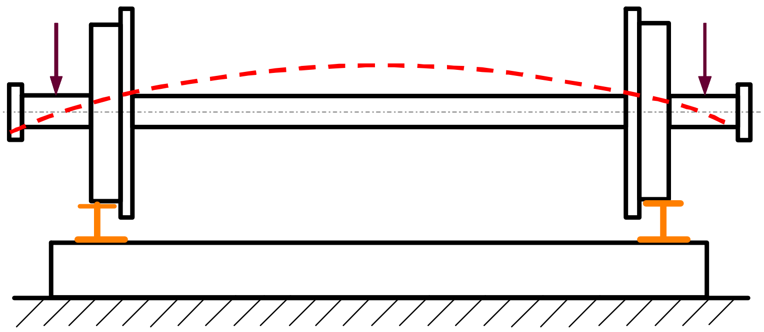
第四章　　弯曲应力

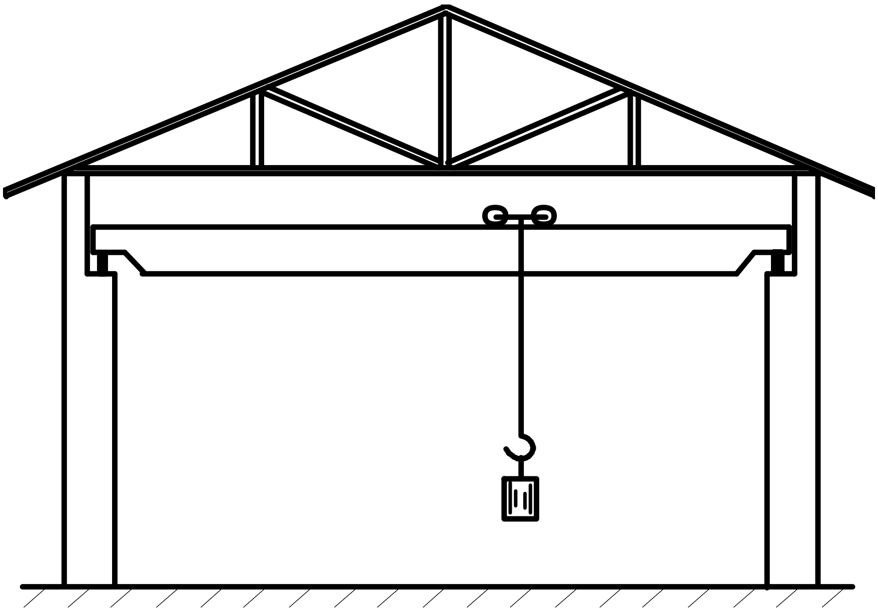
§4-1 对称弯曲的概念及梁的计算简图

一、弯曲的工程实例

1. 火车车厢轮轴



2. 吊车横梁

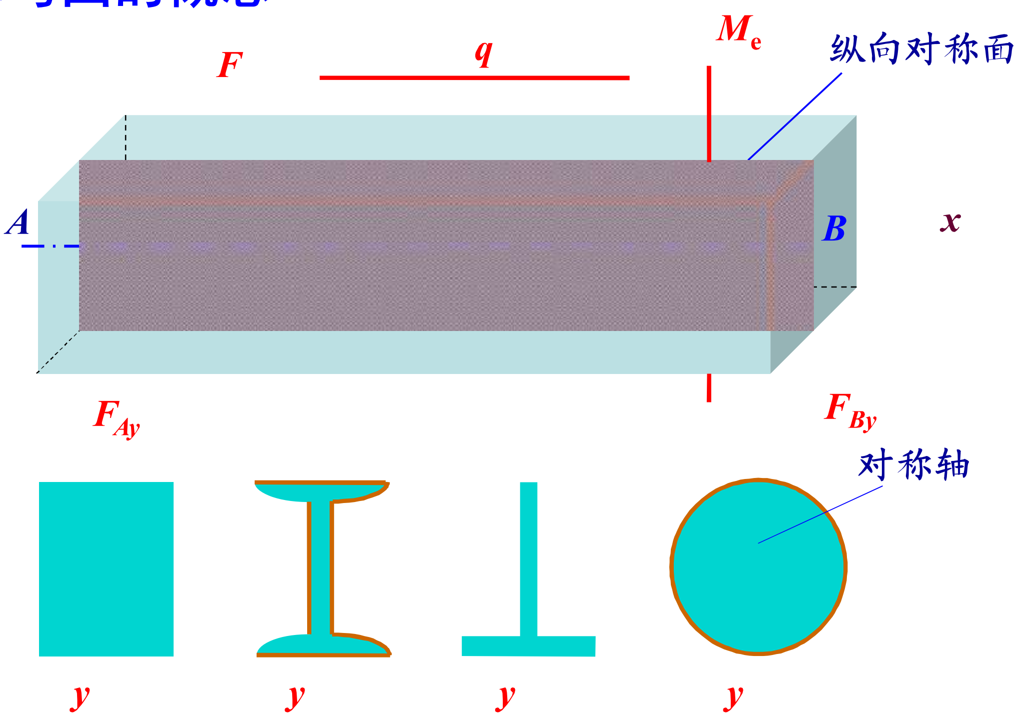


二、1、弯曲的概念

杆件承受垂直于其轴线方向的外力（即横向力）,在其轴线平面内作用有外力偶时，杆的轴线变为曲线.以轴线变弯为主要特征的变形称为弯曲。

以弯曲变形为主的杆件称为梁。

2、对称弯曲的概念



构件几何特征：

横截面具有对称轴，杆件具有纵向对称面的等截面直杆

受力特征：

横向外力（或外力合力）或外力偶均作用在杆的纵向对称面内

变形特征：

杆件轴线变形后为纵向对称面内的一条平面曲线

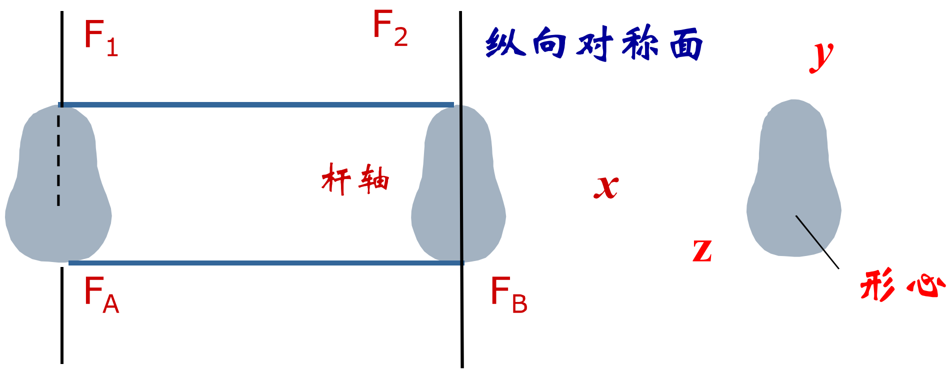
对称弯曲：

构件的几何形状、材料性能和外力作用均对称于杆件的纵向对称面

非对称弯曲：

构件不具有纵向对称面，或虽有纵向对称面但外力不作用在纵向对称面时的弯曲变形

对称弯曲的力学模型



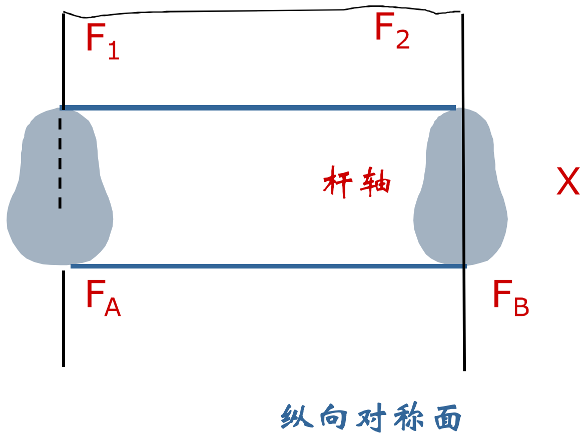
构件几何特征：构件为具有纵对称面的等截面直杆

受力特征：横向外力（或外力合力）或外力偶均作用在杆的纵向对称面内

变形特征：杆件轴线变形后为纵向对称面内的平面曲线

对称弯曲：

构件的几何形状、材料性能和外力作用均对称于杆件的纵对称面



平面弯曲：

梁变形后的轴线所在平面与外力所在平面相重合

对称弯曲必定是平面弯曲，而平面弯曲不一定是对称弯曲。

非对称弯曲：

构件不具有纵向对称面，或虽有纵向对称面但外力不作用在纵对称面时的弯曲变形

三、梁的计算简图

梁的支承条件与荷载情况一般都比较复杂，为了便于分析计算，应进行必要的简化，抽象出计算简图。

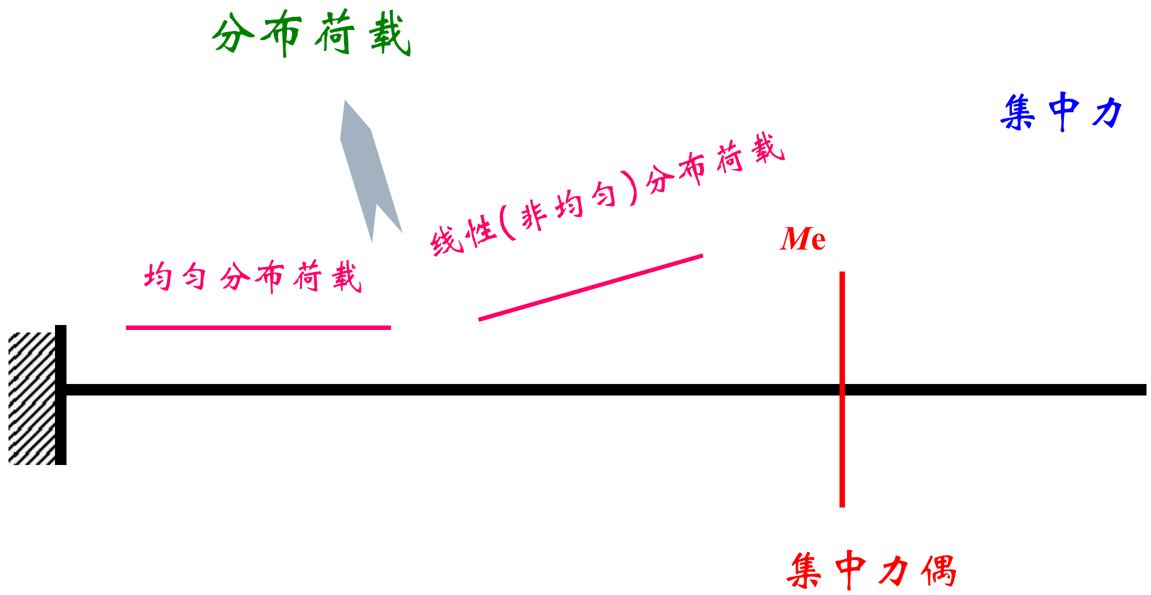
1. 构件本身的简化

通常用梁的轴线来代替梁。

2. 荷载简化

作用于梁上的荷载（包括支座约束力）可简化为三种类型：集中力、集中力偶和分布荷载。

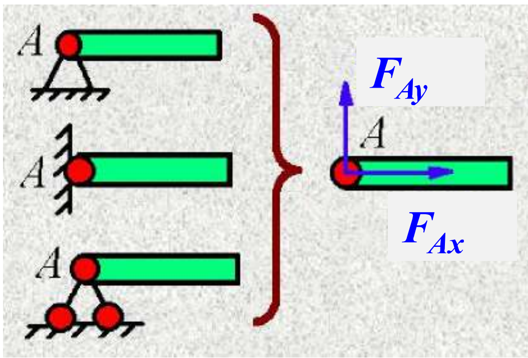
作用在梁上的荷载形式



3. 支座简化

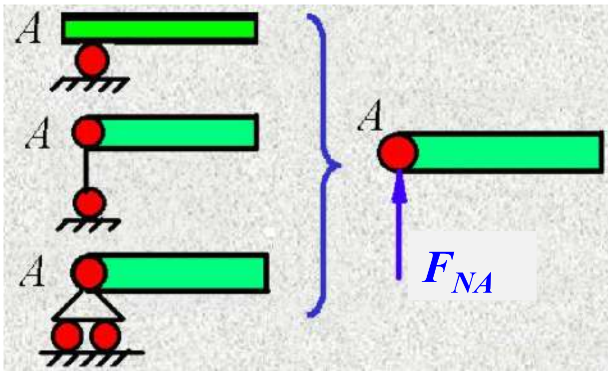
①固定铰支座

2个约束力，1个自由度。



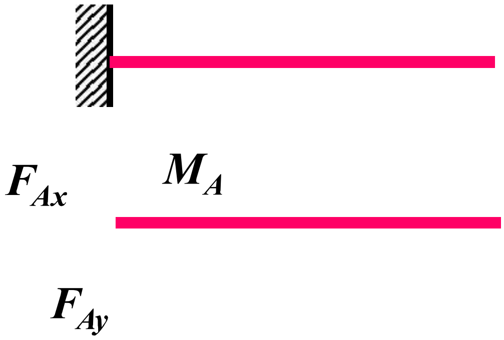
②可动铰支座

1个约束力，2个自由度。

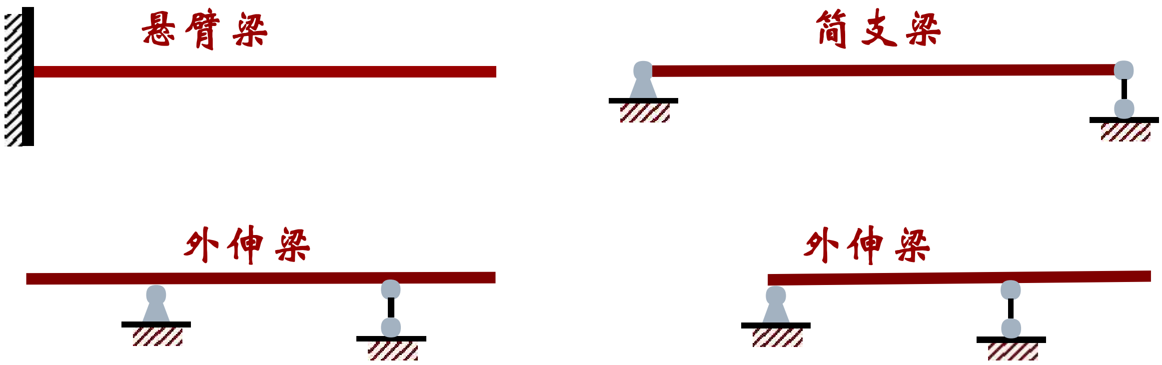


③固定端

3个约束，0个自由度。



4、梁按支承方法的分类

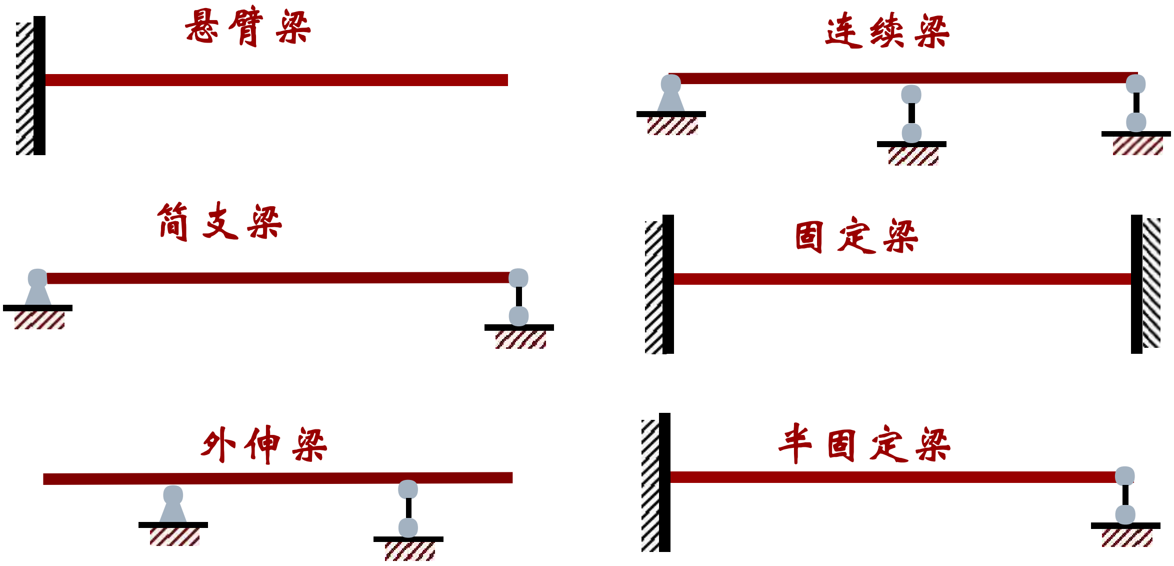


跨： 梁在两支座之间的部分称为跨。其长度则称为**跨长**。

5、静定梁与超静定梁

静定梁：支座约束力可以由静力平衡方程求解的梁

超静定梁：支座约束力仅由静力平衡方程不能求解的梁

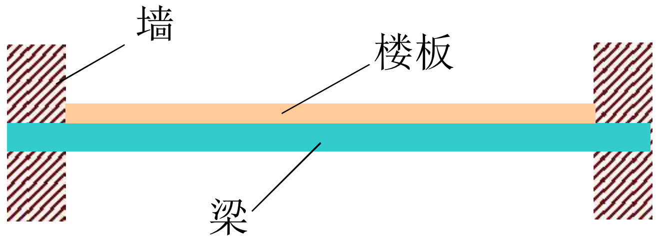


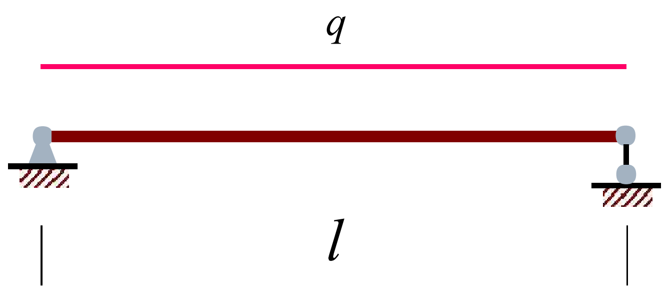
静定梁　　　　超静定梁

5、静定梁与超静定梁

静定梁 支座约束力可以由静力平衡方程求解的梁

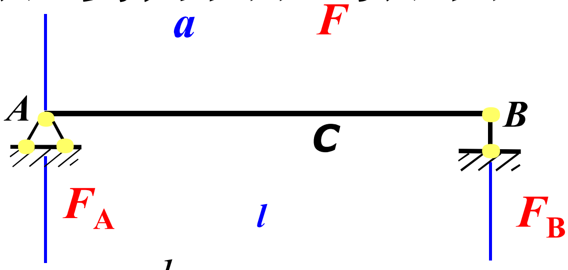
超静定梁 支座约束力仅由静力平衡方程不能求解的梁



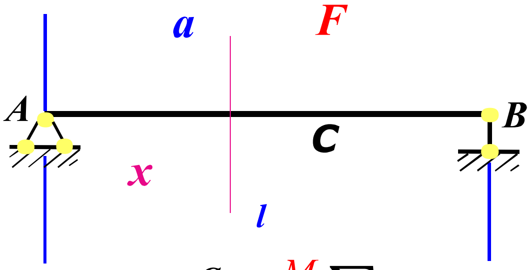


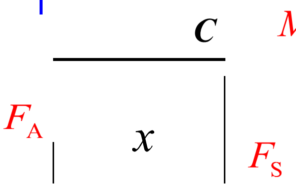
§4-2 梁的剪力和弯矩.剪力图和弯矩图

一、梁的剪力和弯矩



$$F_A=\frac{l-a}{l}F \qquad F_B=\frac{a}{l}F$$



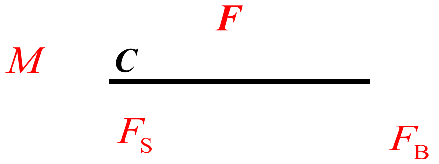


$$\sum F_y=0: F_A-F_S=0 \Rightarrow F_S=F_A$$

$$\sum M_C=0: M-F_A x=0 \Rightarrow M=F_A x$$

剪力

弯矩



$$\sum F_y=0: F_S+F_B-F=0 \Rightarrow F_S=F-F_B=F_A$$

$$\sum M_C=0: -M+F_B(l-x)-F(a-x)=0 \Rightarrow M=F_A x$$

①剪力：平行于横截面的内力

符号规定：使微段左上右下错动的剪力为正,反之为负.

或剪力对分离体内一点取矩,顺时针为正,逆时针为负.

剪力为正　　剪力为负

②弯矩：截面上的内力偶矩

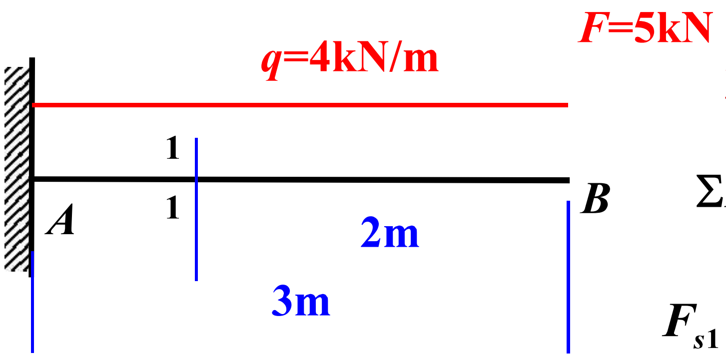
符号规定：弯矩使微段凸向下变形，即下侧纤维受拉，上侧纤维受压时为正，反之为负。

弯矩为正　　弯矩为负

求剪力、弯矩的最基本方法为截面法。截面法求内力的步骤为：切、取、代、平。

建议：用截面法求内力时，F_S和M均按正值方向假设，这样求出的剪力为正号即表明该截面上的剪力为正的剪力，如为负号则表明为负的剪力。对于弯矩正负号也作同样判断。

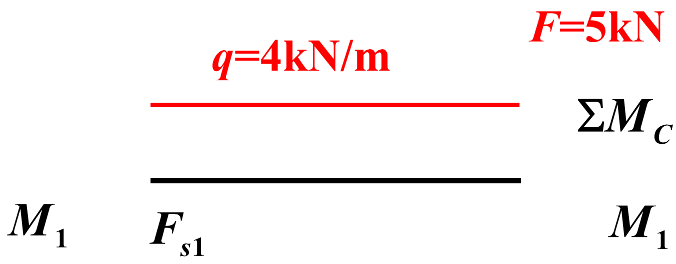
例 题　求下图所示悬臂梁**1-1**截面的剪力和弯矩。



解：用截面法

$$\Sigma F_y = 0, F_{s1} - q\times 2 - F = 0$$

$$F_{s1} = 2q + F = 2\times 4 + 5 = 13\,\text{kN}$$

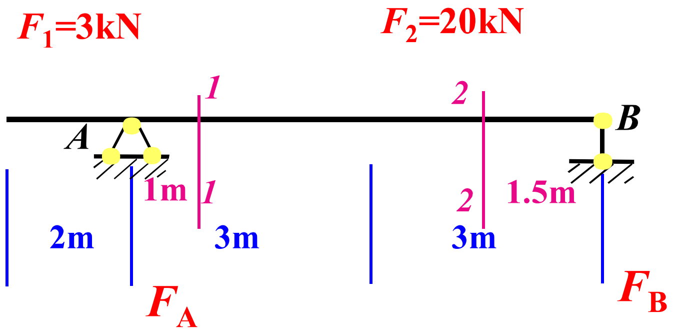


$$\Sigma M_C = 0, -M_1 - q\times 2\times 1 - F\times 2 = 0$$

$$M_1 = -q\times 2\times 1 - F\times 2$$

$$= -4\times 2\times 1 - 5\times 2 = -18\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

例 题 求下图所示外伸梁**1-1**、**2-2**截面上的内力。



解:(1)求支座约束力

$$\Sigma M_B = 0, -F_A \times 6 + F_1 \times 8 + F_2 \times 3 = 0$$

$$\text{即} -F_A \times 6 + 3 \times 8 + 20 \times 3 = 0$$

$$F_A = 14\,\mathbf{kN}$$

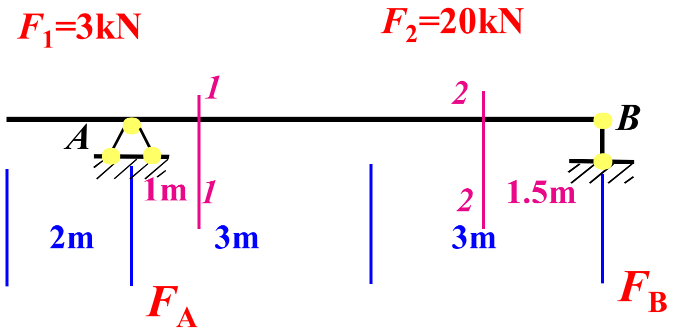
$$\Sigma M_A = 0, F_B \times 6 + F_1 \times 2 - F_2 \times 3 = 0$$

$$\text{即} F_B \times 6 + 3 \times 2 - 20 \times 3 = 0$$

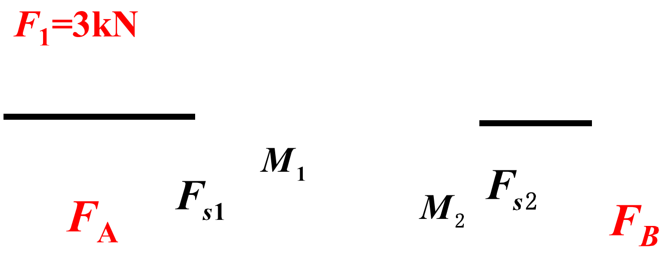
$$F_B = 9\,\mathbf{kN}$$

$$\text{校核：} \Sigma F_y = 0, F_A + F_B = F_1 + F_2$$

例 题　求下图所示外伸梁**1-1**、**2-2**截面上的内力。



$$F_A = 14\,\mathbf{kN} \qquad F_B = 9\,\mathbf{kN}$$



（2）求1-1截面内力

$$\Sigma F_y = 0, F_A - F_1 - F_{s1} = 0$$

$$F_{s1} = F_A - F_1 = 14 - 3 = 11\,\mathbf{kN}$$

$$\Sigma M_{C1} = 0, M_1 + F_1 \times 3 - F_A \times 1 = 0$$

$$M_1 = F_A \times 1 - F_1 \times 3$$

$$= 14 - 3 \times 3 = 5\,\mathbf{kN \cdot m}$$

（3）求2-2截面内力

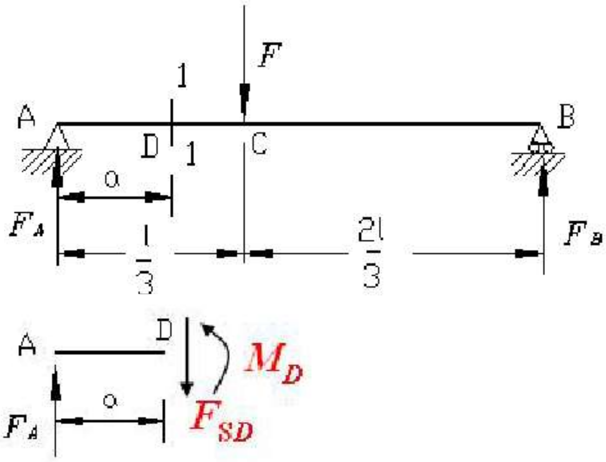
$$\Sigma F_y = 0, F_{s2} + F_B = 0$$

$$F_{s2} = -F_B = -9\,\mathbf{kN}$$

$$\Sigma M_{C2} = 0, -M_2 + F_B \times 1.5 = 0$$

$$M_2 = F_B \times 1.5 = 9 \times 1.5 = 13.5\,\mathbf{kN \cdot m}$$

例 题　如图所示的简支梁，试求1—1及C左右截面上的内力。



解：1. 求支座约束力

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_y=0, F_A+F_B-F=0\\&\sum M_A(\vec{F})=0, F_B\cdot l-F\cdot\frac{l}{3}=0\end{aligned}\right\}$$

