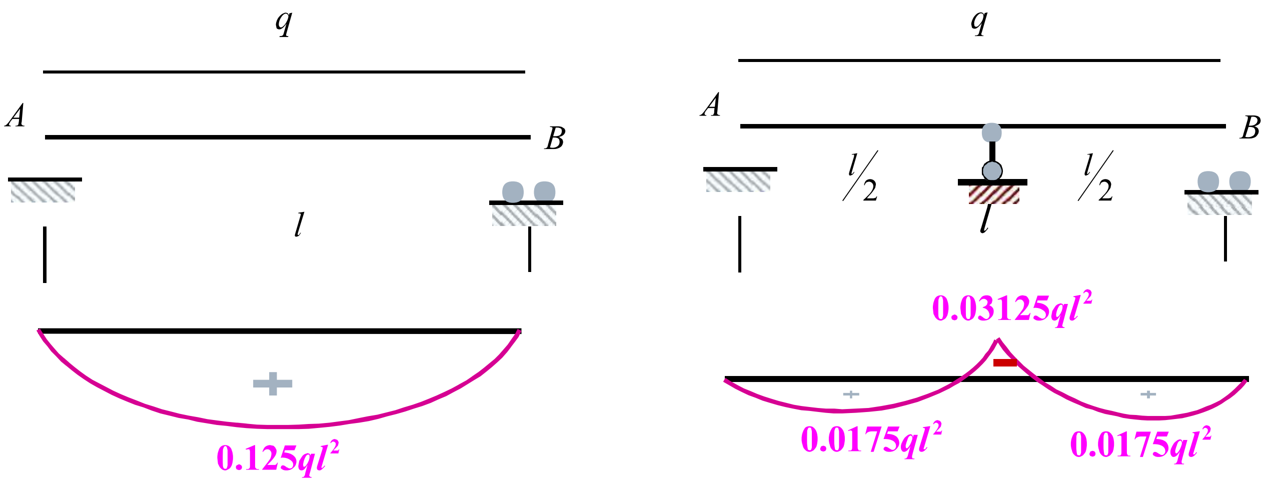
1. 合理布置梁的支座

简支梁变外伸梁 (注意最佳的外伸长度) $M_{max}^{+} = M_{max}^{-}$



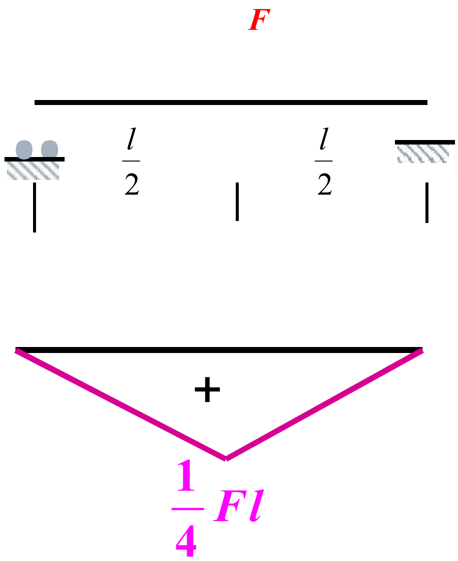


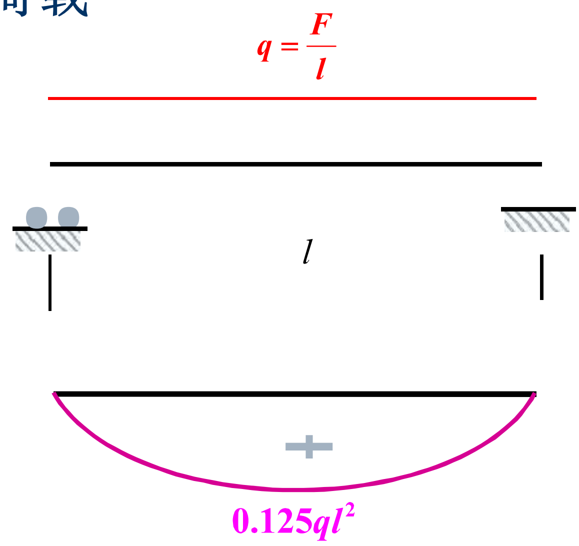
2. 适当增加梁的支座，变为超静定梁



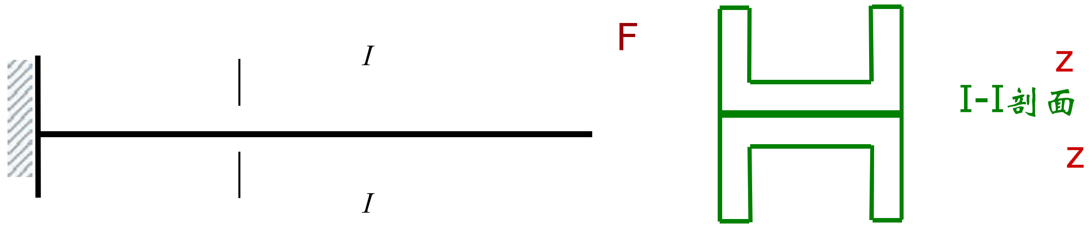
3. 改善荷载的布置情况

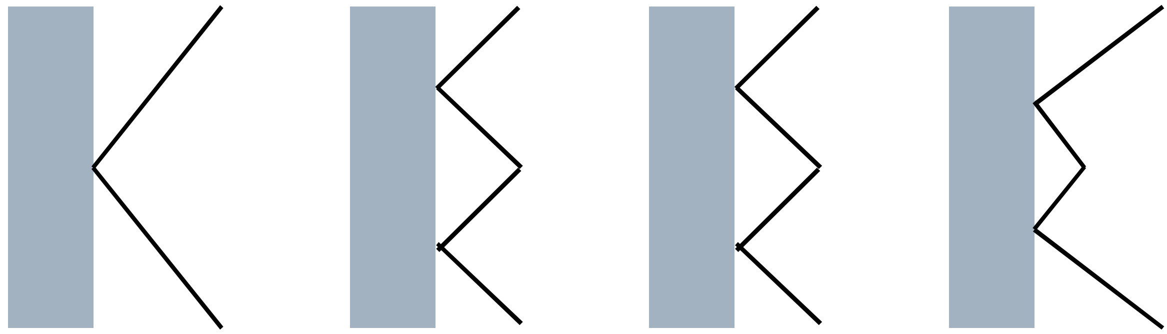
集中力分散，最好为均布荷载





例题 4.36 悬臂梁由两根槽钢背靠背(两者之间未作任何固定连接)叠加起来放置,构成如图示.在载荷作用下,横截面上的正应力分布如图 ___D___ 所示.





(A) (B) (C) (D)

例题 4.37 在图示十字形截面上，剪力为F_s，欲求m--m线上的切应力，则公式中 $\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_Z b}$ ，<u>D</u> .

A、S_z^* 为截面的阴影部分对 z' 轴的静矩，$b=4\delta$ ；

B、S_z^* 为截面的阴影部分对 z' 轴的静矩，$b=\delta$ ；

C、S_z^* 为截面的阴影部分对 z 轴的静矩，$b=4\delta$ ；

D、 为截面的阴影部分对 轴的静矩，$b=\delta$ ；