得 $F_A=\frac{2}{3}F, F_B=\frac{1}{3}F$

2. 求截面1—1上的内力

$$\Sigma F_y=0, F_A-F_{SD}=0, F_{SD}=F_A=\frac{2}{3}F$$

$$\Sigma M_D=0, M_D-F_A a=0, M_D=F_A\cdot a=\frac{2}{3}Fa$$

同理，对于$C_{左}$截面：

$$F_{SC左}=F_A=\frac{2}{3}F$$

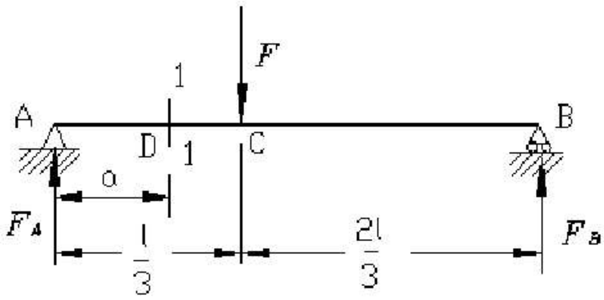
$$M_{C左}=\frac{2}{3}F\cdot\frac{l}{3}=\frac{2}{9}Fl$$

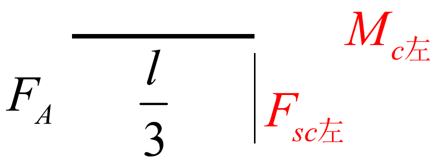
对于$C_{右}$截面：

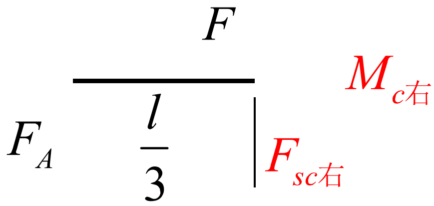
$$F_{SC右}=F_A-F=-\frac{F}{3}$$

$$M_{C右}=F_A\cdot\frac{l}{3}=\frac{2}{9}Fl$$

$$F_{SC左}\neq F_{SC右},M_{C左}=M_{C右}$$







在集中力作用处，左右截面上剪力发生突变，突变值为该集中力的大小；而弯矩保持不变。

负号表示假设方向与实际方向相反。

截开后取左边为研究对象：

- 向上的外力引起正剪力，向下的外力引起负剪力；
- 向上的外力引起正弯矩，向下的外力引起负弯矩；
- 顺时针力偶引起正弯矩，逆时针力偶引起负弯矩。

截开后取右边为研究对象：

- 向上的外力引起负剪力，向下的外力引起正剪力；
- 向上的外力引起正弯矩，向下的外力引起负弯矩；
- 顺时针力偶引起负弯矩，逆时针力偶引起正弯矩。

根据符号规定, 可以得到下述两个规律:

1、横截面上的剪力在数值上等于截面左侧（或右侧）梁段上横向力的代数和。在左侧梁段上向上（或右侧梁段上向下）的外力引起正剪力，反之，引起负剪力。

简记为：左上右下外力引起正剪力。

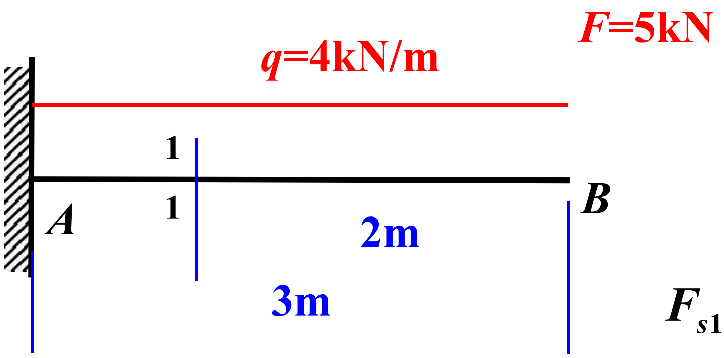
2、横截面上的弯矩在数值上等于截面左侧（或右侧）梁段上所有外力（包括外力偶）对该截面形心的矩的代数和。对于左侧梁段，外力对截面形心的力矩为顺时针转向的引起正弯矩；而截面右侧梁段则与其相反。

直观判断：无论左侧或右侧，向上的外力均引起正弯矩，向下的外力均引起负弯矩。左侧顺时针力偶引起正弯矩，右侧逆时针力偶引起正弯矩。

简记为：左顺右逆外力矩引起正弯矩。

利用上述结论求剪力、弯矩的方法称为一步写出法

例 题　求下图所示悬臂梁**1-1**截面的剪力和弯矩。



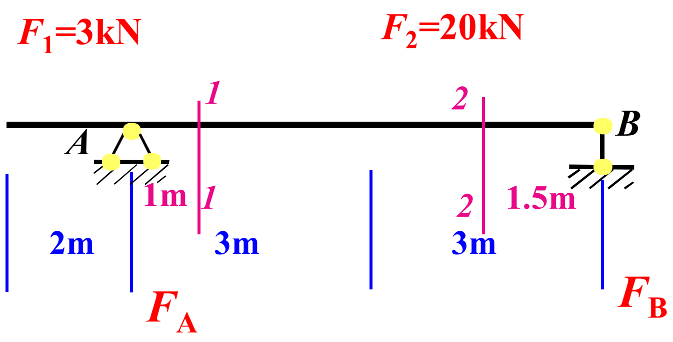
解：用一步写出法

$$F_{s1} = 2q + F = 2 \times 4 + 5 = 13\,\mathrm{kN}$$

$$M_1 = -q \times 2 \times 1 - F \times 2$$

$$= -4 \times 2 \times 1 - 5 \times 2 = -18\,\mathrm{kN \cdot m}$$

例 题 求下图所示外伸梁**1-1**、**2-2**截面上的内力。



$F_A=14\,\mathbf{kN}$ $F_B=9\,\mathbf{kN}$

解：用一步写出法

1-1截面内力

$$F_{s1}=F_A-F_1=14-3=11\,\mathbf{kN}$$

$$M_1=F_A\times1-F_1\times3$$
$$=14-3\times3=5\,\mathbf{kN\cdot m}$$

2-2截面内力

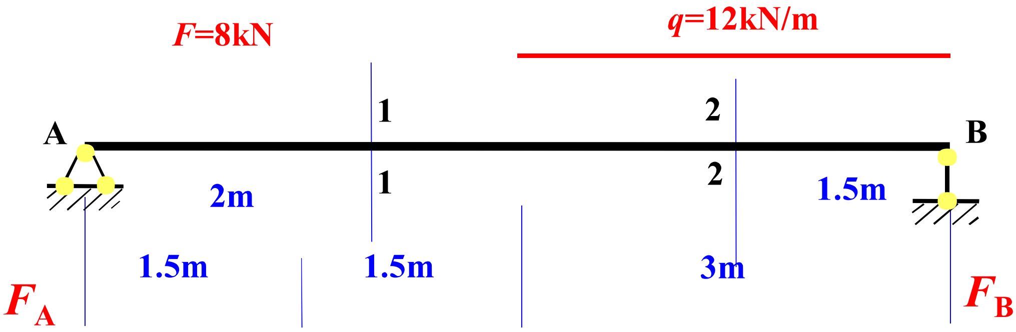
$$F_{s2}=-F_B=-9\,\mathbf{kN} \qquad M_2=F_B\times1.5=9\times1.5=13.5\,\mathbf{kN\cdot m}$$

或

$$F_{s2}=F_A-F_1-F_2=14-23=-9\,\mathbf{kN}$$

$$M_2=F_A\times4.5-3\times6.5-20\times1.5=13.5\,\mathbf{kN\cdot m}$$

例 题　求下图所示简支梁**1-1**与**2-2**截面的剪力和弯矩。



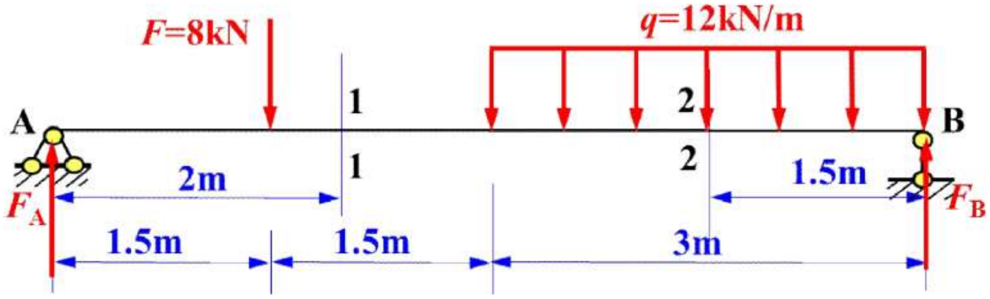
解： 1、求支座约束力

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_B \times 6 - F \times 1.5 - q \times 3 \times 4.5 = 0 \;\Rightarrow\; F_B = 29\text{kN}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -F_A \times 6 + F \times 4.5 + q \times 3 \times 1.5 = 0 \;\Rightarrow\; F_A = 15\text{kN}$$

校核

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; F_A + F_B = F + q \times 3$$



$F_A = 15\,\text{kN}$

$F_B = 29\,\text{kN}$

2、计算1-1截面的内力

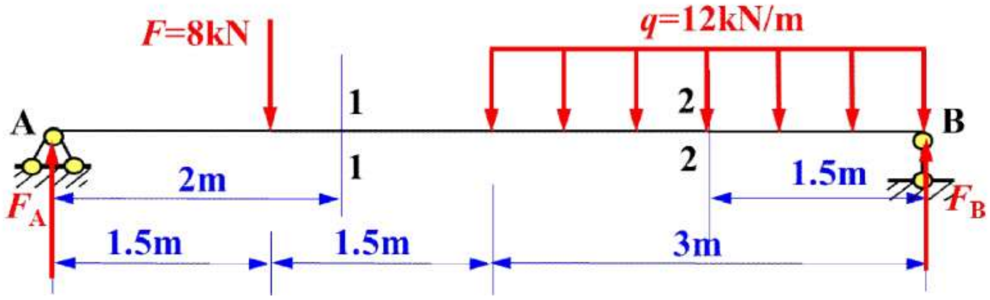
$$F_{s1} = F_A - F = 15 - 8 = 7\,\text{kN}$$

$$M_1 = F_A \times 2 - F \times 0.5 = 15 \times 2 - 8 \times 0.5 = 26\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

或

$$F_{s1} = 3q - F_B = 3 \times 12 - 29 = 7\,\text{kN}$$

$$M_1 = F_B \times 4 - 3q \times 2.5 = 29 \times 4 - 3 \times 12 \times 2.5 = 26\,\text{kN}\cdot\text{m}$$



$$F_A = 15\,\text{kN}$$
$$F_B = 29\,\text{kN}$$

3、计算2-2截面的内力

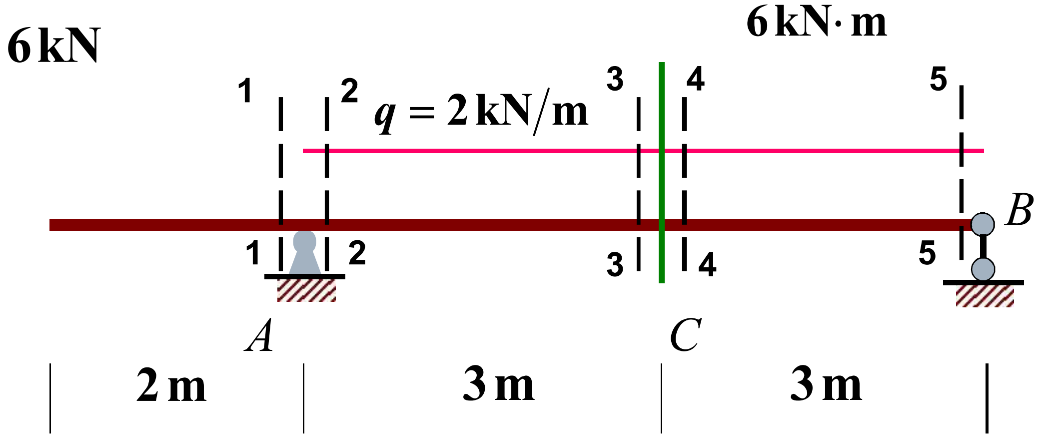
$$F_{s2} = 1.5q - F_B = 1.5 \times 12 - 29 = -11\,\text{kN}$$

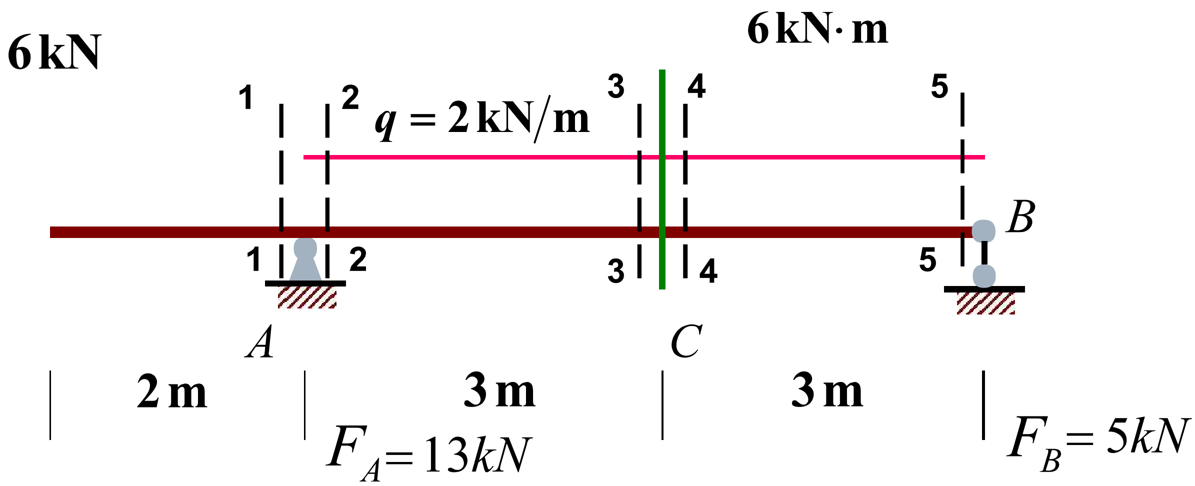
$$M_2 = F_B \times 1.5 - q \times 1.5 \times 0.75$$
$$= 29 \times 1.5 - 12 \times 1.5 \times 0.75 = 30\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

或 $$F_{s2} = F_A - F - q \times 1.5 = 15 - 8 - 12 \times 1.5 = -11\,\text{kN}$$

$$M_2 = F_A \times 4.5 - F \times 3 - q \times 1.5 \times 0.75$$
$$= 15 \times 4.5 - 8 \times 3 - 12 \times 1.5 \times 0.75 = 30\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

例 题 求图示外伸梁中的1—1、2—2、3—3、4—4和5—5各截面上的内力



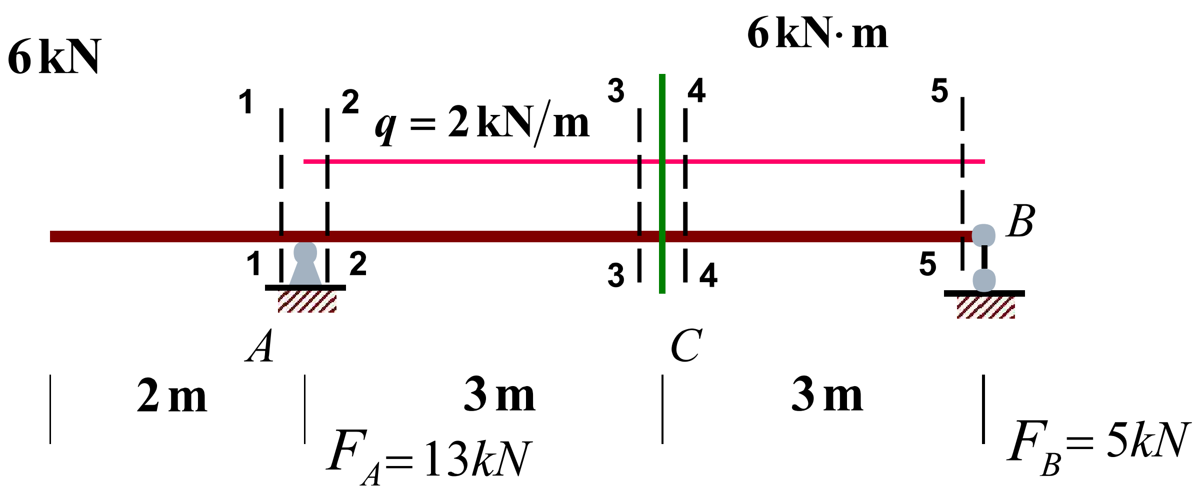


解： 1、求支反力

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 6\times 2 + F_B \times 6 - 2\times 6\times 3 - 6 = 0 \ \Rightarrow F_B = 5\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow F_A + F_B - 6 - 2\times 6 = 0 \ \Rightarrow F_A = 13\text{kN}$$

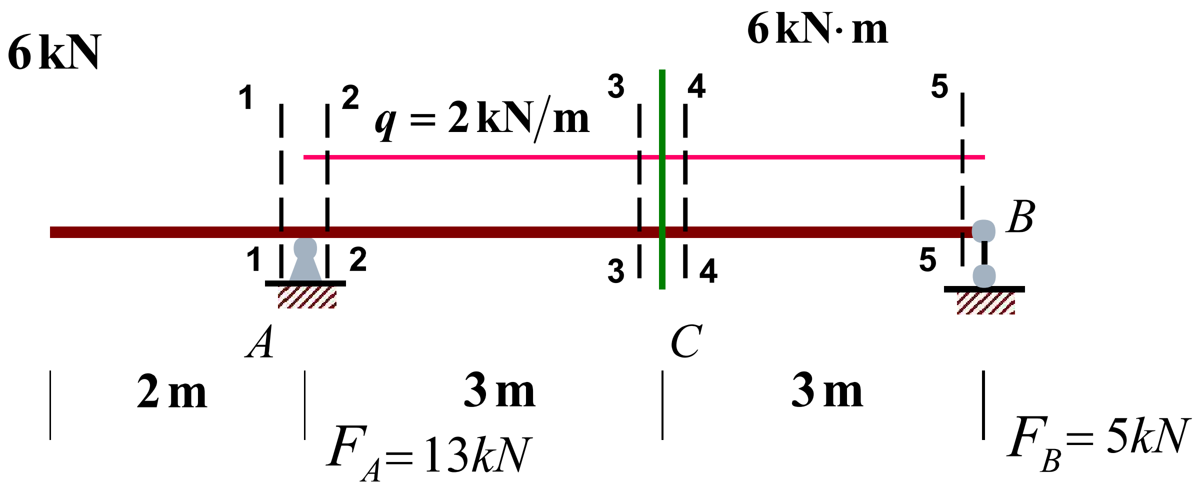
(也可由$\sum M_B = 0$求F_A或校核F_A的正误)



2、计算各截面的内力

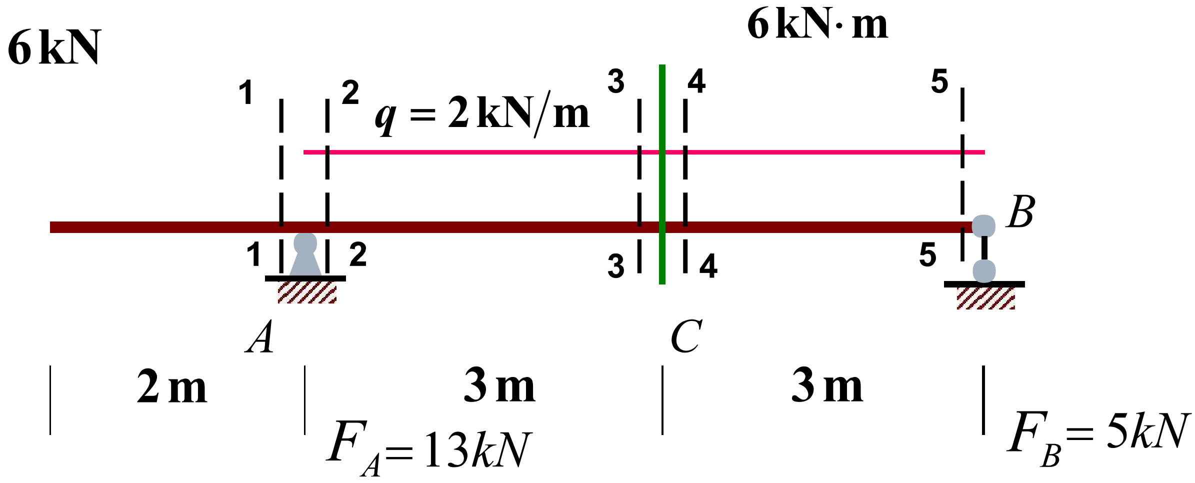
$$F_{S1} = -6\text{kN} \qquad M_1 = -6 \times 2 = -12\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{S2} = -6 + F_A = 7\text{kN} \qquad M_2 = -6 \times 2 = -12\text{kN} \cdot \text{m}$$



$$F_{S3} = -6 + 13 - 2 \times 3 = 1\text{kN}$$

$$M_3 = -6 \times 5 + 13 \times 3 - 2 \times 3 \times \frac{3}{2} = 0\text{kN} \cdot \text{m}$$



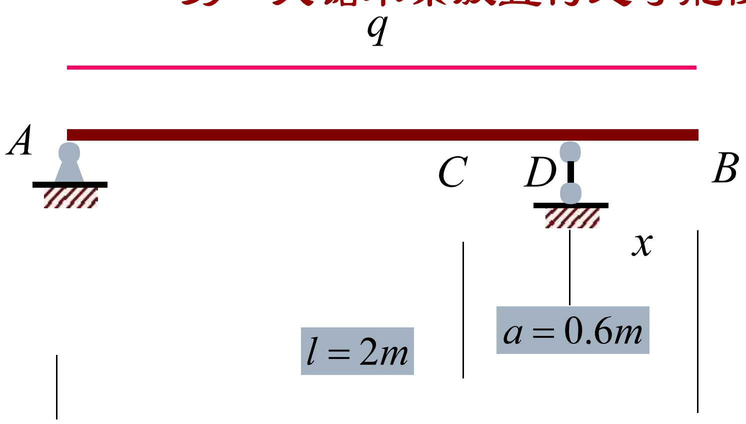
$$F_{S4} = -F_B + q \times 3 = -5 + 2 \times 3 = 1\text{kN}$$

$$M_4 = F_B \times 3 - q \times 3 \times \frac{3}{2} = 5 \times 3 - 2 \times 3 \times \frac{3}{2} = 6\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{S5} = -F_B = -5\text{kN} \qquad M_5 = 0\text{kN} \cdot \text{m}$$

例题 4.5

一长为2m的均质木料，欲锯下0.6m长的一段。为使在锯开处两端面的开裂最小，应使锯口处的弯矩为零，木料放在两只锯木架上，一只锯木架放置在木料的一端，试问另一只锯木架放置何处才能使木料锯口处的弯矩为零。



$$\sum M_D = 0 \qquad F_A = \frac{2q(1-x)}{2-x}$$

$$M_C = F_A(l-a) - q\frac{(l-a)^2}{2} = 0$$

$$\frac{2q(1-x)}{2-x}\times 1.4 - q\times\frac{1.4^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.462m$$

二、剪力方程和弯矩方程　剪力图和弯矩图

剪力方程： 剪力随横截面变化的函数表达式

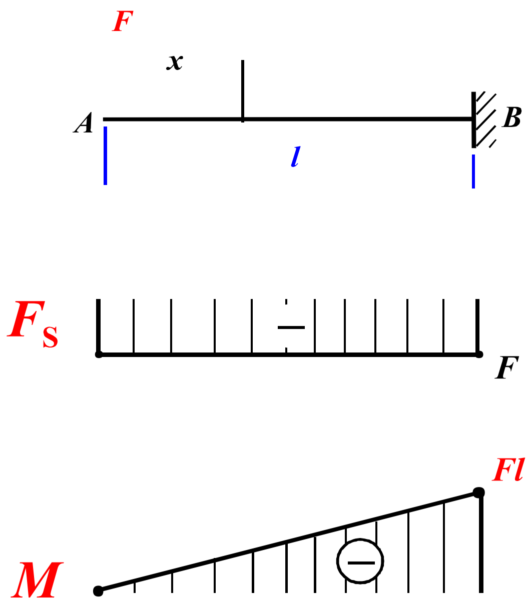
弯矩方程： 弯矩随横截面变化的函数表达式

$$\begin{cases} F_{\mathrm{S}} = F_{\mathrm{S}}(x) \\ M = M(x) \end{cases}$$

剪力、弯矩图： 剪力、弯矩方程的函数图形。横轴与轴线平行，表示截面的位置；纵轴表示内力（剪力、弯矩）的大小。

注意： 土建中弯矩图画在受拉一侧（即正值画在x轴下方，负值画在x轴上方）。

例 题　作图示悬臂梁**AB**的剪力图和弯矩图。



解：

剪力、弯矩方程：

$$\begin{cases} F_S(x) = -F(0 < x < l) \\ M(x) = -Fx(0 \le x < l) \end{cases}$$

$$|F_S|_{max} = F$$

$$|M|_{max} = Fl$$

4.2 **例 题** 简支梁受均布荷载作用。试写出剪力和弯矩方程，并画出剪力图和弯矩图。

解：1．求约束力

由对称性 $F_{Ay} = F_{By} = ql/2$

2．写出剪力和弯矩方程

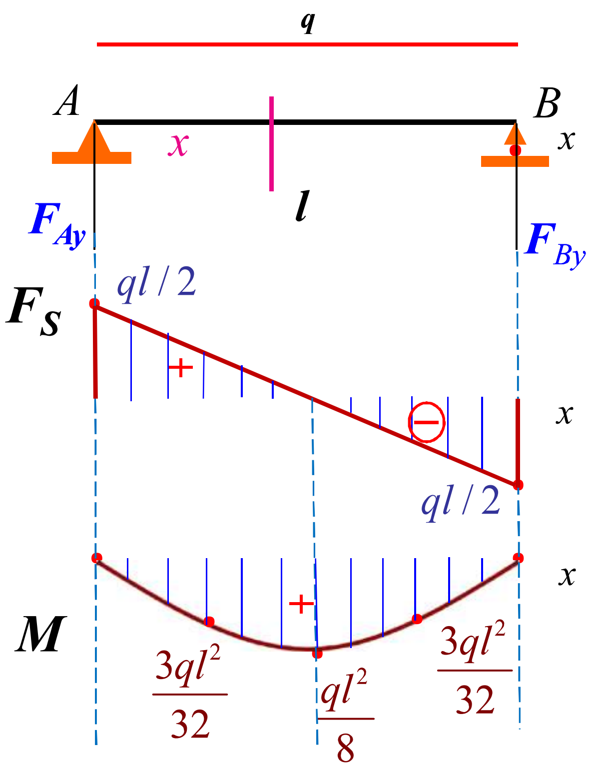
$$F_S(x) = \frac{ql}{2} - qx \quad (0 < x < l)$$

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \quad (0 \le x \le l)$$

求弯矩的极值

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{ql}{2} - qx = F_s(x) \overset{令}{=} 0$$

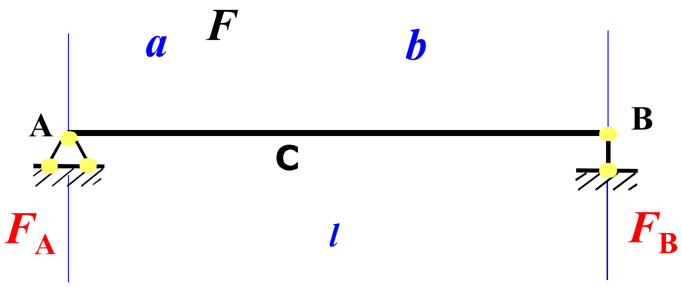
得：$x = \dfrac{l}{2}$　故 $M_{极值}\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \dfrac{ql^2}{8}$



4.3

例 题

试画出如图示简支梁*AB*的剪力图和弯矩图。



解：1. 求支反力

$$\sum M_A = 0, F_B l - Fa = 0$$

$$F_B = \frac{Fa}{l}$$

$$\sum M_B = 0, -F_A l + Fb = 0$$

$$F_A = \frac{Fb}{l}$$

$$F_A=\frac{Fb}{l} \qquad F_B=\frac{Fa}{l}$$

2. 列剪力、弯矩方程

***AC*段:**

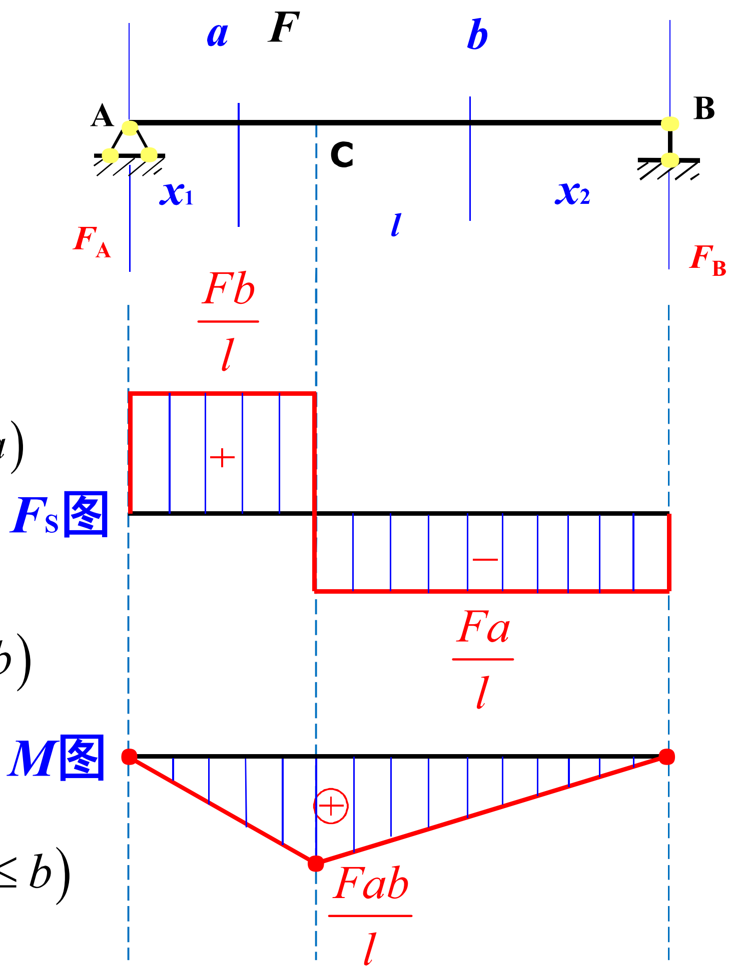
$$F_S(x_1)=F_A=\frac{Fb}{l},\left(0<x_1<a\right)$$

$$M(x_1)=F_A\cdot x_1=\frac{Fb}{l}x_1,\left(0\le x_1\le a\right)$$

***BC*段:**

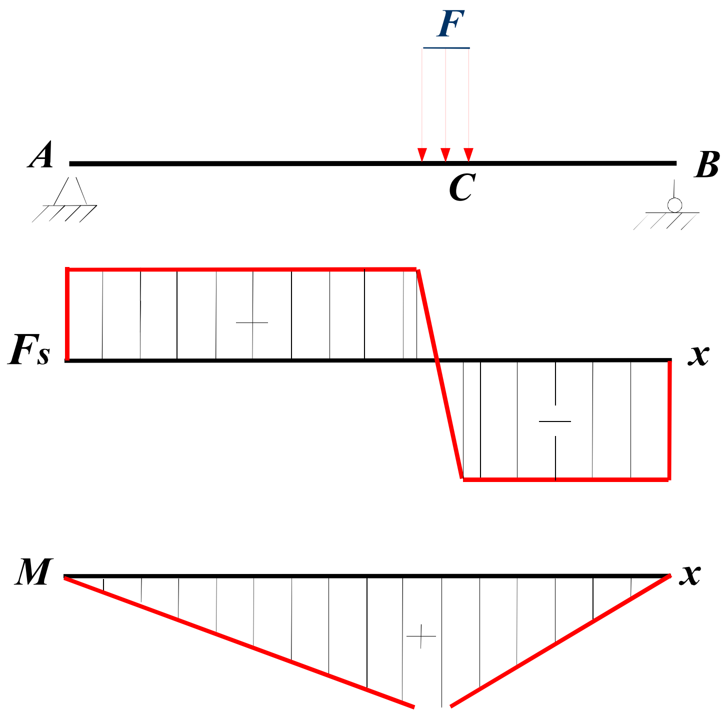
$$F_S(x_2)=-F_B=-\frac{Fa}{l}\left(0<x_2<b\right)$$

$$M(x_2)=F_B x_2=\frac{Fa}{l}x_2\left(0\le x_2\le b\right)$$



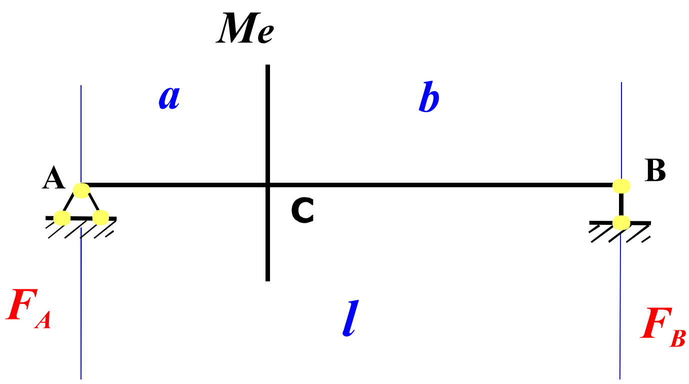
结论：

在集中力作用处剪力图有突变，突变值等于集中力的大小；从左往右画，突变的方向、大小与力相同。弯矩图出现尖角，尖角的方向与集中力的箭头方向一致。


F
A
C
B
Fs
x
M
x

4.4 例题

试画出如图示简支梁AB的剪力图和弯矩图。



解：1. 求支反力

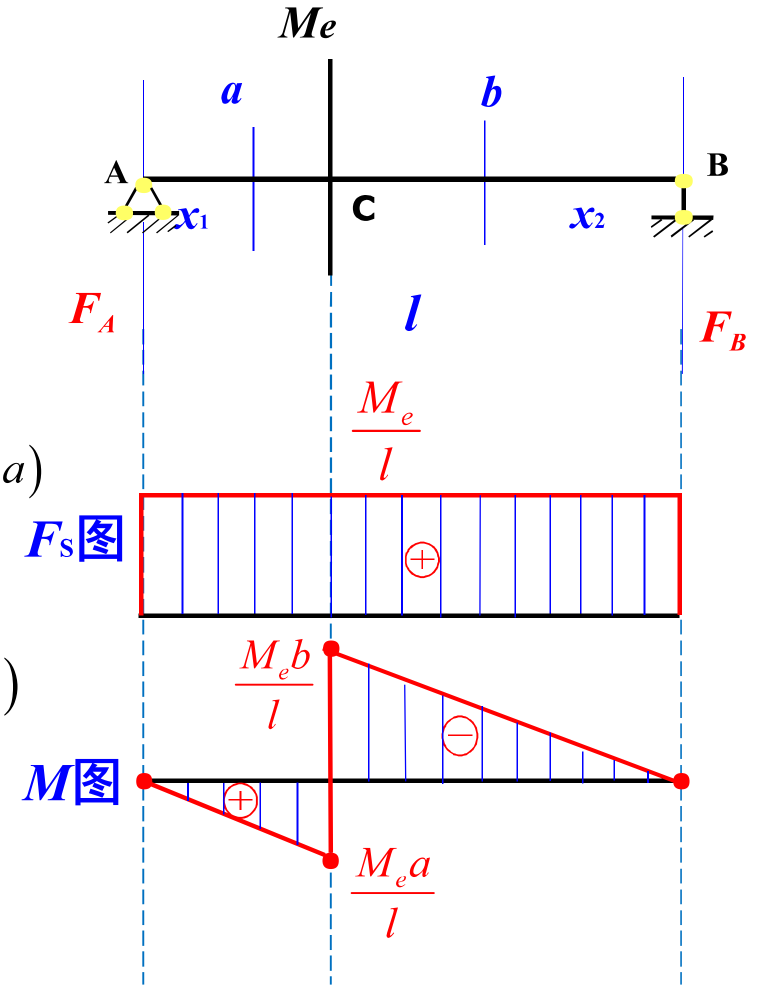
$$\sum M_A = 0, -F_B l + M_e = 0$$

$$F_B = \frac{M_e}{l}$$

$$\sum F_y = 0, F_A - F_B = 0$$

$$F_A = F_B = \frac{M_e}{l}$$

2. 列剪力、弯矩方程



***AC*段：**

$$F_S(x_1) = F_A = \frac{M_e}{l}, (0 < x_1 \le a)$$

$$M(x_1) = F_A \cdot x_1 = \frac{M_e}{l} x_1, (0 \le x_1 < a)$$

***BC*段：**

$$F_S(x_2) = F_B = \frac{M_e}{l} (0 < x_2 \le b)$$

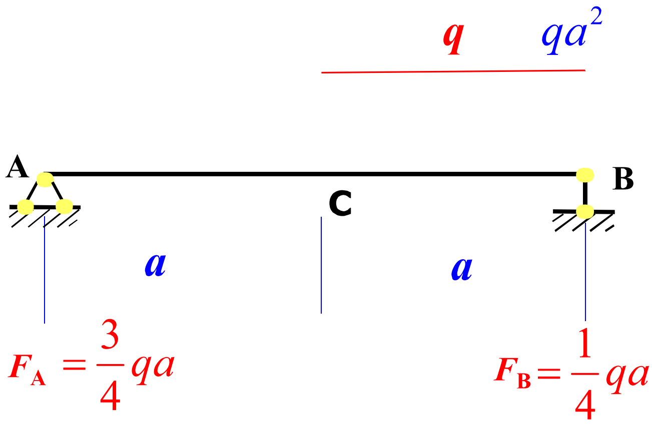
$$M(x_2) = -F_B x_2 = -\frac{M_e}{l} x_2$$

$$(0 \le x_2 < b)$$

结论：

在集中力偶作用处剪力图无变化。弯矩图有突变，突变值等于集中力偶的力偶矩；从左往右画，顺时针的集中力偶引起正突变，逆时针的集中力偶引起负突变。

例 题 试写出图示简支梁的剪力、弯矩方程，并作剪力、弯矩图。



解：1. 求支反力

$$\sum M_A=0$$

$$F_B\times 2a-qa\times\frac{3}{2}a+qa^2=0$$

$$F_B=\frac{1}{4}qa$$

$$\sum F_y=0, F_A+F_B-qa=0$$

$$F_A=\frac{3}{4}qa$$

2. 列剪力、弯矩方程

AC段：

$$F_S(x_1)=F_A=\frac{3}{4}qa,\left(0<x_1\le a\right)$$

$$M(x_1)=F_A\cdot x_1=\frac{3}{4}qax_1,\left(0\le x_1\le a\right)$$

BC段：

$$F_S(x_2)=qx_2-F_B=qx_2-\frac{1}{4}qa$$

$$\left(0<x_2\le a\right)$$

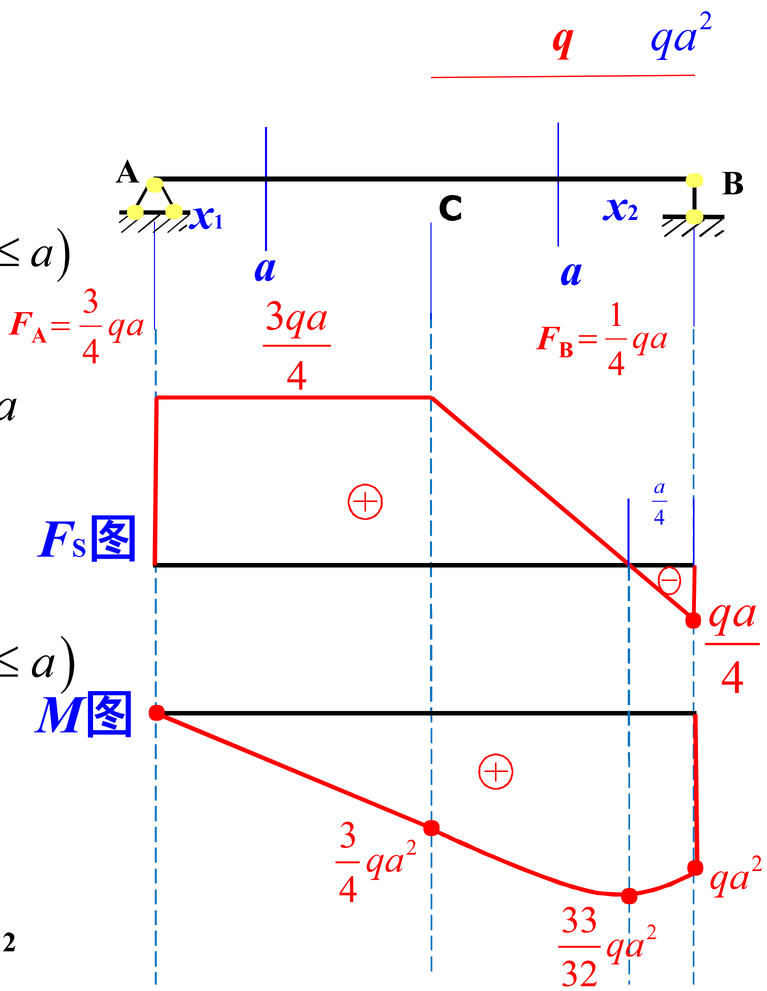
$$M(x_2)=F_Bx_2+qa^2-qx_2\frac{x_2}{2}$$

$$=\frac{qa}{4}x_2+qa^2-\frac{q}{2}x_2^2\left(0<x_2\le a\right)$$

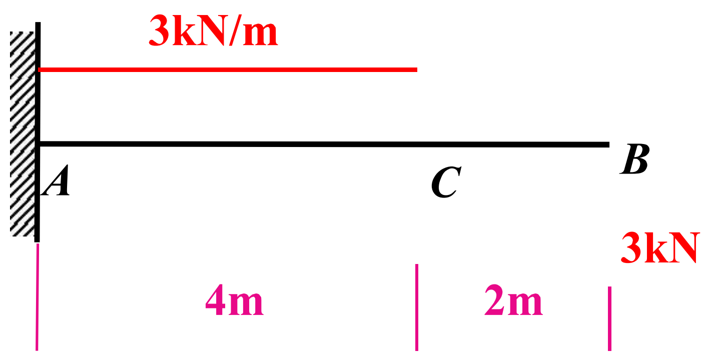
求弯矩的极值

$$\frac{\mathrm{d}M(x_2)}{\mathrm{d}x_2}=\frac{qa}{4}-qx_2\overset{令}{=\!=}0$$

则 $x_2=\frac{a}{4}$， $M_{极值}=\frac{33}{32}qa^2$



例 题 试写出图示悬臂梁的剪力、弯矩方程，并作剪力、弯矩图。



解：列剪力、弯矩方程

BC段：

$$F_s(x_1) = -3 \quad (0 < x_1 \le 2\,\mathrm{m})$$

$$M(x_1) = 3x_1 \quad (0 \le x_1 \le 2\,\mathrm{m})$$

AC段：

$$F_s(x_2) = 3(x_2 - 2) - 3$$

$$(2 \le x_2 < 6\,\mathrm{m})$$

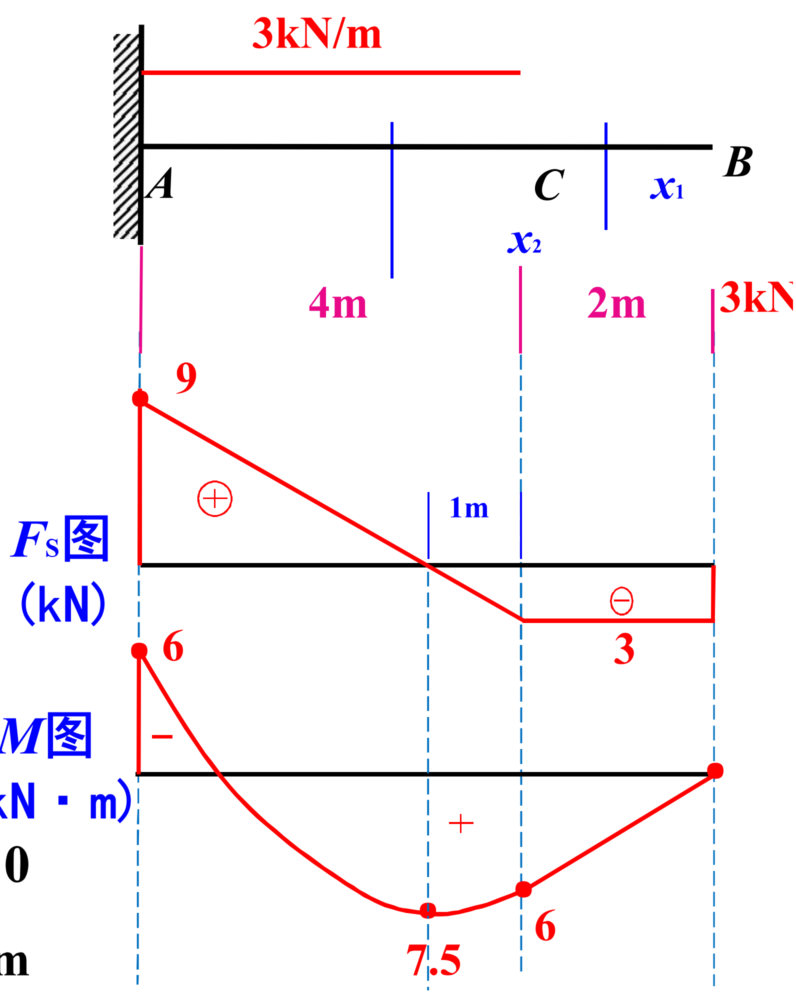
$$M(x_2) = 3x_2 - \frac{3}{2}(x_2 - 2)^2$$

$$(2 \le x_2 < 6\,\mathrm{m})$$

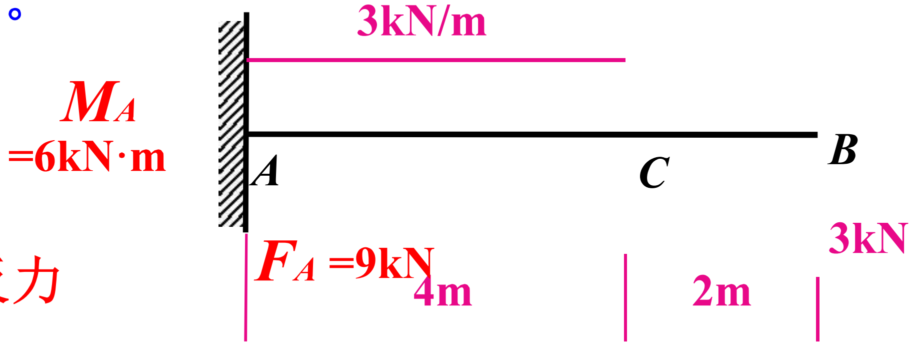
求弯矩的极值

$$\frac{\mathrm{d}\,M(x_2)}{\mathrm{d}\,x_2} = 3 - 3(x_2 - 2) \overset{令}{=\!=} 0$$

则 $x_2 = 3$，$M_{极值} = 7.5\,\mathrm{kN\cdot m}$



例 题 试写出图示悬臂梁的剪力、弯矩方程，并作剪力、弯矩图。



解：1、求支反力

$$\Sigma F_y = 0, F_A + 3 - 3\times 4 = 0$$

$$F_A = 9\,\text{kN}$$

$$\Sigma M_A = 0, M_A + 3\times 6 - 3\times 4\times 2 = 0$$

$$M_A = 8\times 3 - 6\times 3 = 6\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

2、列剪力、弯矩方程

BC段：

$$F_s(x_1) = -3 \quad (0 < x_1 \le 2\,\mathrm{m})$$

$$M(x_1) = 3x_1 \quad (0 \le x_1 \le 2\,\mathrm{m})$$

AC段：

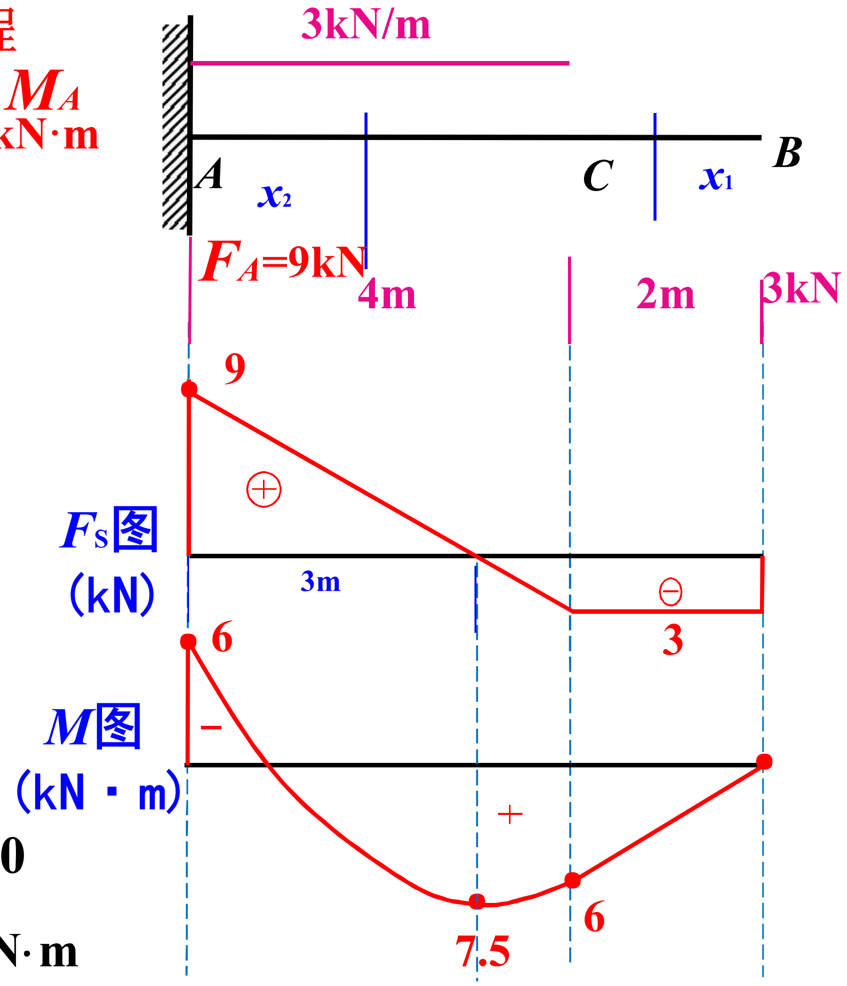
$$F_s(x_2) = 9 - 3x_2 \quad (0 < x_2 \le 4\,\mathrm{m})$$

$$M(x_2) = 9x_2 - \frac{3}{2}x_2^{\,2} - 6 \quad (0 < x_2 \le 4\,\mathrm{m})$$

求弯矩的极值

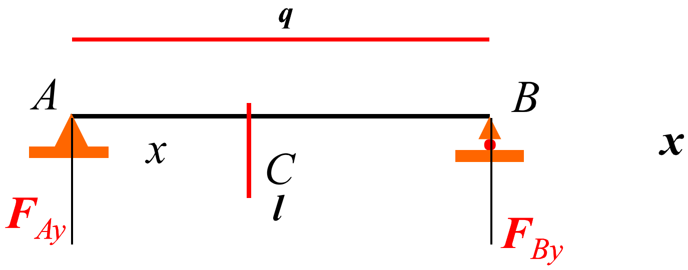
$$\frac{\mathrm{d}M(x_2)}{\mathrm{d}x_2} = 9 - 3x_2 \overset{令}{=\!=} 0$$

则 $x_2 = 3$，$M_{极值} = 7.5\,\mathrm{kN\cdot m}$



三、弯矩、剪力和荷载集度间的微分关系及其应用

引例



由对称性 $F_{Ay} = F_{By} = ql/2$

$$F_s(x) = \frac{ql}{2} - qx \qquad M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

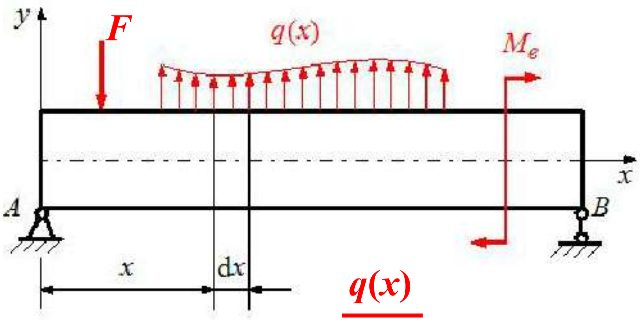
得 $$\frac{\mathrm{d}\,M(x)}{\mathrm{d}\,x} = \frac{ql}{2} - qx = F_s(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,F_s(x)}{\mathrm{d}\,x} = -q$$ 负号表示q的方向向下

$$\frac{\mathrm{d}^2\,M(x)}{\mathrm{d}\,x^2} = -q$$

证明：

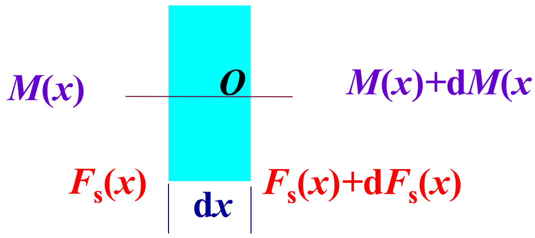
$$q = q(x) \qquad q\uparrow 为 + \qquad q\downarrow 为 -$$



$$\sum F_y = 0$$

$$F_s(x) + q(x)\mathrm{d}x - \left[F_s(x) + \mathrm{d}F_s(x)\right] = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}F_s(x)}{\mathrm{d}x} = q(x)$$



$$\sum M_O = 0$$

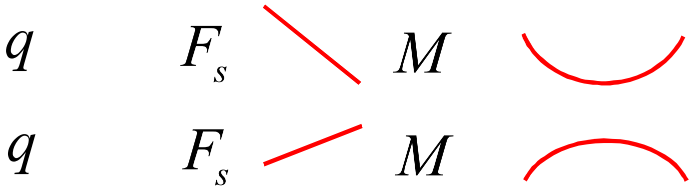
$$M(x) + F_s(x)\mathrm{d}x + q(x)\mathrm{d}x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2} - \left[M(x) + \mathrm{d}M(x)\right] = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = F_s(x) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 M(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}F_s(x)}{\mathrm{d}x} = q(x)$$

1、规律

❖在梁的某一段上若无荷载作用，剪力图为一水平线，弯矩图为一斜直线。特殊地，若剪力为零，则弯矩图为一水平线。

❖在梁的某一段上作用均布荷载，剪力图为一斜直线，弯矩图为一抛物线。



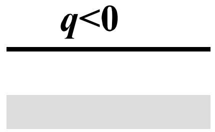
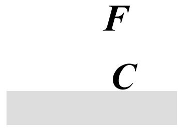
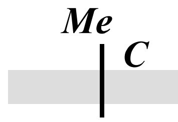
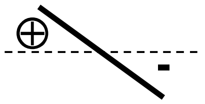
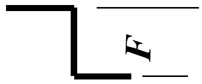
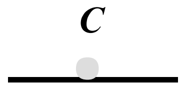
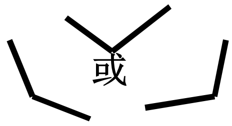
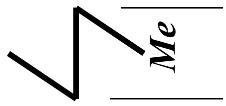
❖$F_S=0$处弯矩M取得极值。

❖集中力作用处,剪力图发生突变，突变值等于集中力的大小;弯矩图出现尖角，尖角的方向与集中力箭头方向一致。

❖集中力偶作用处，剪力图无变化，弯矩图发生突变，突变值为该集中力偶的力偶矩。

❖在简支梁的铰支端和悬臂梁的自由端，若无集中力偶作用，则弯矩为零。

2、各种荷载下剪力图与弯矩图的特征

一段梁上的外力情况	向下的均布荷载 	无荷载	集中力 	集中力偶 
剪力图的特征	向右下倾斜的直线 	水平直线 	在*C*处有突变 	在*C*处无变化 
弯矩图的特征	下凸的二次抛物线 	一般斜直线 	在*C*处有尖角 	在*C*处有突变 
最大弯矩所在截面的可能位置	在F_S=0的截面		在剪力突变的截面	在紧靠*C*的某一侧截面

3、边界条件和突变条件

（1）边界条件

a 梁端只有集中力时　　F_s图的端点值==此集中力值

M图的端点值==0

b 梁端只有集中力偶时　　M图的端点值==此集中力偶值

F_s图的端点值==0

c 梁端既有集中力　　F_s图的端点值==此集中力值

又有集中力偶时　　M图的端点值==此集中力偶值

3、用简易方法作剪力、弯矩图的步骤

（1）求支座约束力（必须校核）；

（2）分段：根据外力情况将梁分段，分段点为：集中力作用处、集中力偶作用处、分布力的起点和终点、支座；根据各段荷载情况确定剪力、弯矩图的形状；

（3）定点：用一步写出法求出各控制截面的内力值；

（4）联线。

（5）利用突变关系和积分关系校核。

例题 作图示梁的剪力、弯矩图。

解： AB段作用有向下均布荷载，F_s图为斜直线

$$F_{sB左}=-3\,\text{kN}$$

$$F_{sA右}=-3+2\times4=5\,\text{kN}$$

M图为向下凸的二次抛物线

$$M_{A右}=3\times4-2\times4\times2=-4\text{kN}\cdot\text{m}$$

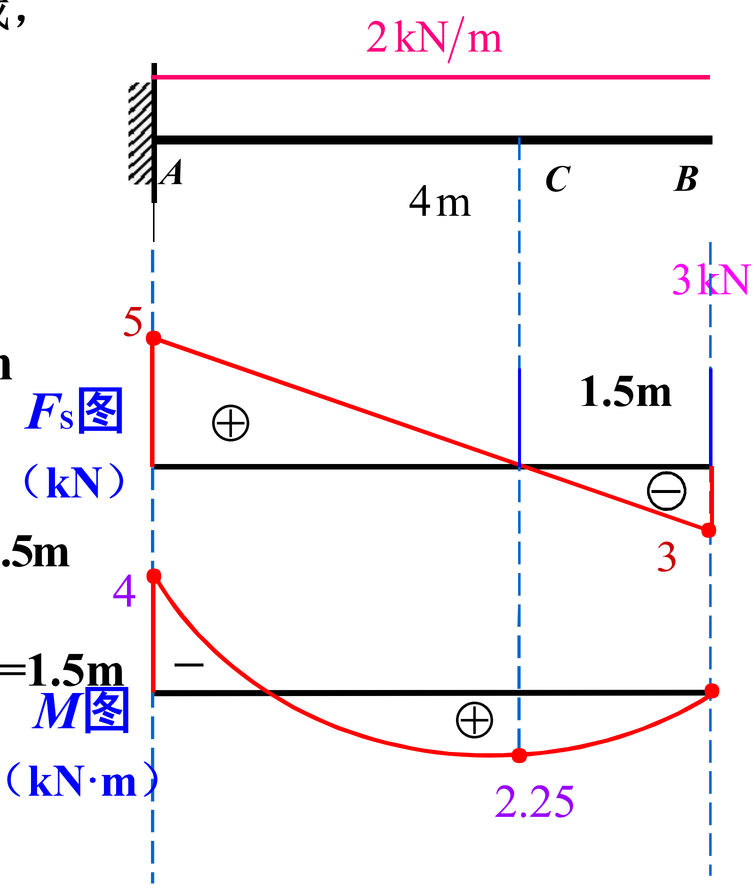
$$M_B=0$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{AB-BC}{BC}=\frac{5}{3}\Rightarrow BC=1.5\text{m}$$

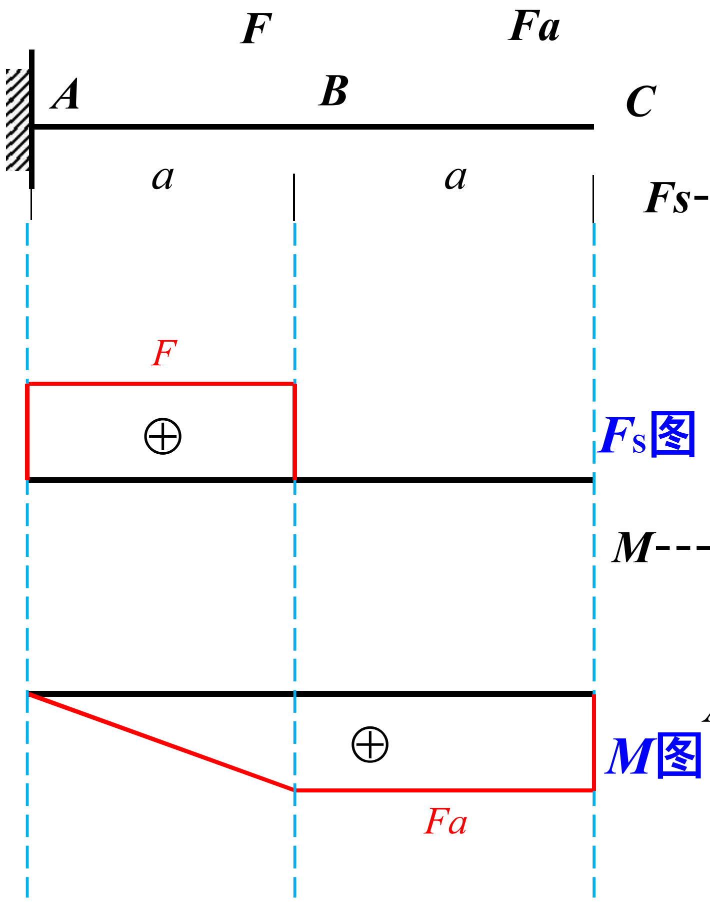
或 $F_{sC}=2\times BC-3=0\Rightarrow BC=1.5\text{m}$

$$M_C=3\times1.5-2\times1.5\times\frac{1.5}{2}$$

$$=2.25\text{kN}\cdot\text{m}$$



例题 作图示梁的剪力、弯矩图。



取自由端一侧：

Fs---*BC*段：无荷载----水平直线

$$F_{sBC}=0$$

*AB*段：无荷载----水平直线

$$F_{sAB}=F$$

M---*BC*段：F_s=0，故*M*图为水平线

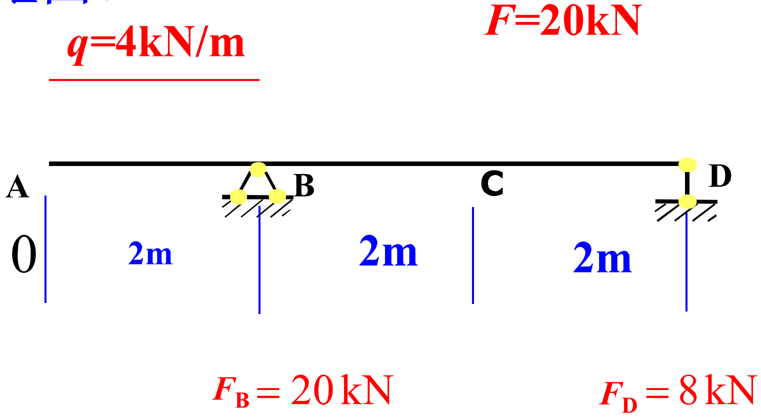
$$M_{BC}=Fa$$

*AB*段：无荷载----斜直线

$$M_B=Fa$$

$$M_{A右}=Fa-Fa=0$$

例 题　试作剪力、弯矩图。



解：1. 求支反力

$$\sum M_B=0$$

$$F_D\times 4+4\times 2\times 1-20\times 2=0$$

$$F_D=8\,\text{kN}$$

$$\sum M_D=0$$

$$-F_B\times 4+4\times 2\times 5+20\times 2=0$$

$$F_B=20\,\text{kN}$$

校核：

$$\sum F_y=0,F_A+F_B-4\times 2-20=0$$

2. 作剪力、弯矩图

外力将梁分为三段

$F_{SA}=0$

$F_{SB左}=-4\times2=-8\text{kN}$

$F_{SBC}=-8+20=12\,\text{kN}$

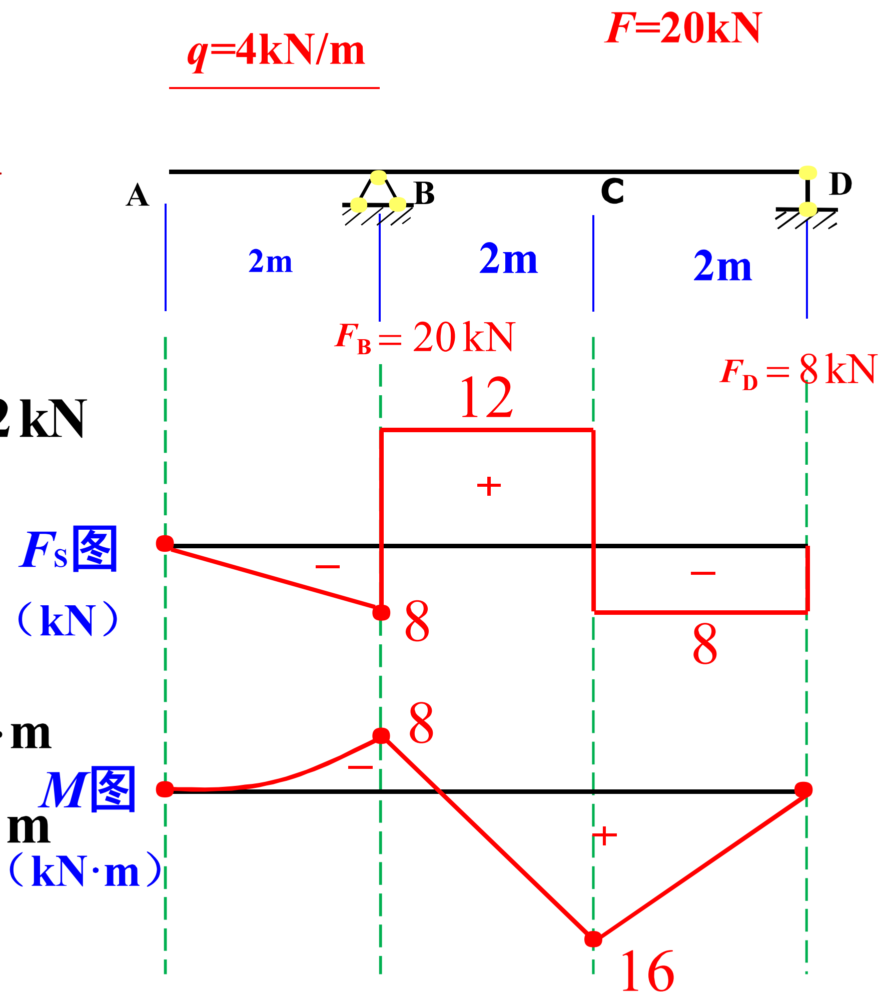
$F_{SCD}=-8\,\text{kN}$

$M_A=0$

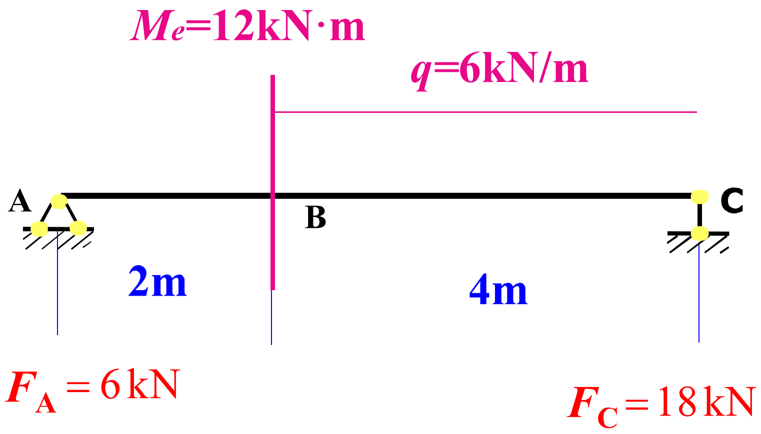
$M_B=-4\times2\times1=-8\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_C=8\times2=16\,\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_D=0$



例 题 试作图示梁的剪力、弯矩图。



解：1. 求支反力

$$\sum M_A = 0$$

$$F_C \times 6 - 12 - 6 \times 4 \times 4 = 0$$

$$F_C = 18\,\mathrm{kN}$$

$$\sum M_C = 0$$

$$-F_A \times 6 - 12 + 6 \times 4 \times 2 = 0$$

$$F_A = 6\,\mathrm{kN}$$

校核：

$$\sum F_y = 0, F_A + F_C - 6 \times 4 = 0$$

2. 作剪力、弯矩图

外力将梁分为两段

$F_{SAB}=6\,\text{kN}\quad F_{SB}=6\,\text{kN}$

$F_{SC左}=-18\,\text{kN}\quad M_A=0$

$M_{B左}=6\times 2=12\,\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{B右}=6\times 2+12=24\,\text{kN}\cdot\text{m}$

或 $M_{B右}=18\times 4-6\times 4\times 2$

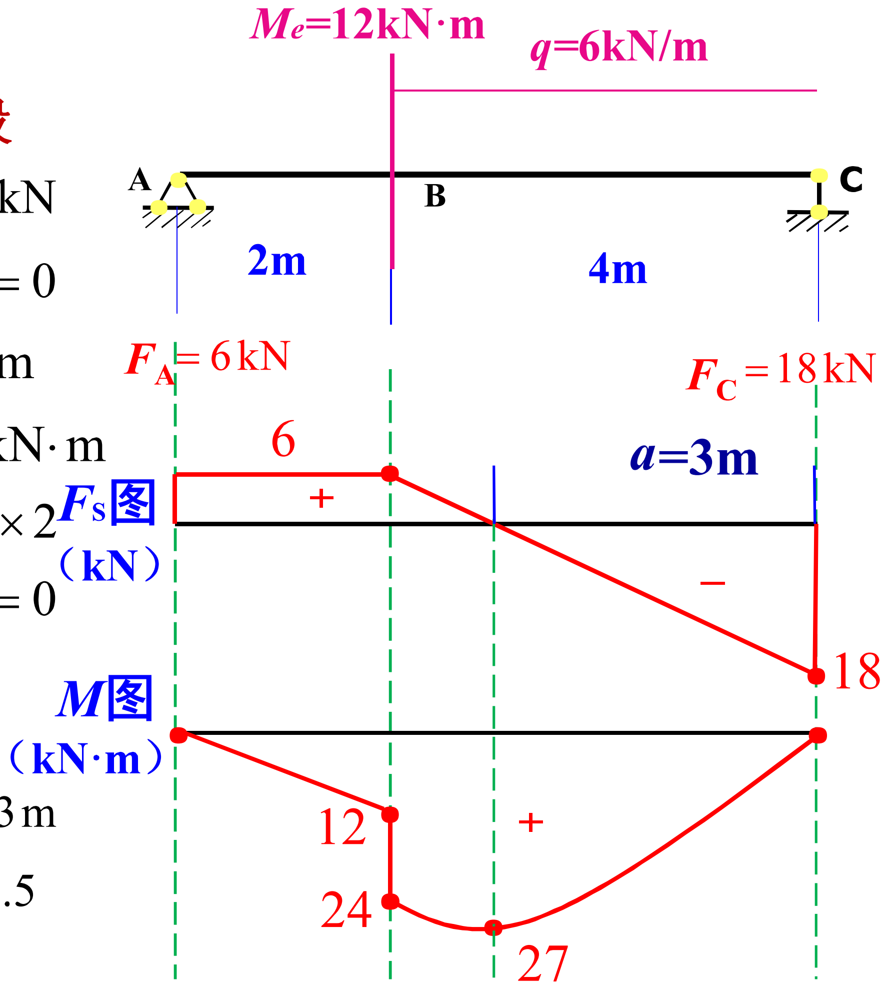
$=24\,\text{kN}\cdot\text{m}\quad M_C=0$

$\dfrac{4-a}{a}=\dfrac{6}{18}\qquad a=3\,\text{m}$

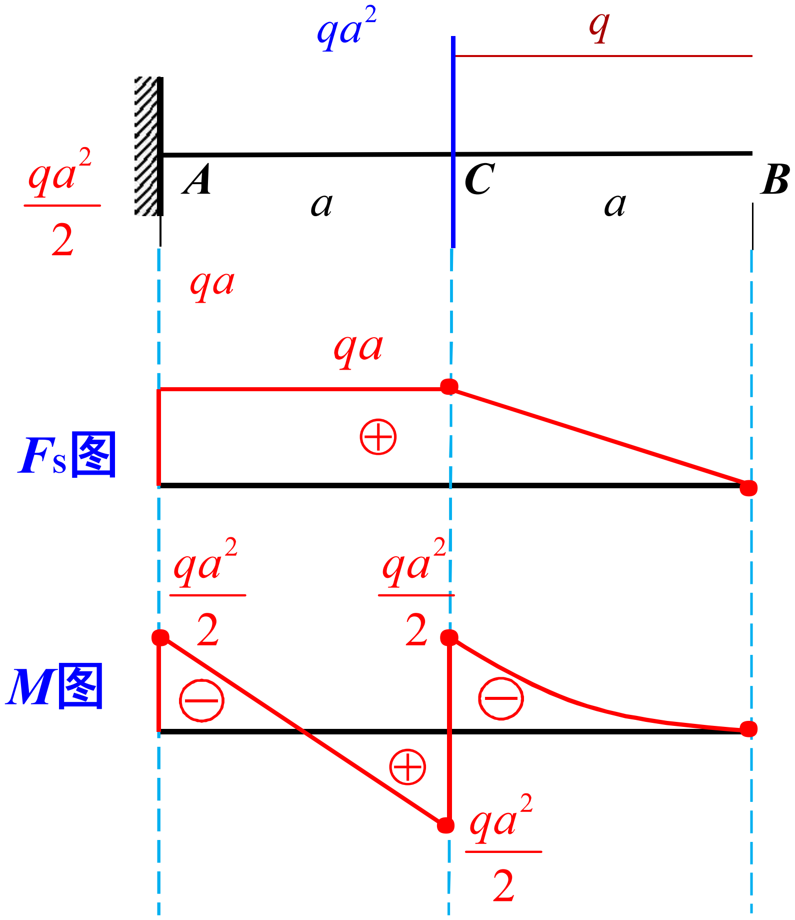
或 $F_s=6a-18=0, a=3\,\text{m}$

$M_{极值}=18\times 3-6\times 3\times 1.5$

$=27\,\text{kN}\cdot\text{m}$



例题 作图示梁的剪力、弯矩图。



$$F_{sAC} = qa$$

$$F_{sB} = 0$$

$$F_{sC} = qa$$

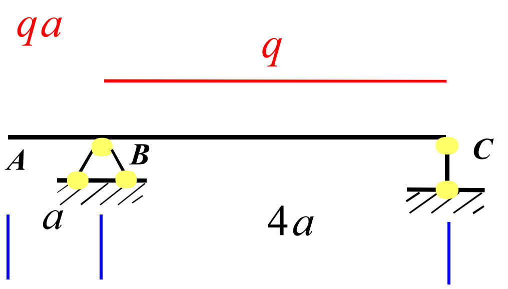
$$M_B = 0$$

$$M_{C右} = -qa\frac{a}{2} = -\frac{qa^2}{2}$$

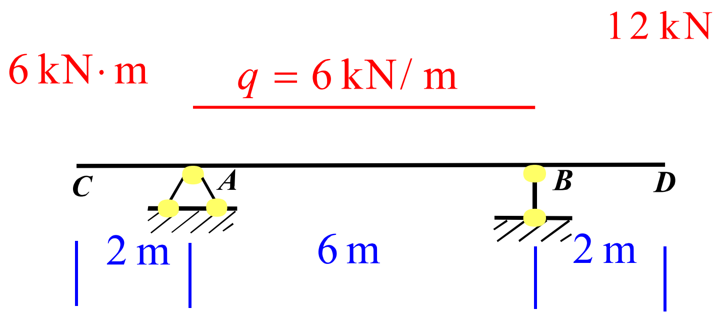
$$M_{A右} = qa^2 - qa\frac{3a}{2} = -\frac{qa^2}{2}$$

$$M_{C左} = qa^2 - qa\frac{a}{2} = \frac{qa^2}{2}$$

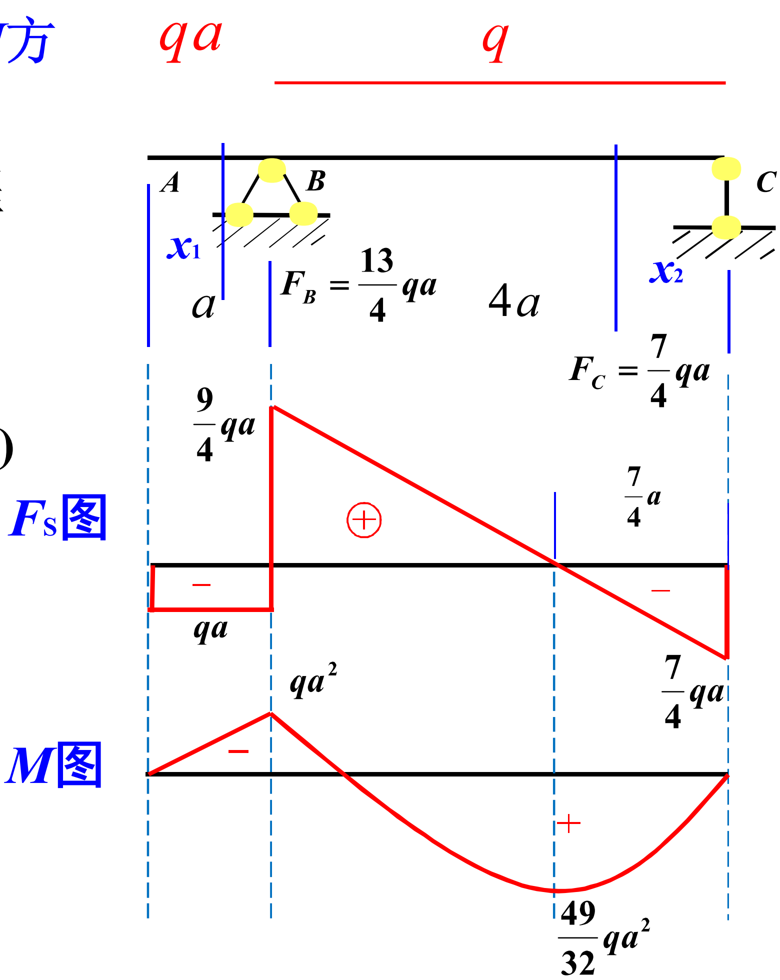
练习　**1**、列F_S、M方程，并作该梁的F_S、M图。



2、用简易法作梁的F_S、M图。



1、列图示梁的F_S、M方程，并作F_S、M图。



解：列剪力、弯矩方程

AB段：

$$F_s(x_1)=-qa(0\le x_1<a)$$

$$M(x_1)=-qax_1(0\le x_1\le a)$$

CB段：

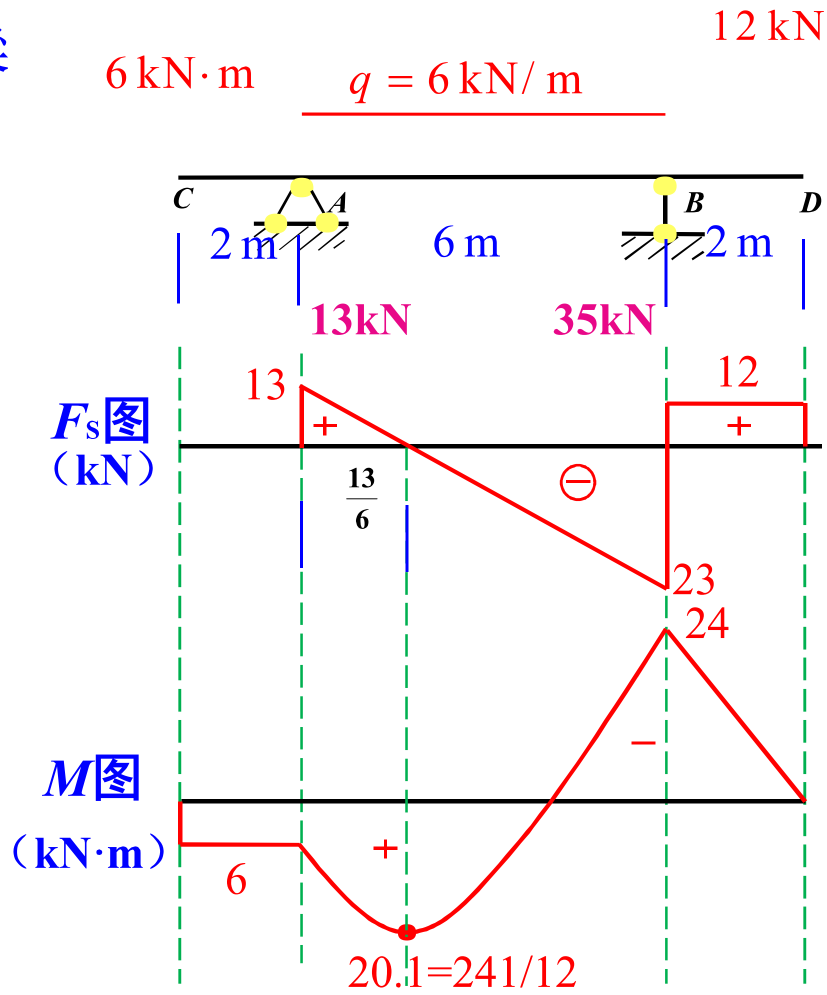
$$F_s(x_2)=qx_2-\frac{7}{4}qa$$

$$(0<x_2<4a)$$

$$M(x_2)=\frac{7}{4}qax_2-\frac{1}{2}qx_2{}^2$$

$$(0\le x_2\le 4a)$$

2、用简易法作梁的F_S、M图。



四、弯矩、剪力和荷载集度间的积分关系

$$\frac{\mathrm{d}F_s(x)}{\mathrm{d}x}=q(x) \qquad \frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_s(x)$$

若在$x=a$和$x=b$处两横截面间无集中力作用，则

$$\int_a^b \mathrm{d}F_s(x)=\int_a^b q(x)\mathrm{d}x$$

得 $$F_{sB}=F_{sA}+\int_a^b q(x)\mathrm{d}x$$

其中等号右边积分的几何意义是上述两横截面间分布荷载图的面积。

即：若A、B两截面间无集中力作用，则B截面上的剪力等于A截面上的剪力加上两截面之间分布荷载图的面积。

注意：1、B截面在A截面的右侧。

2、q向下，荷载图面积为负；q向上，荷载图面积为正。

$$\frac{\mathrm{d}\,M(x)}{\mathrm{d}\,x}=F_s(x)$$

同理，若在$x=a$和$x=b$处两横截面间无集中力偶作用，则

$$\int_a^b \mathrm{d}\,M(x)=\int_a^b F_s(x)\,\mathrm{d}\,x$$

得 $$M_B=M_A+\int_a^b F_s(x)\,\mathrm{d}\,x$$

其中等号右边积分的几何意义是上述两横截面间剪力图的面积。

即：若A、B两截面间无集中力偶作用，则B截面上的弯矩等于A截面上的弯矩加上两截面之间剪力图的面积。

注意：1、B截面在A截面的右侧。

2、剪力为正，剪力图面积为正；剪力为负，剪力图面积为负。

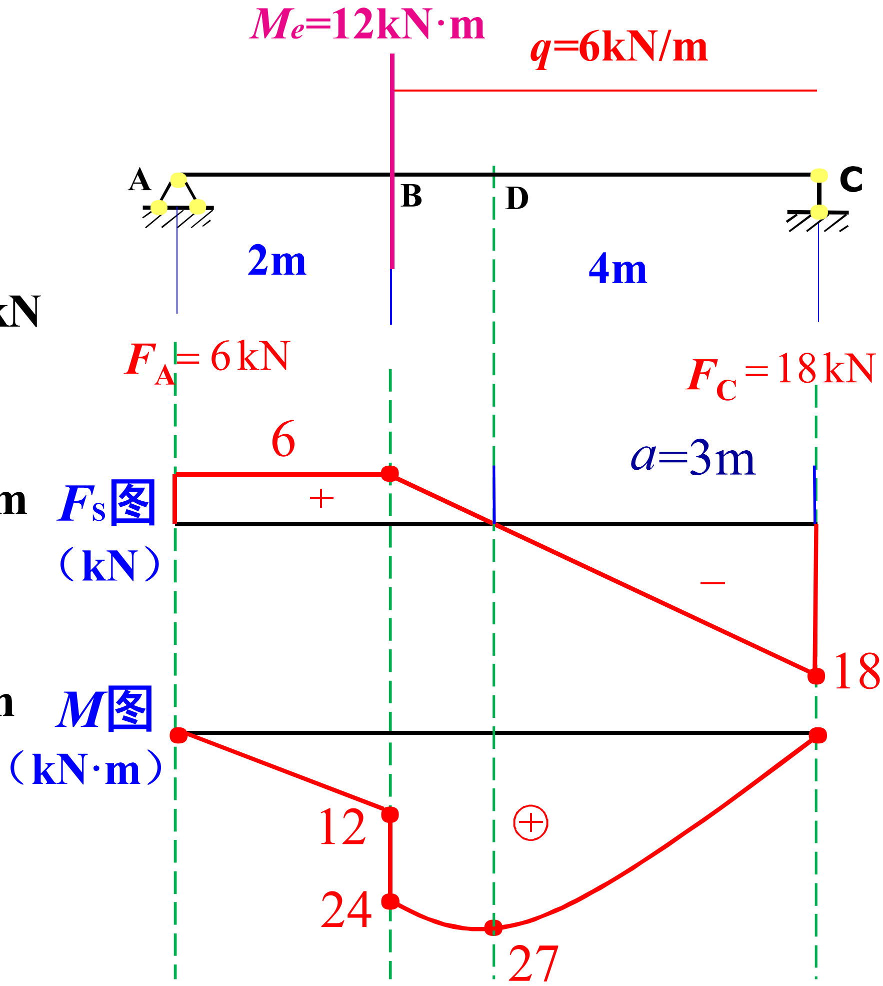
例：

$$F_{sc左} = F_{sB} - 6\times4$$
$$= 6 - 24 = -18\,\text{kN}$$

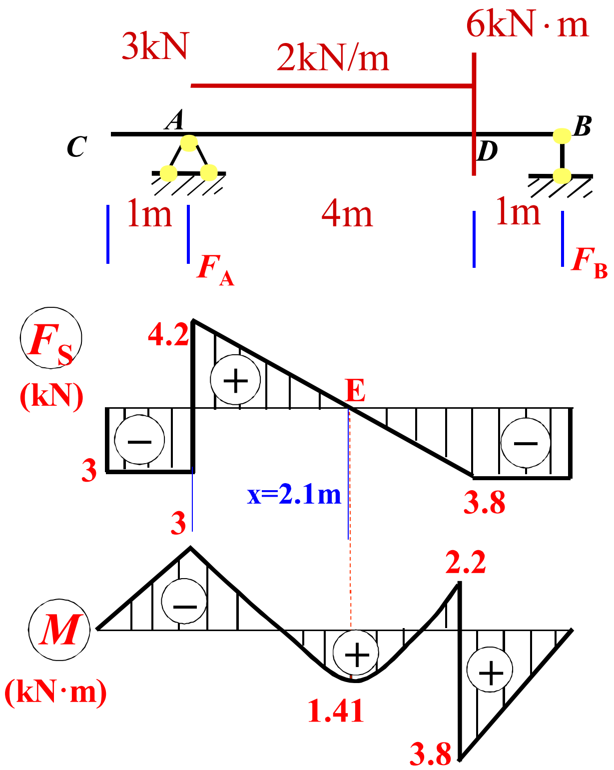
$$M_{B左} = M_A + 6\times2$$
$$= 0 + 12 = 12\,\text{kN·m}$$

$$M_D = M_{B右} + \frac{1}{2}\times6\times1$$
$$= 24 + 3 = 27\,\text{kN·m}$$

$$M_C = M_D - \frac{1}{2}\times18\times3$$
$$= 27 - 27 = 0$$



例　外伸梁AB承受荷载如图所示，作该梁的F_S、M图。



解：1、求支反力

$$F_A = 7.2\text{kN} \qquad F_B = 3.8\text{kN}$$

2、判断各段F_S、M图形状：

CA和DB段：$q=0$，F_S图为水平线，M图为斜直线。

AD段：$q<0$，F_S图为向下斜直线，M图为下凸抛物线。

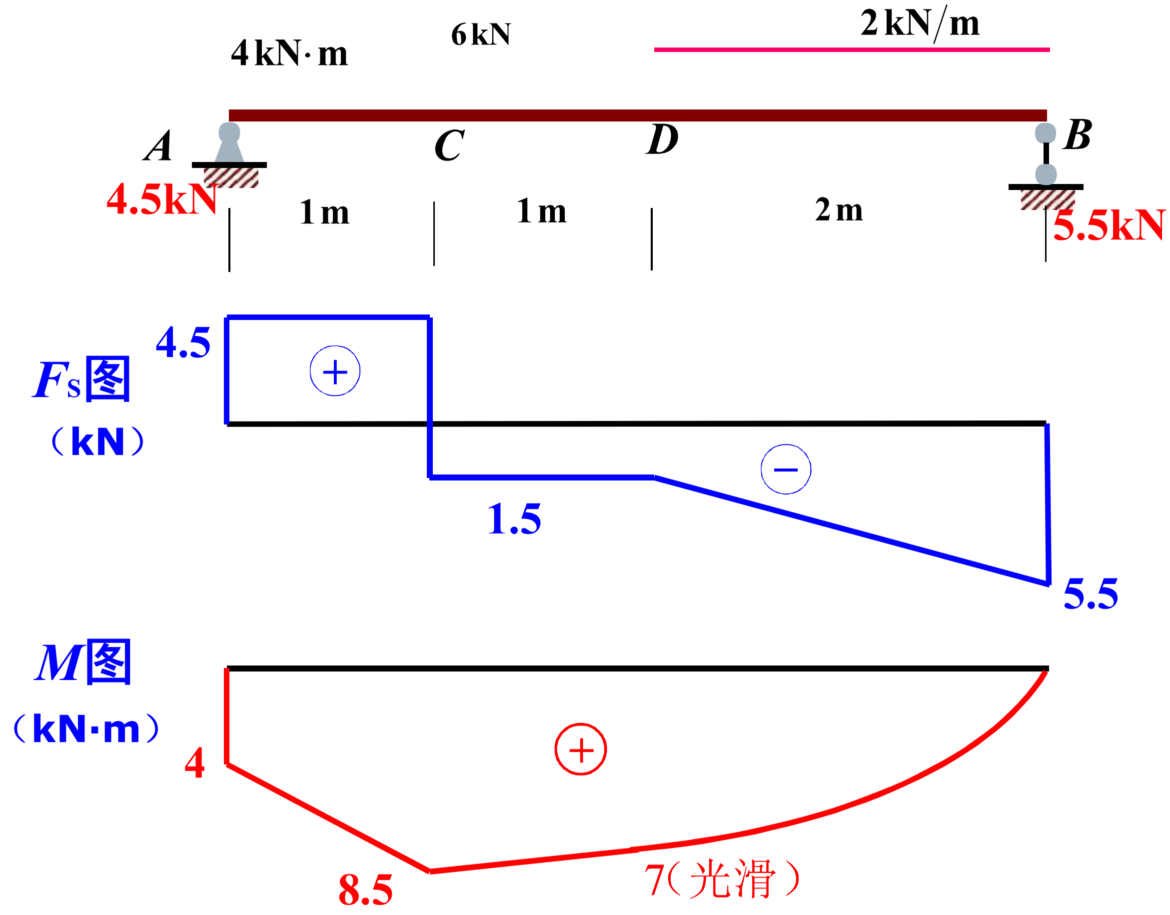
3、先确定各分段点（即控制截面）的F_S、M值，用相应形状的线条连接。

$$F_{sD} = 4.2 - 2\times 4 = -3.8\text{kN}$$

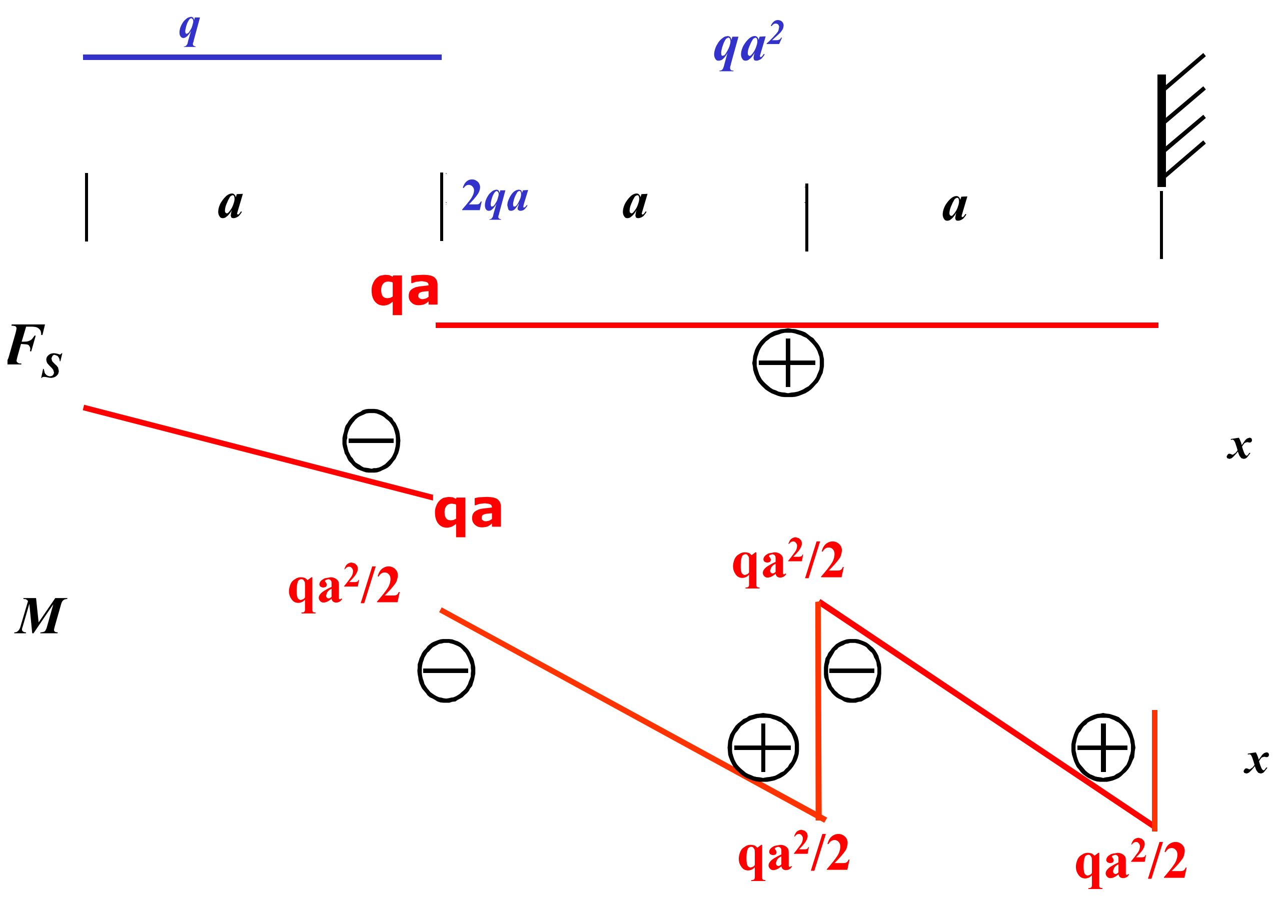
$$M_E = -3 + \frac{1}{2}\times 4.2\times 2.1 = 1.41\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{D左} = 1.41 - \frac{1}{2}\times 3.8\times 1.9 = -2.2\text{kN}\cdot\text{m}$$

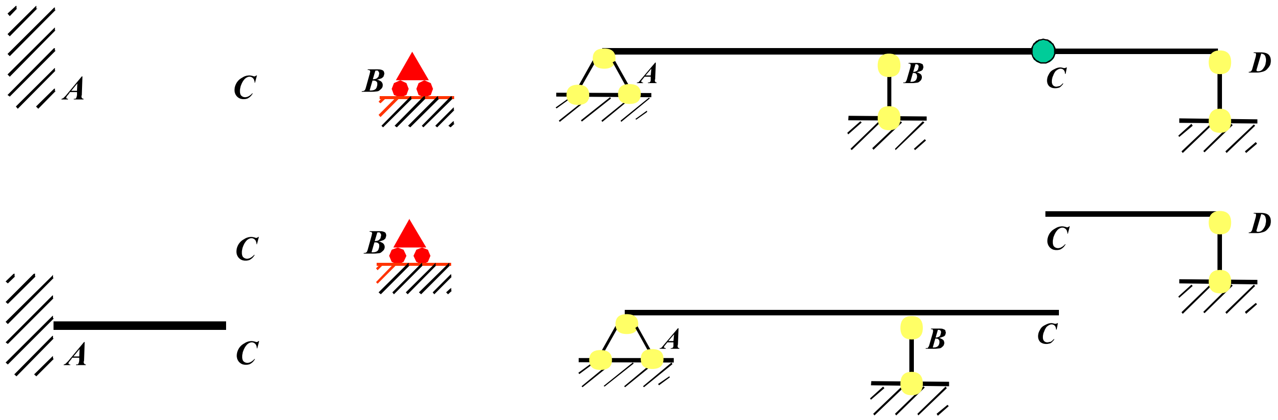
例题　作图示梁的剪力、弯矩图。



例：作图示梁的F_s、M图



讨论：带有中间铰的组合梁

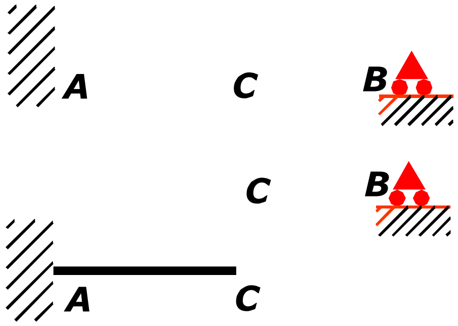


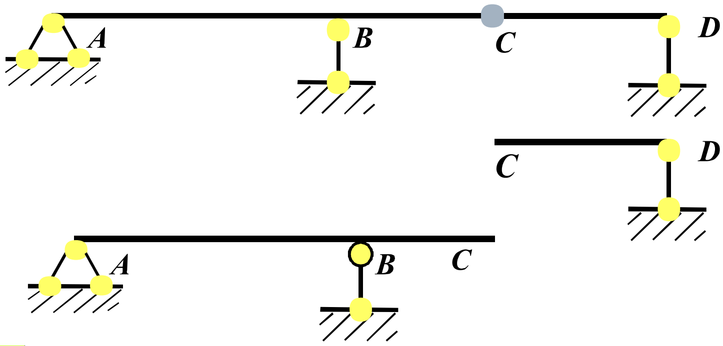
具有中间铰的组合梁由两部分组成：

基本部分——可独立存在的部分

附属部分——不能独立存在的部分

中间铰的特点：只传力,不传递力偶,故中间铰处弯矩为零。



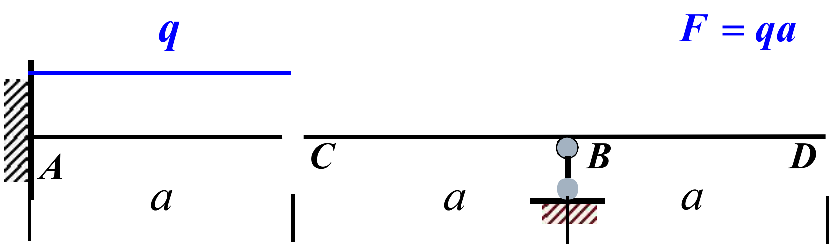


求解方法——拆！

从中间铰处将梁拆开，先根据附属部分的平衡求出中间铰的约束力，再以大小相等、方向相反的力加到基本部分上，这样便把组合梁拆成了若干根单跨梁，按单跨梁作内力图的方法，即可得到组合梁的内力图。

为了清楚地表示各部分之间的支承关系，可将基本部分的受力图画在下层，而将附属部分的受力图画在上层，这样得到的图形称为层叠图。

例题 画图示组合梁的剪力、弯矩图。

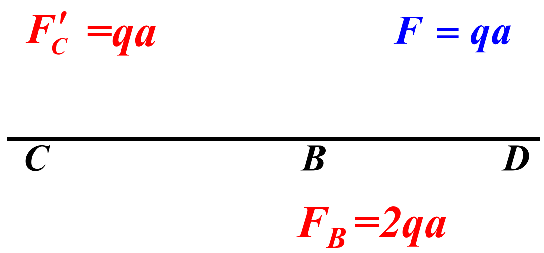


解：1.求约束力

对CD

$$F_C' = qa$$

$$F_B = 2qa$$



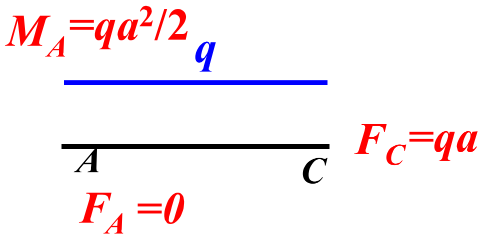
对AC

$$\Sigma F_y = 0, F_C - qa - F_A = 0$$

$$F_A = 0$$

$$\Sigma M_A = 0, F_C \cdot a - M_A - qa\frac{a}{2} = 0$$

$$M_A = \frac{qa^2}{2}$$



将约束力大小标在图上

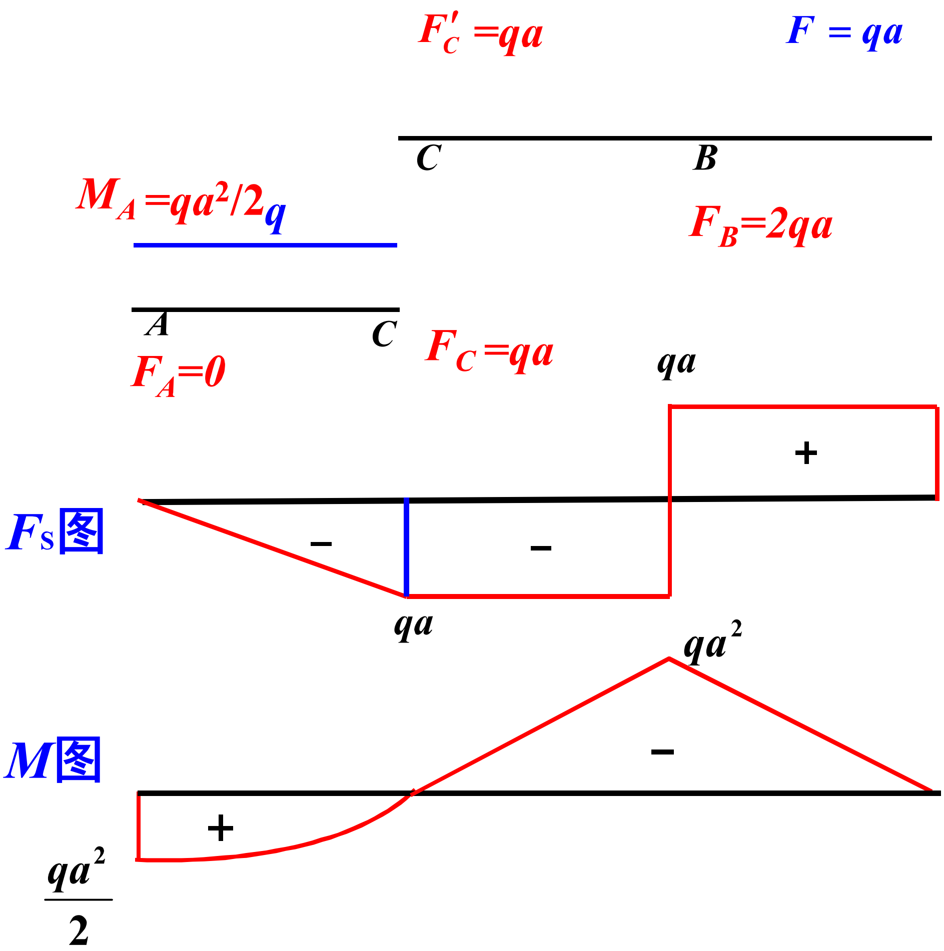
$F'_C = qa$

$F_B = 2qa$

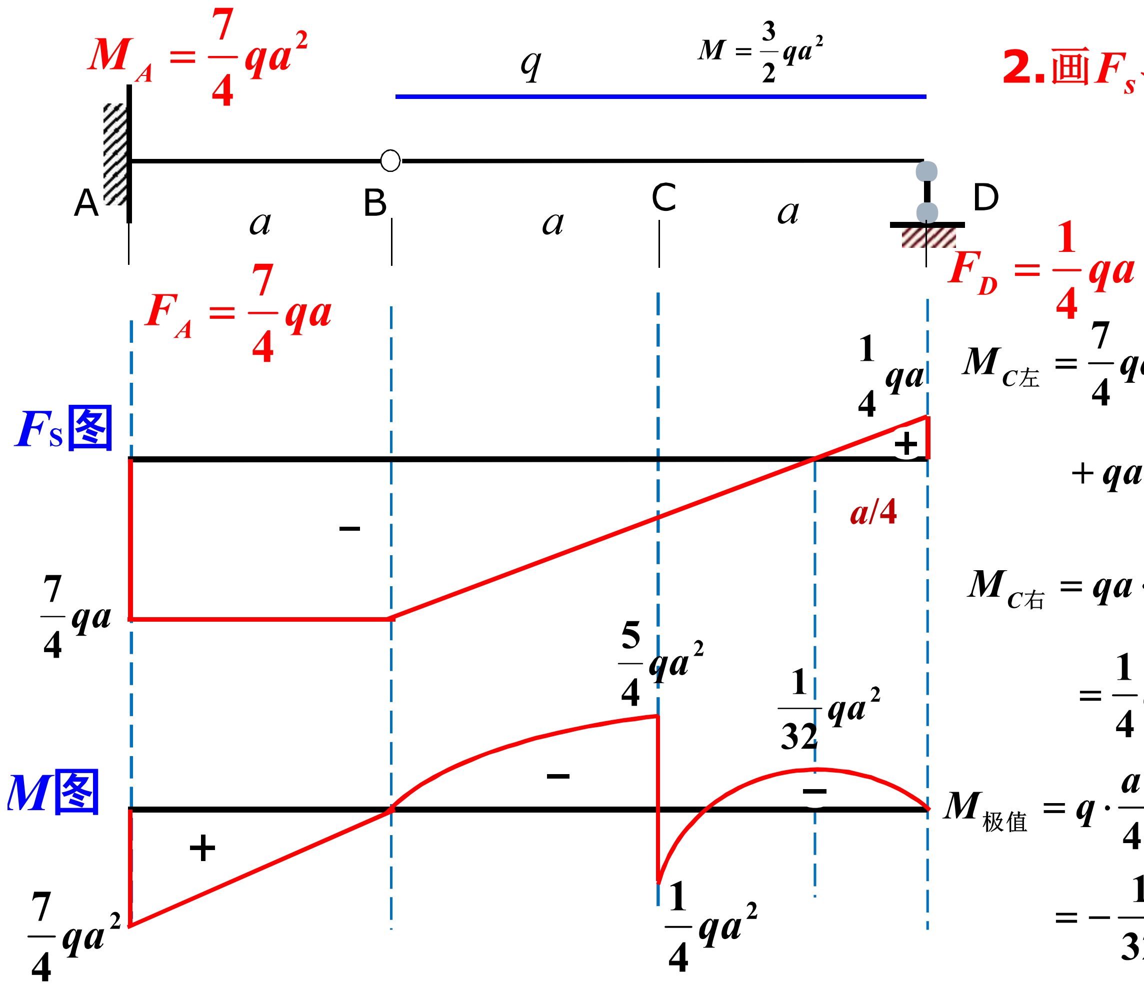
$F_A = 0$

$M_A = \dfrac{qa^2}{2}$

2、作剪力、弯矩图



2.画F_s、M图

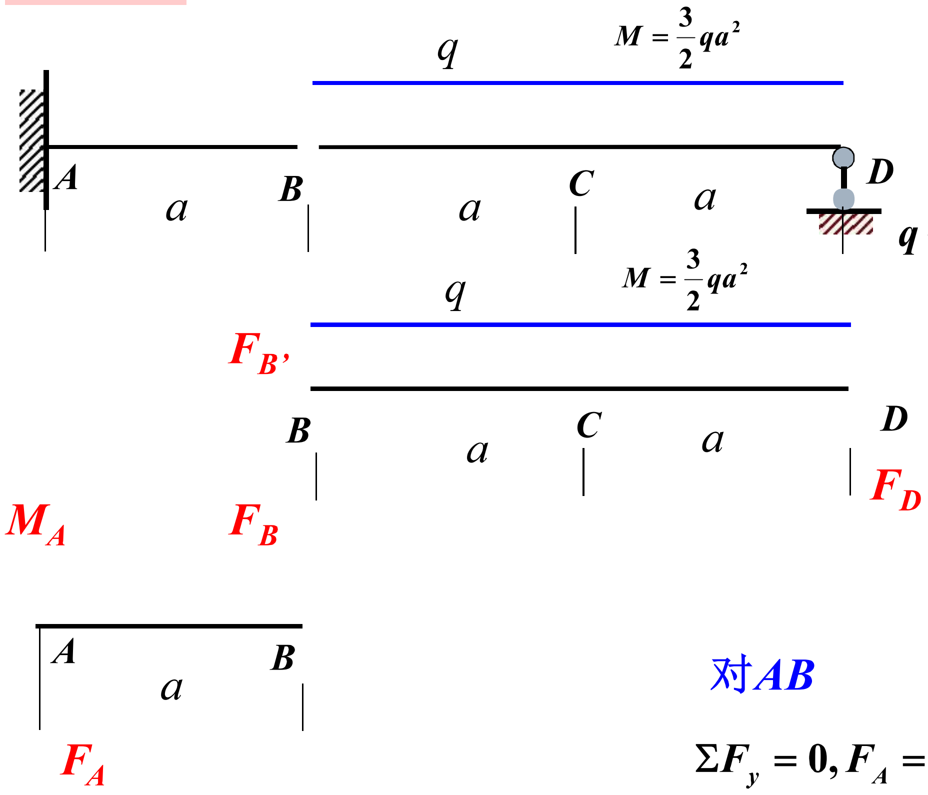


$$M_{C左}=\frac{7}{4}qa^2-\frac{7}{4}qa\cdot 2a+qa\cdot\frac{a}{2}=-\frac{5}{4}qa^2$$

$$M_{C右}=qa\cdot\frac{a}{2}-\frac{qa}{4}\cdot a=\frac{1}{4}qa^2$$

$$M_{极值}=q\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{8}-\frac{qa}{4}\cdot\frac{q}{4}=-\frac{1}{32}qa^2$$

例题 画图示组合梁的剪力、弯矩图。



解：1.求约束力

对BD

$$\Sigma M_B=0,$$

$$q\cdot 2a\cdot a-M-F_D\cdot 2a=0$$

$$F_D=\frac{1}{4}qa$$

$$\Sigma F_y=0,$$

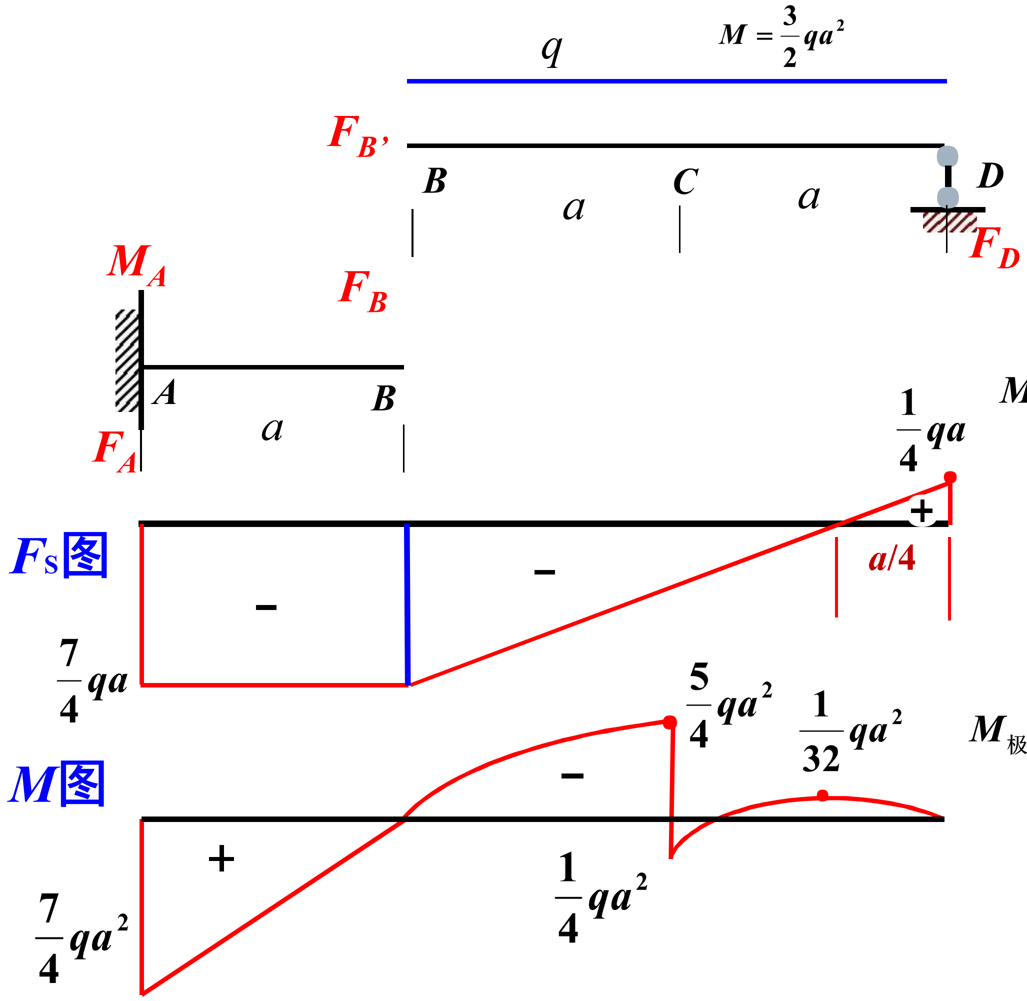
$$q\cdot 2a-F_B'-F_D=0$$

$$F_B'=\frac{7}{4}qa$$

对AB

$$\Sigma F_y=0, F_A=F_B=F_B'=\frac{7}{4}qa$$

$$\Sigma M_A=0, F_B\cdot a-M_A=0, M_A=\frac{7}{4}qa^2$$



$$F_D = \frac{1}{4}qa$$

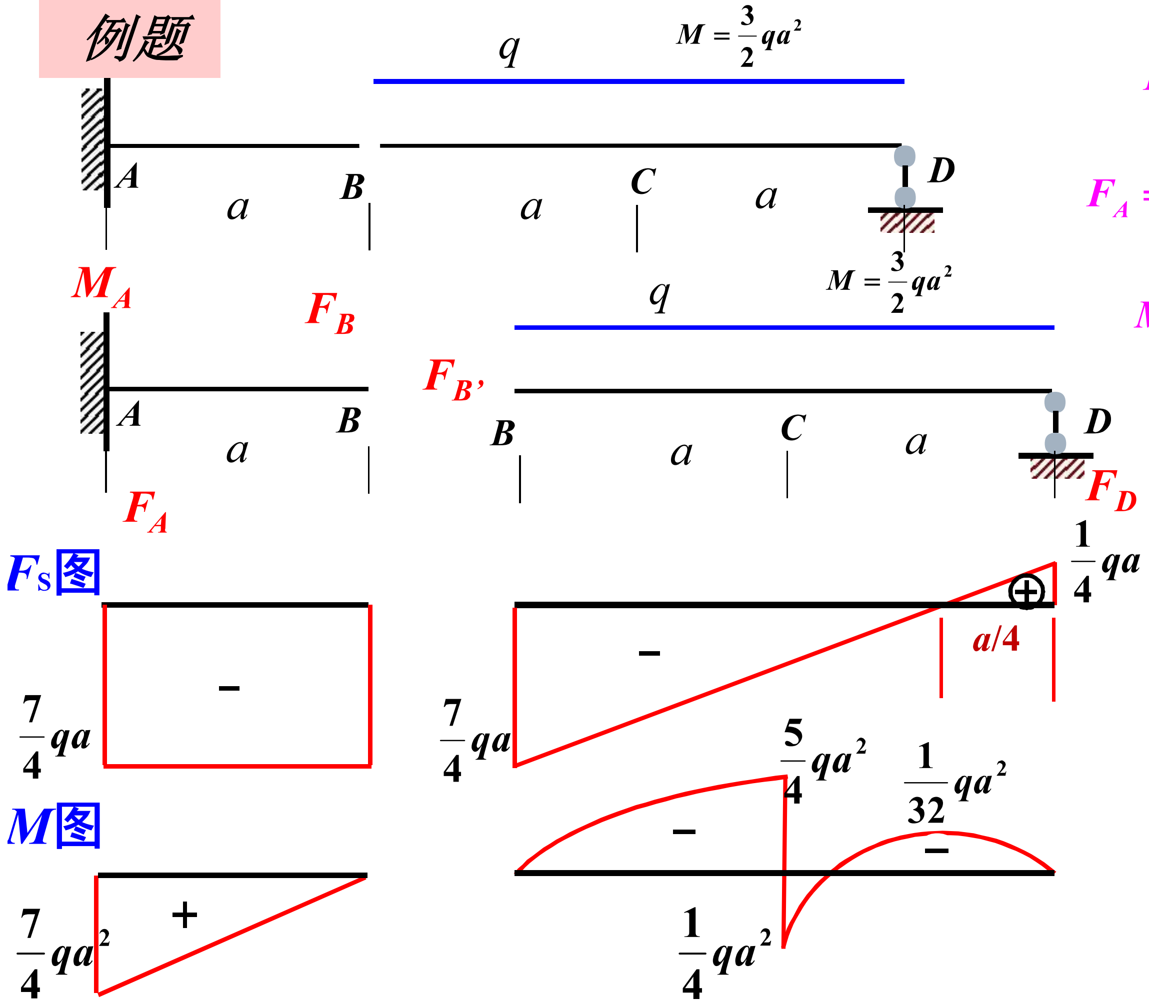
$$F_A = F_B = \frac{7}{4}qa$$

$$M_A = \frac{7}{4}qa^2$$

$$M_{C左} = -F'_B a + qa\cdot\frac{a}{2} = -\frac{7}{4}qa^2 + \frac{qa^2}{2} = -\frac{5}{4}qa^2$$

$$M_{极值} = -F_D\frac{a}{4} + q\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{8} = -\frac{1}{16}qa^2 + \frac{qa^2}{32} = -\frac{1}{32}qa^2$$

例题

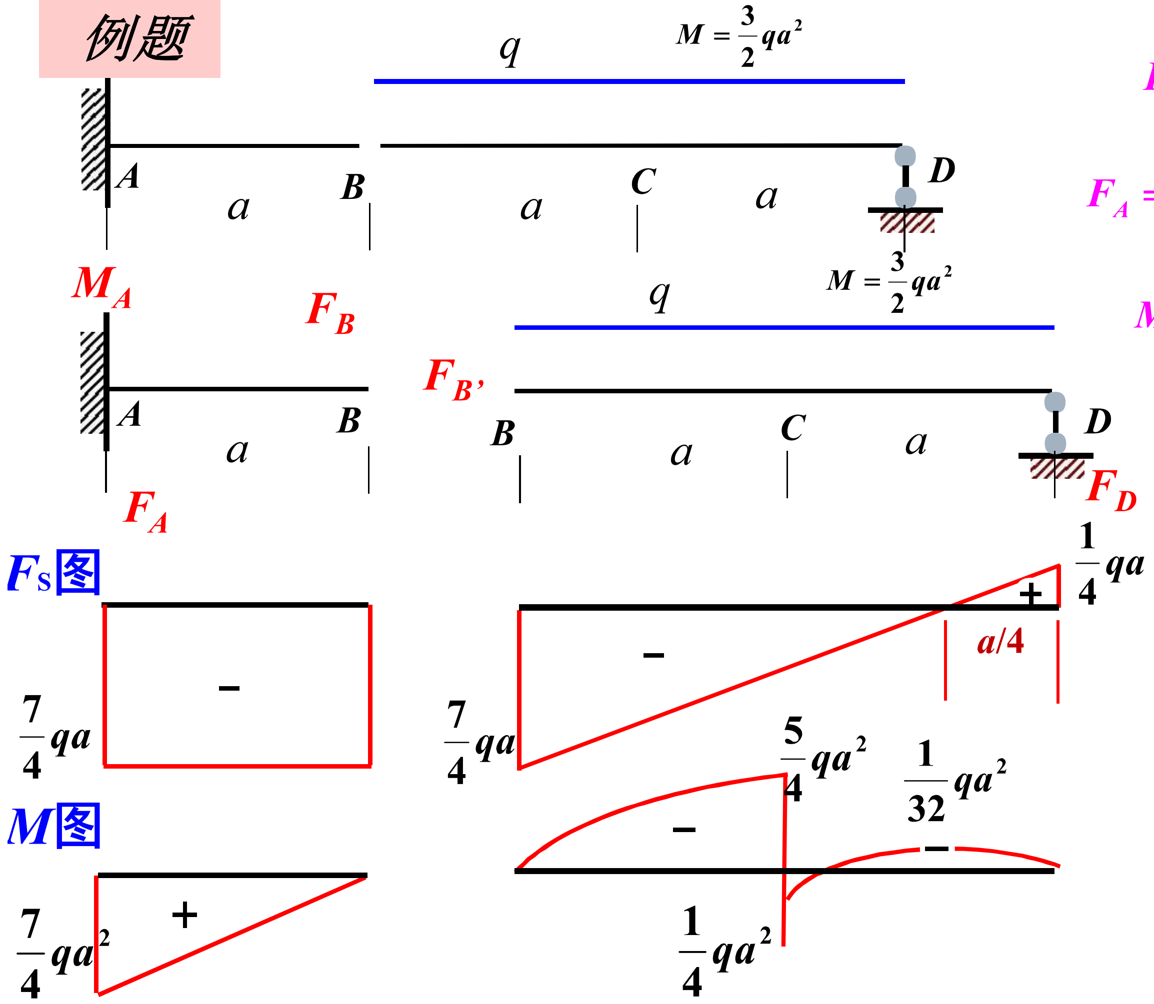


$$F_D = \frac{1}{4}qa$$

$$F_A = F_B = \frac{7}{4}qa$$

$$M_A = \frac{7}{4}qa^2$$

例题



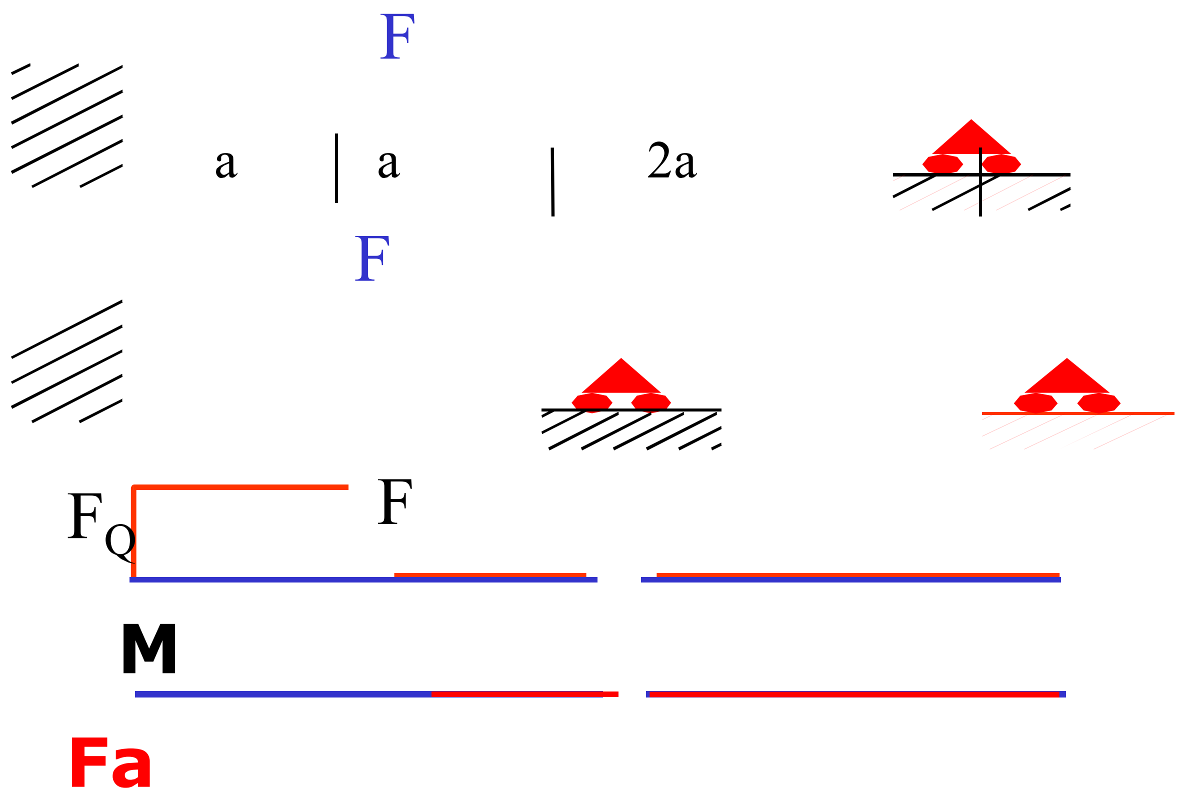
$$F_D=\frac{1}{4}qa$$

$$F_A=F_B=\frac{7}{4}qa$$

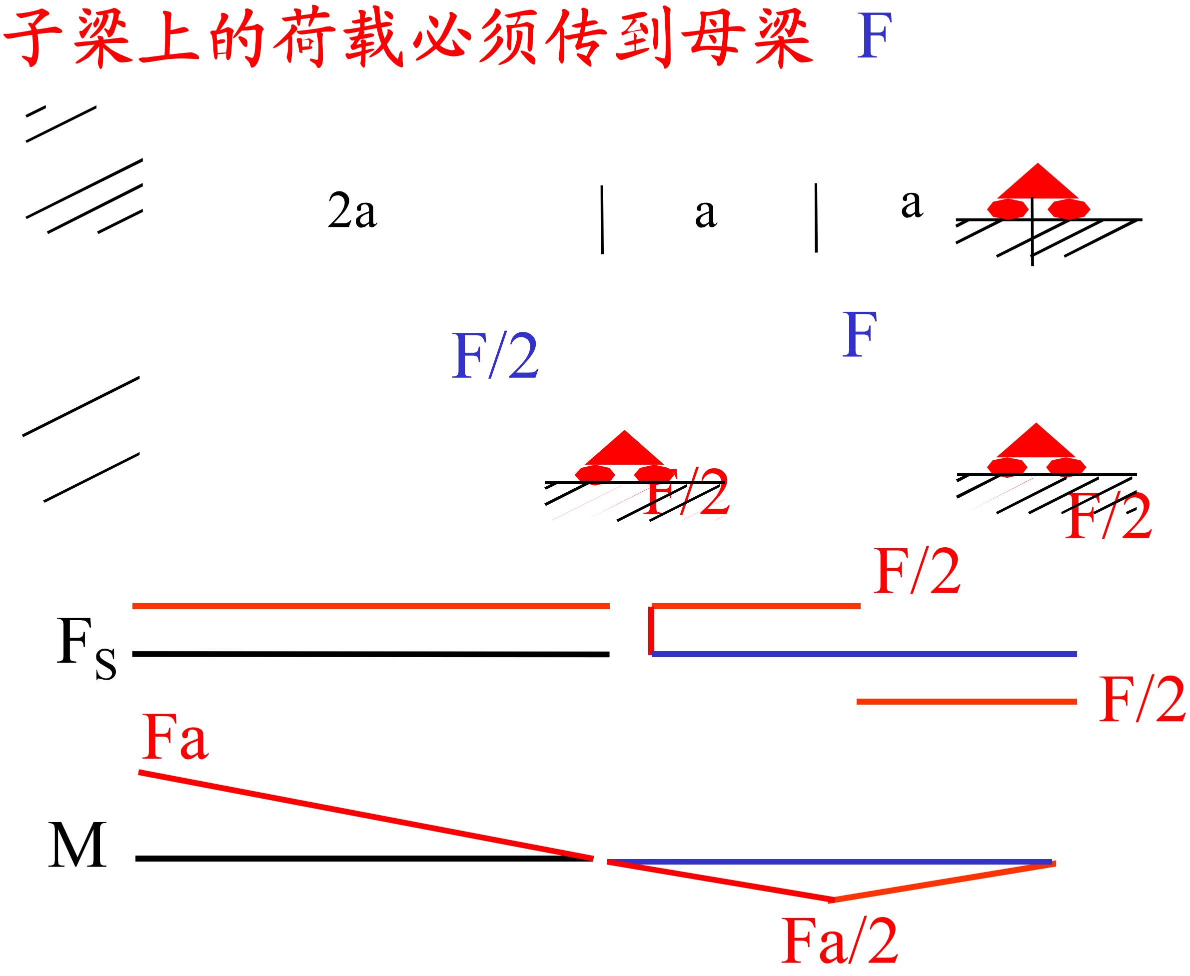
$$M_A=\frac{7}{4}qa^2$$

注意

1 母梁上的荷载不能传到子梁上，



而子梁上的荷载必须传到母梁



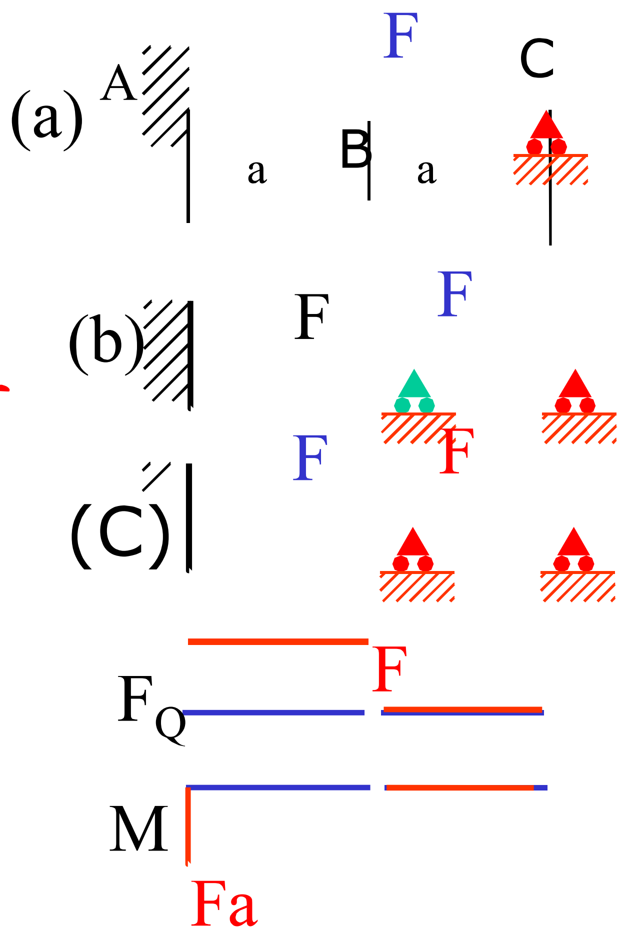
2。若中间铰左、上、右侧作用有集中力，放在哪边来求解都可

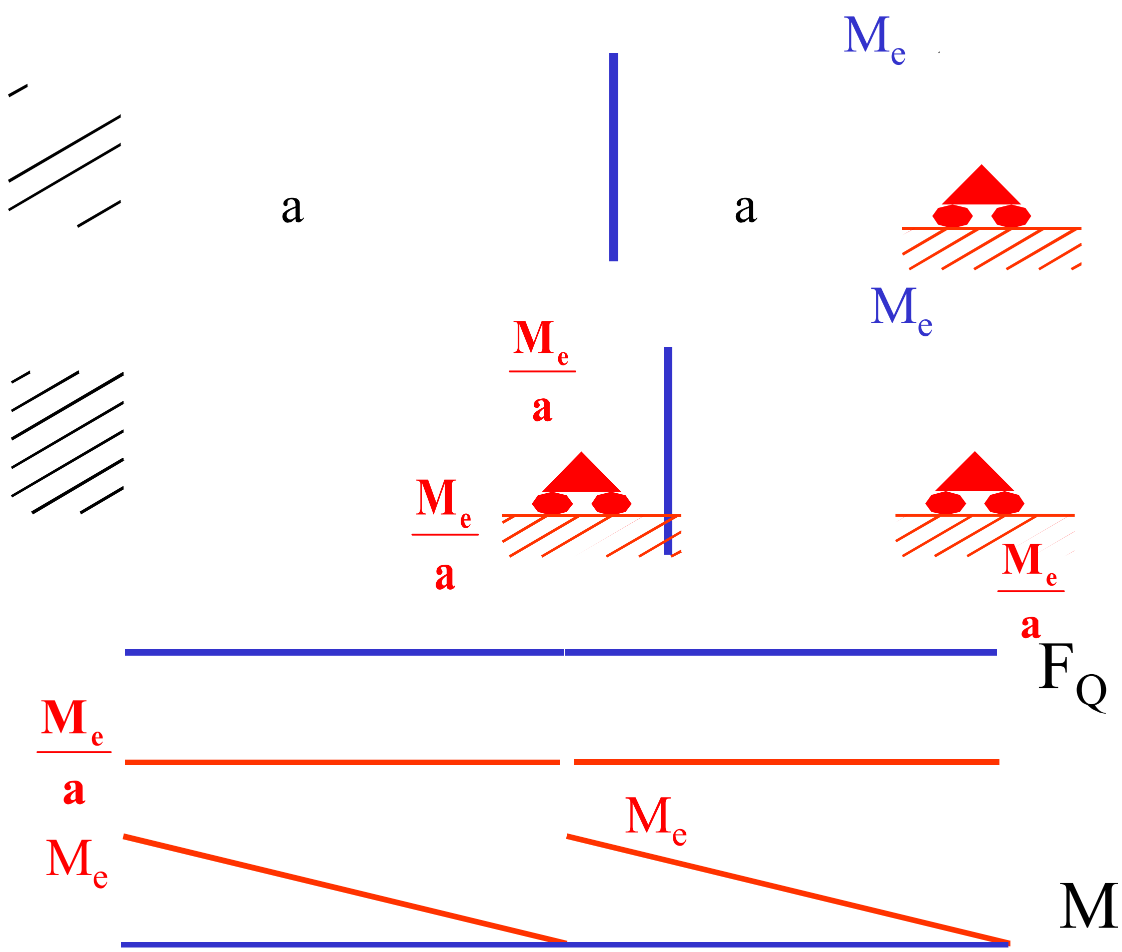
(a)图F作用于中间铰上

(b)图将F置于子梁上

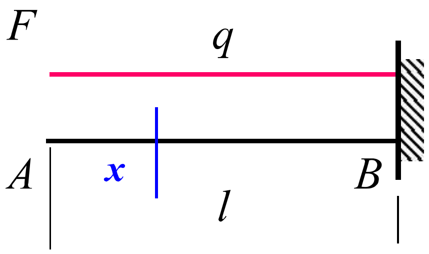
(C)图将F置于母梁上

可见结果是一样



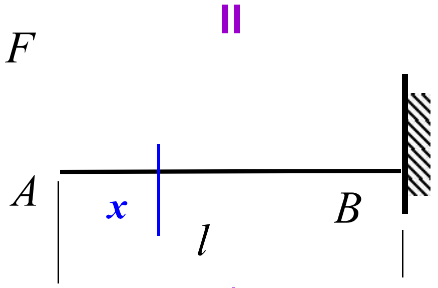

Me
a
a
Me
Me
a
Me
a
Me
a
FQ
Me
a
Me
Me
M

五、用叠加法作弯矩图



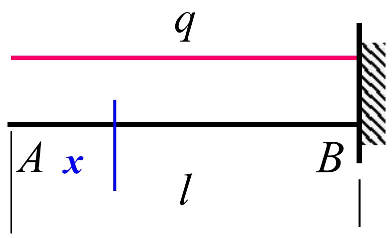
$$M(x) = Fx - \frac{1}{2}qx^2$$

=



$$M_1(x) = Fx$$

+



$$M_2(x) = -\frac{1}{2}qx^2$$

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x)$$

叠加原理：由几个荷载共同作用所引起的某一物理量（内力，应力，应变或变形等），等于每一个荷载（主动力）单独作用时所引起的该物理量的叠加（代数和）。

应用条件：所求物理量（内力，应力，应变或变形等）必须是荷载的线性齐次式。

当为小变形时，即线弹性结构下，内力、应力、应变，均与荷载为线性关系，即满足叠加原理。

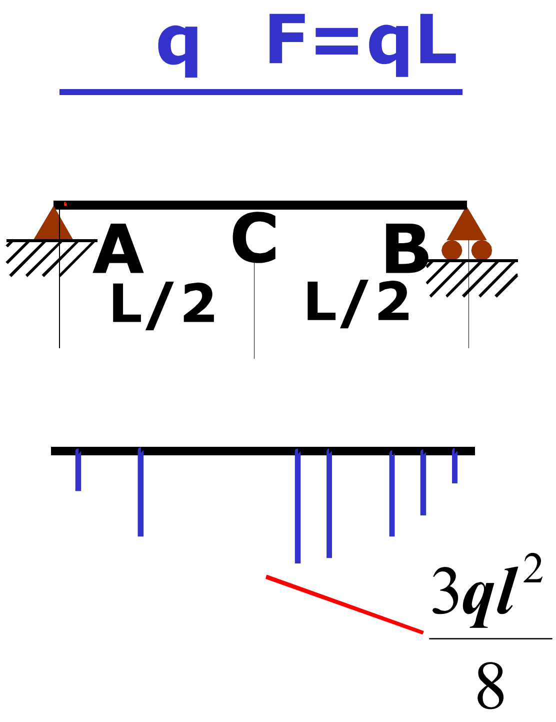
应当指出：应用叠加法可简化计算，但要求对简单荷载作用下的物理量较熟。另外，由于用叠加原理作F_S、M图时有时会使F_S、M的最大值湮没，反而造成错误。所以在进行强度计算时，很少使用叠加原理。

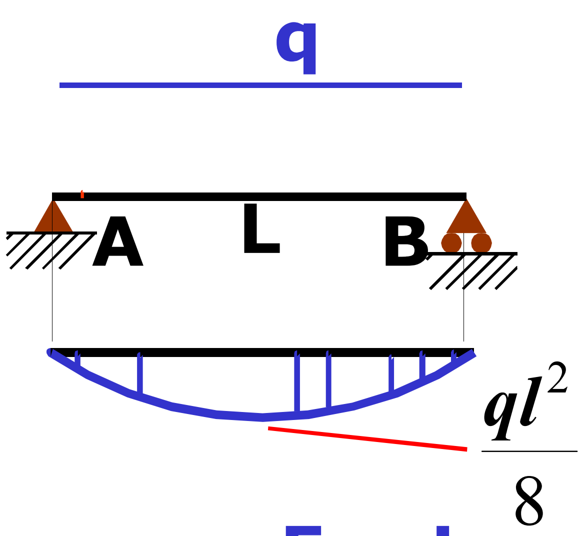
方法：

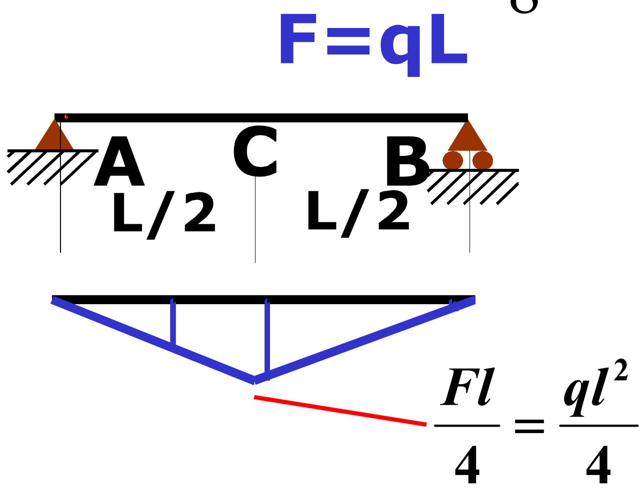
先分别画出每一荷载单独作用下梁的弯矩图，然后将同一截面相应的各纵坐标代数叠加，即得到梁在所有荷载共同作用下的弯矩图。

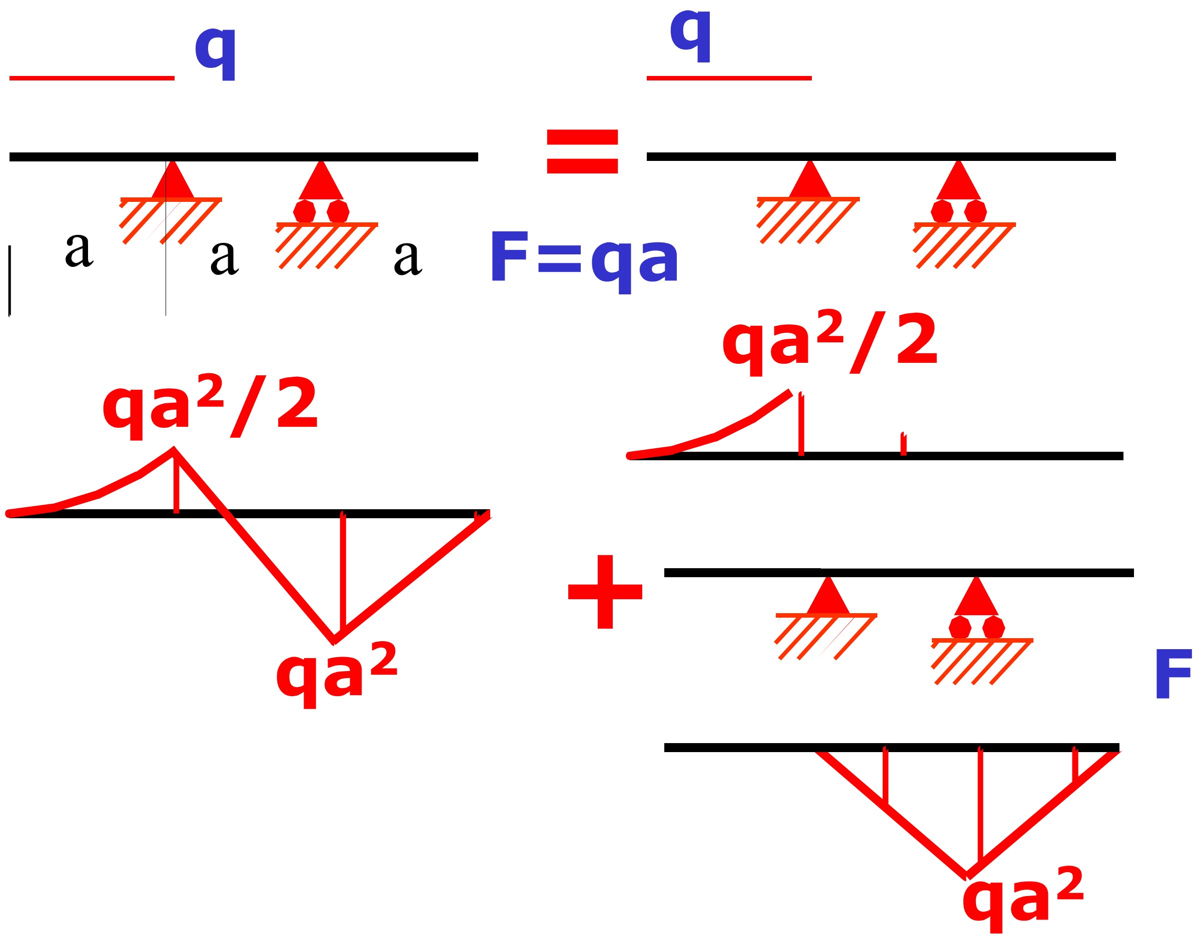
注意：

直线与直线叠加为直线，直线与曲线叠加为曲线。

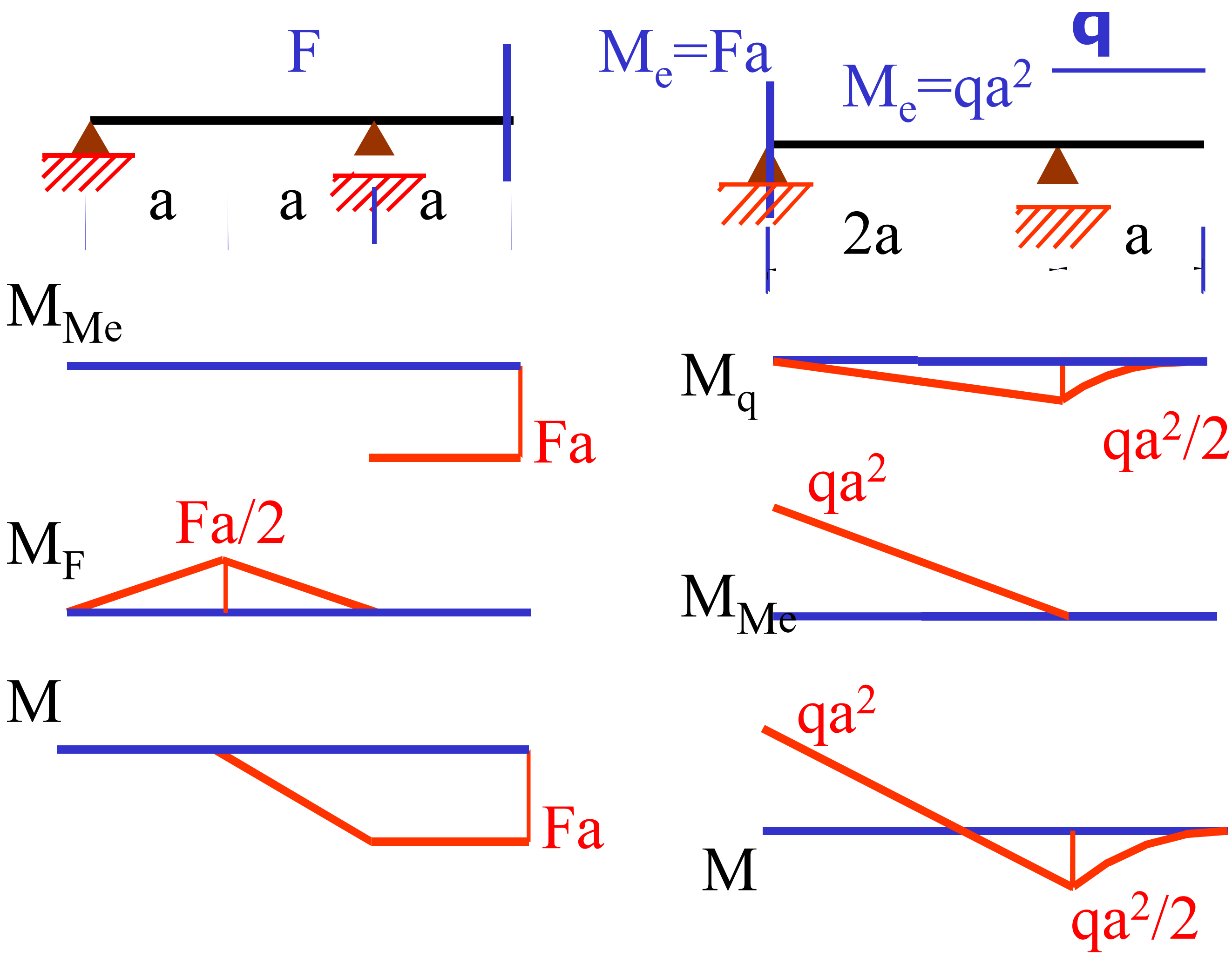

q
F=qL
A
C
B
L/2
L/2
$\frac{3ql^2}{8}$


q
A
L
B
$\frac{ql^2}{8}$


F=qL
A
C
B
L/2
L/2
$\frac{Fl}{4}=\frac{ql^2}{4}$

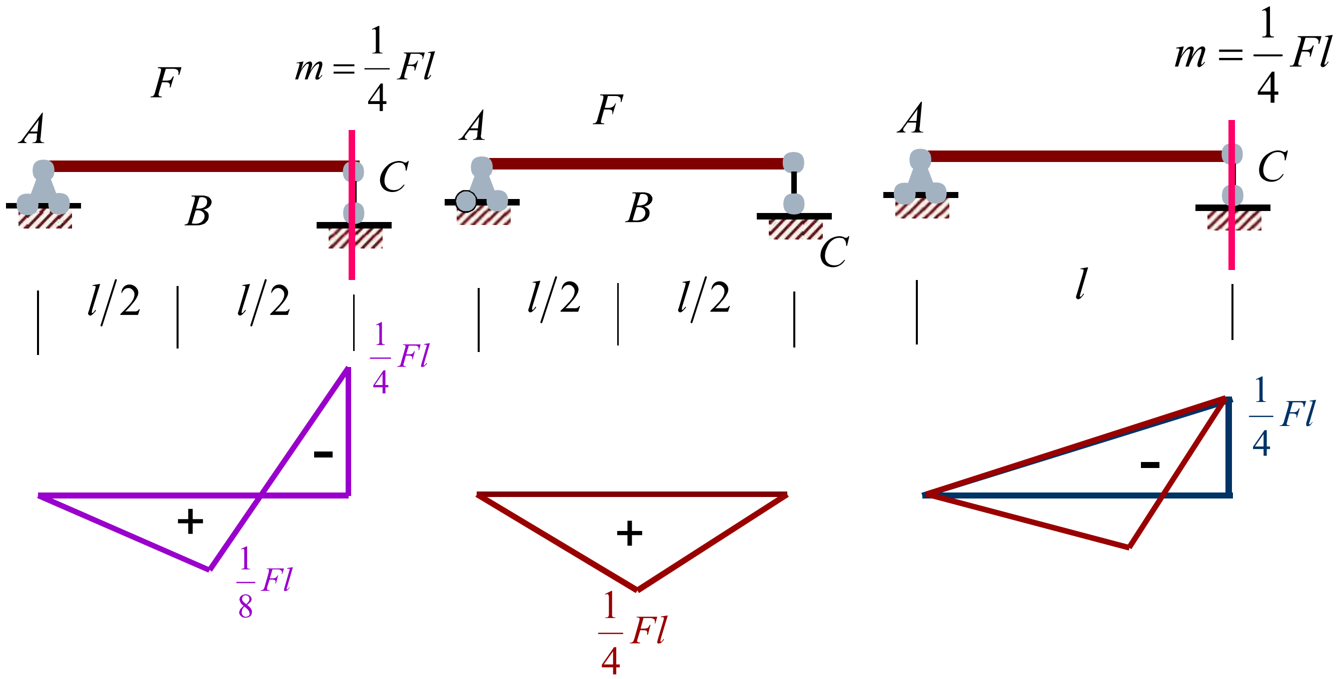


q
q
=
a
a
a
F=qa
qa²/2
qa²/2
+
qa²
F
qa²



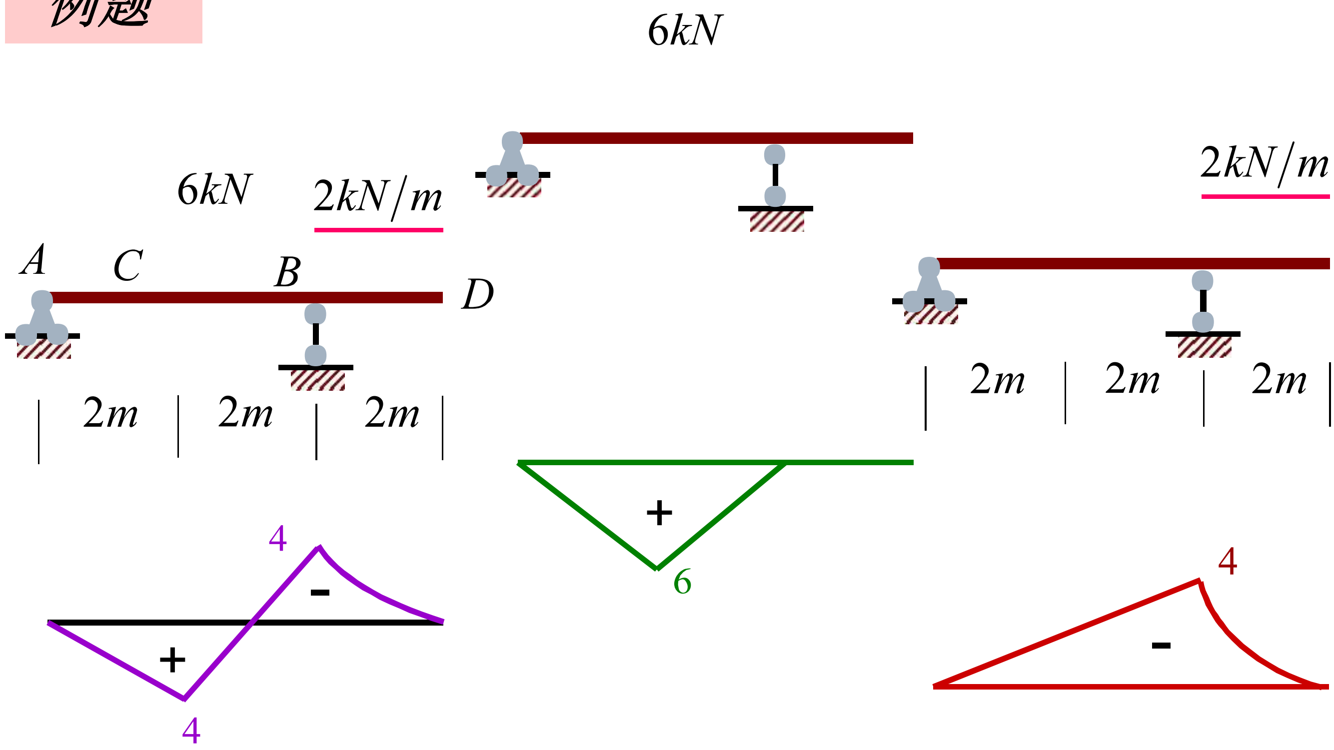
F
M_e=Fa
M_e=qa^2
q
a
a
a
2a
a
M_{Me}
Fa
M_q
qa^2/2
M_F
Fa/2
qa^2
M_{Me}
M
Fa
qa^2
M
qa^2/2

例题 4.14



$m=\frac{1}{4}Fl$
F
A
B
C
l/2
l/2
$\frac{1}{4}Fl$
-
+
$\frac{1}{8}Fl$
F
A
B
C
l/2
l/2
+
$\frac{1}{4}Fl$
$m=\frac{1}{4}Fl$
A
C
l
$\frac{1}{4}Fl$
-

例题



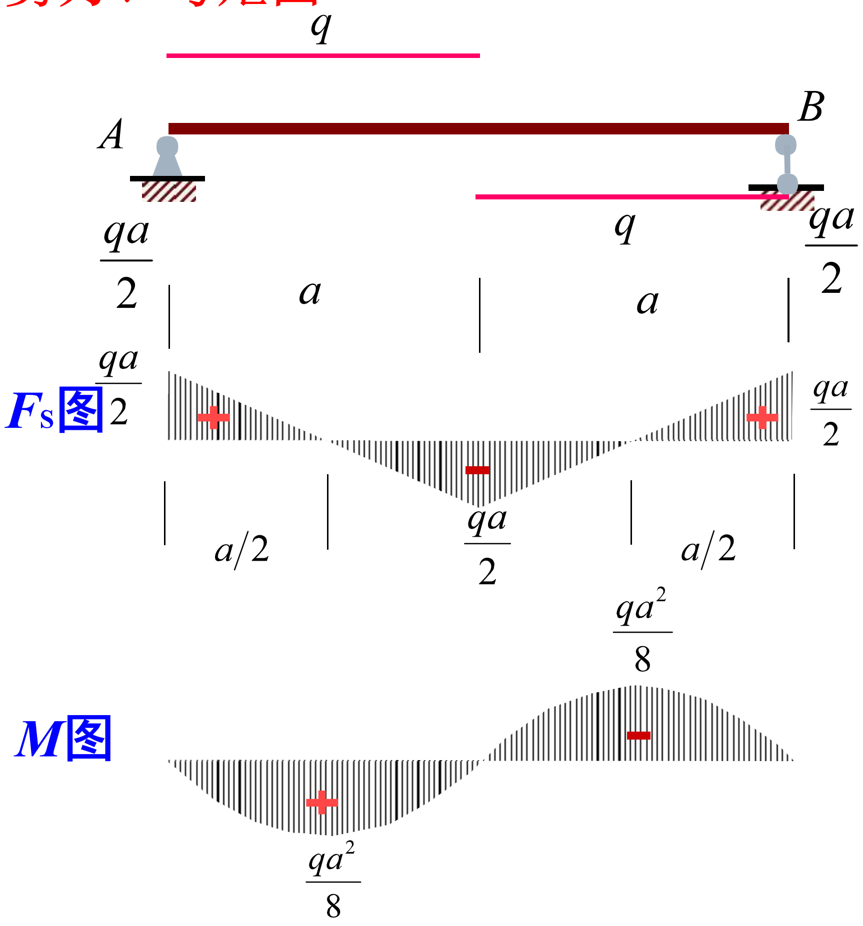
六、利用对称性作剪力、弯矩图

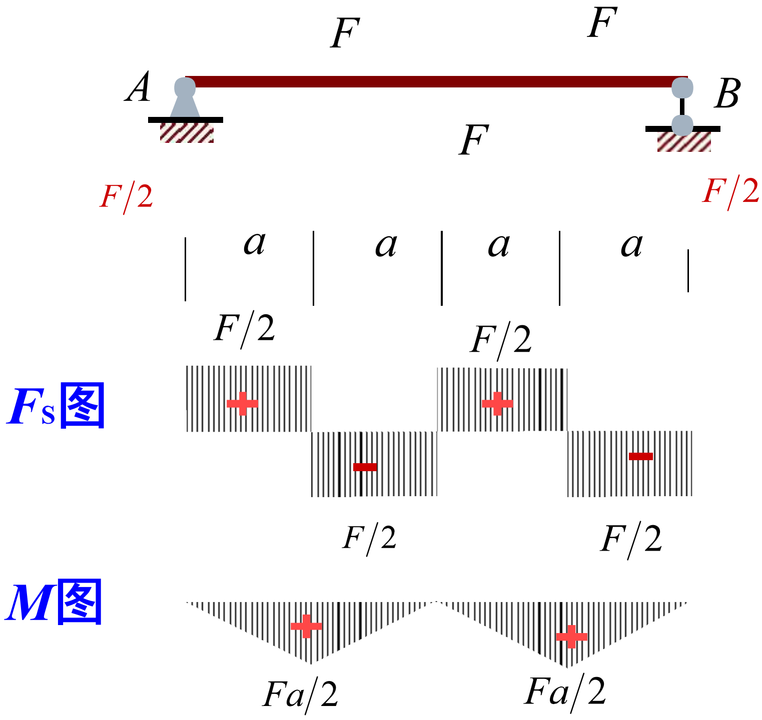
结构对称，

荷载反对称，

则F_S图关于对称轴正对称(大小相等，正负相同)，

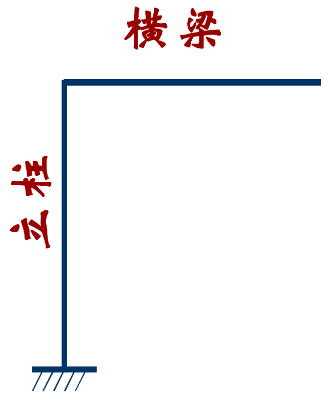
M图关于对称轴反对称（大小相等，正负相反）。





结构对称，荷载对称，则F_S图反对称，M图正对称

§ 4-3 平面刚架和曲杆的内力图



刚架---由两根或两根以上的杆件在联接处用刚节点联接起来的结构。

刚节点---刚性接头处，相连杆件间的夹角在受力时不变化，刚节点不仅能传递力，而且还能传递力矩。

平面刚架---刚架的各杆位于同一平面内。

当荷载作用在刚架平面内时，刚架各杆横截面上的内力分量通常有轴力、剪力和弯矩。轴力仍以拉为正，压为负。剪力仍以对分离体内一点取矩，顺时针为正，逆时针为负。

轴力图和剪力图：画在轴线的任一侧（通常正值画在刚架外侧），标明正负。

弯矩图：画在受拉的一侧，不标正负。

作刚架内力图的方法与步骤和梁基本相同，可将刚架看成是由不同取向的杆件组成。 设想人站在刚架内部环顾刚架各杆，则剪力、弯矩的符号规定和计算方法与梁相同。

求刚架内力的一步写出法：

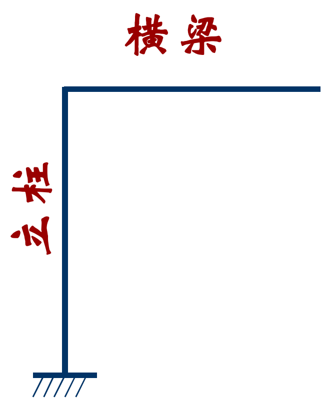
1、轴力等于截面一侧所有外力沿截面法线方向投影的代数和。拉正压负。

2、剪力等于截面一侧所有外力沿截面方向投影的代数和。左上右下为正。

3、弯矩等于截面一侧所有外力（包括外力偶）对截面形心的力矩的代数和。左顺右逆为正。

§4-3 平面刚架和曲杆的内力图

刚架：由两根或两根以上的杆件组成的并在连接处采用刚性连接的结构。



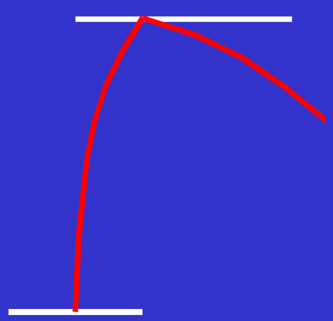
当杆件变形时，两杆连接处保持刚性，即角度（一般为直角）保持不变。

在平面荷载作用下，组成刚架的杆件横截面上一般存在轴力、剪力和弯矩三个内力分量。

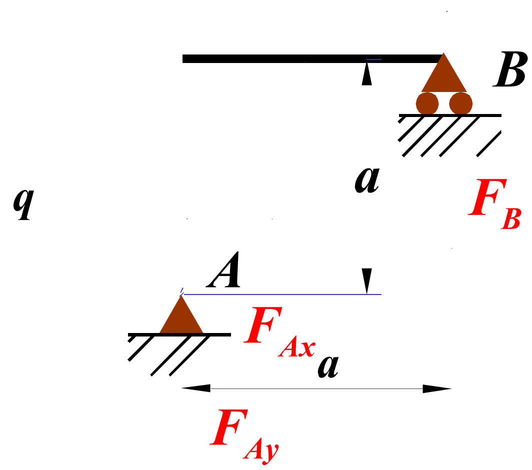
轴力图和剪力图：画在轴线的任一侧（通常正值画在外侧），标明正负。

弯矩图：画在受拉的一侧，不标明正负。

平面刚架的内力的计算和内力图的作法与直梁是一样的，不同点在于对刚架的各段杆要分别选取坐标（可用旋转坐标）。刚架的内力不仅有F_Q、M，可能还有F_N。



例：列出平面刚架的内力方程，并作内力图。



解：1、求支反力

$$\Sigma F_x = 0, F_{Ax} - qa = 0$$

$$F_{Ax} = qa$$

$$\Sigma M_A = 0, F_B a - qa \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$F_B = \frac{qa}{2}$$

$$\Sigma F_y = 0, -F_{Ay} + F_B = 0$$

$$F_{Ay} = F_B = \frac{qa}{2}$$

2、分段建立内力方程

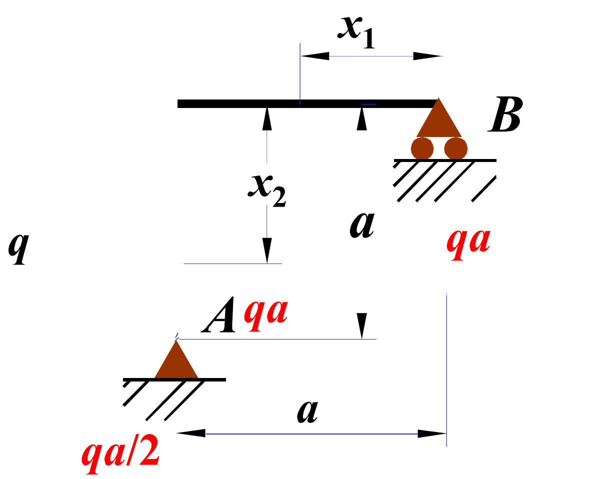
（刚节点处、集中力、集中力偶作用处及分布荷载的起点和终点、支座处均需分段）

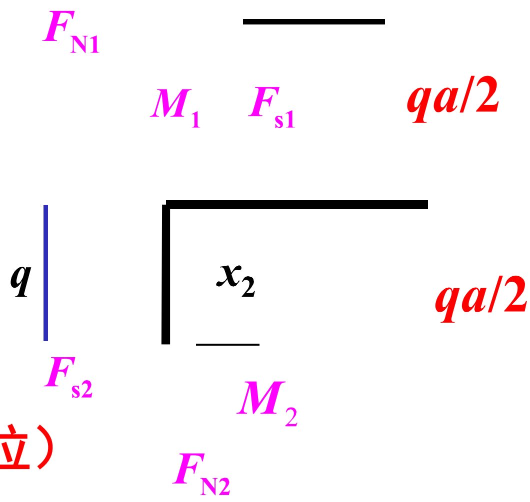
$$F_{N1}=0 \quad F_{s1}=-\frac{qa}{2}$$

$$M_1=\frac{qa}{2}x_1$$ （设下侧受拉）

$$F_{N2}=\frac{qa}{2} \qquad F_{s2}=qx_2$$

$$M_2=\frac{qa^2}{2}-qx_2\cdot\frac{x_2}{2}$$ （设右侧受拉）



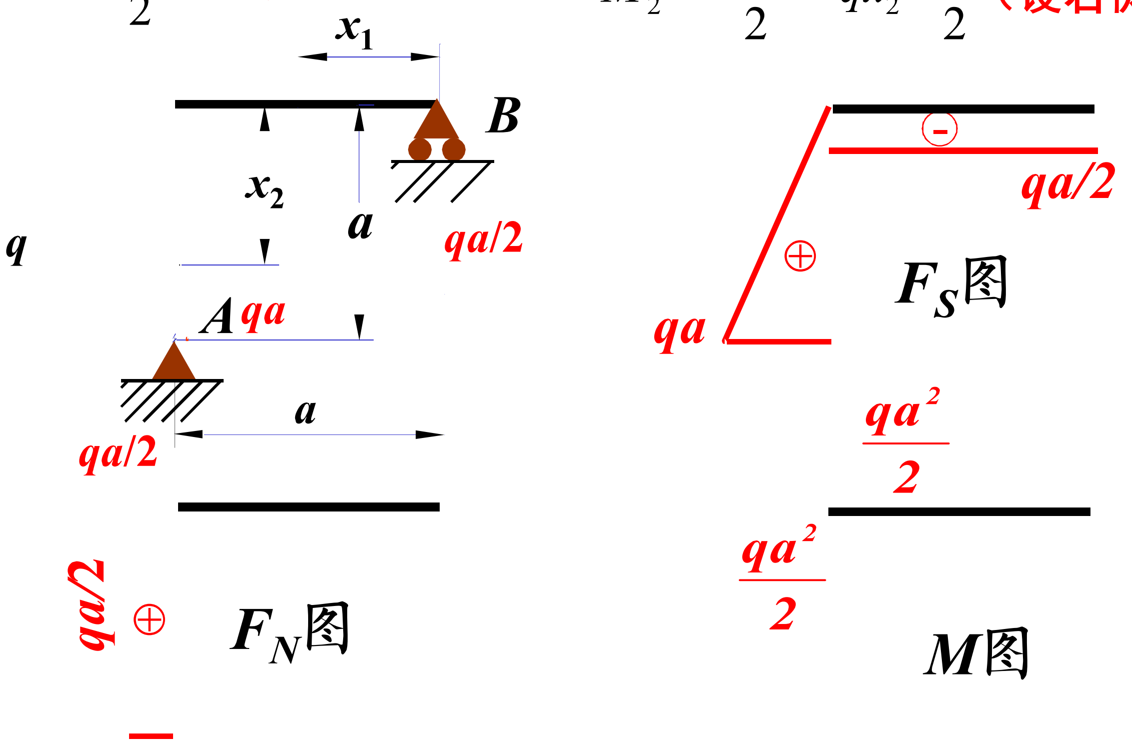


3、作F_N、F_S、M图（M图画在杆件受拉侧）

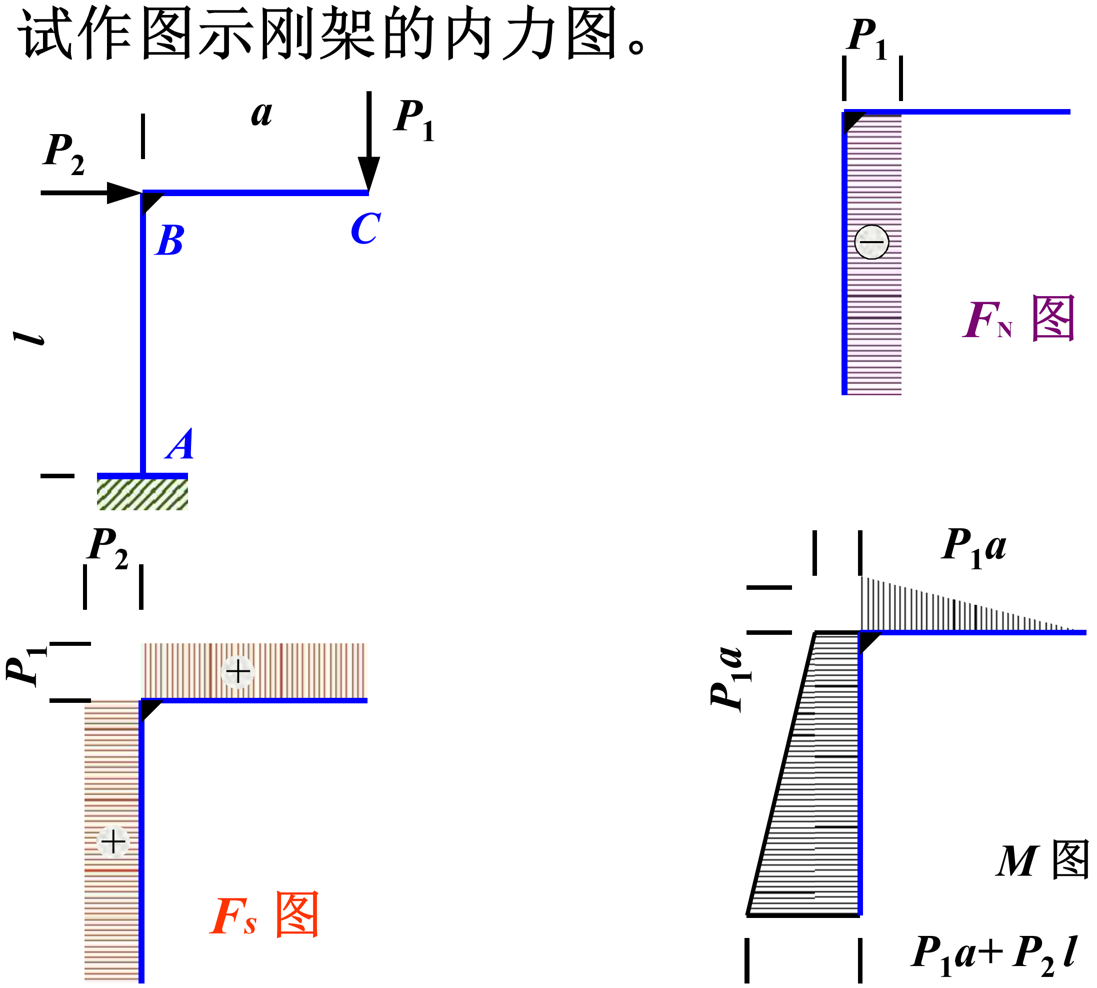
$$F_{s1} = -\frac{qa}{2} \qquad F_{s2} = qx_2 \qquad F_{N1} = 0 \qquad F_{N2} = \frac{qa}{2}$$

$$M_1 = \frac{qa}{2}x_1$$（设下侧受拉）

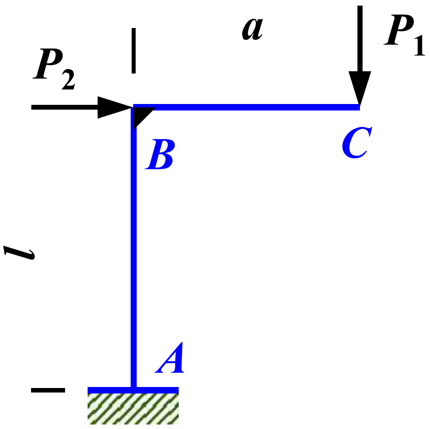
$$M_2 = \frac{qa^2}{2} - qx_2 \cdot \frac{x_2}{2}$$（设右侧受拉）

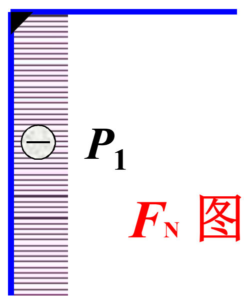


例 试作图示刚架的内力图。

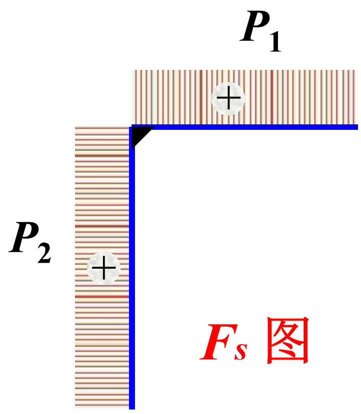


例 试作图示刚架的内力图。

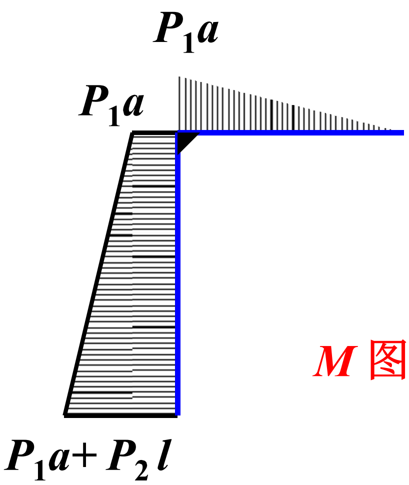




F_N 图

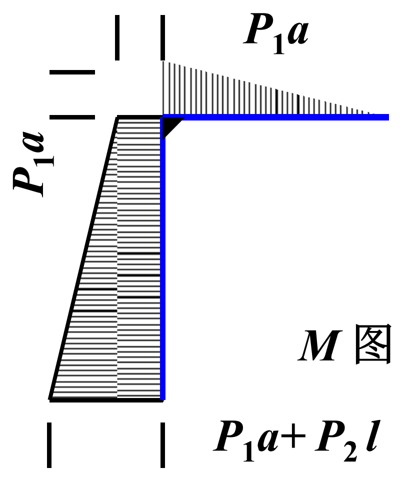


F_s 图

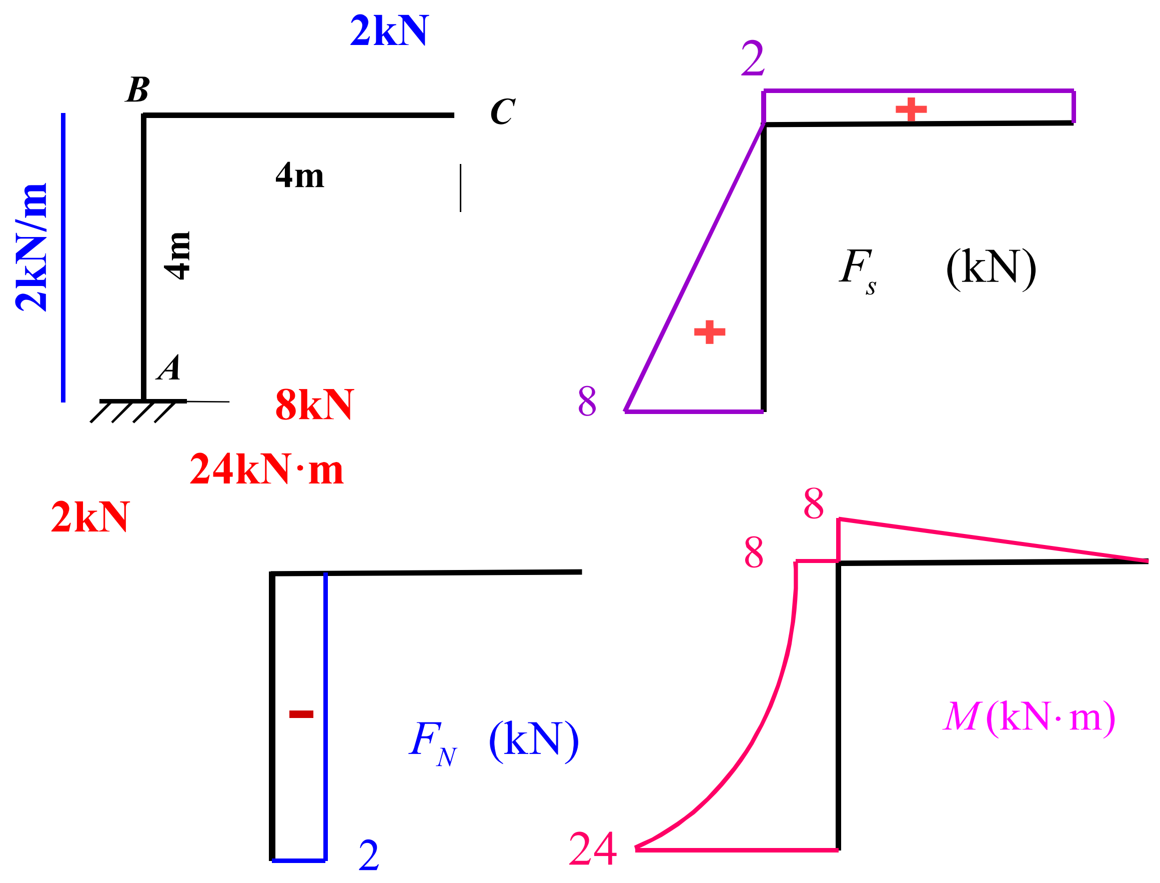


M 图

结论：平面刚架中若某角点处无集中力偶作用，则角两边弯矩数值相等且同侧（外侧或内侧）受拉。



例题 试作图示刚架的内力图



例：作图示刚架的内力图。

解：1、求支座约束力

$$\Sigma F_x = 0, F_{Ax} + 1 - 1\times 4 = 0$$

$$F_{Ax} = 3\,\text{kN}$$

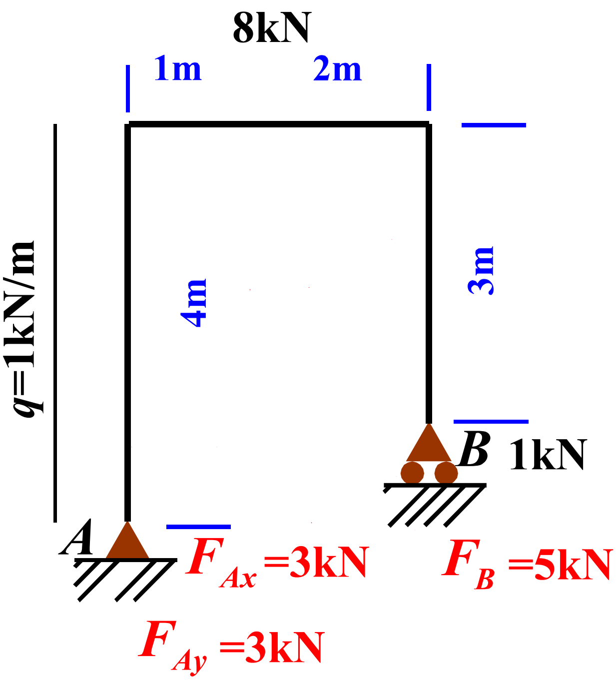
$$\Sigma M_A = 0, F_B \times 3 + 1\times 1 - 1\times 4\times 2 - 8\times 1 = 0$$

$$F_B = 5\,\text{kN}$$

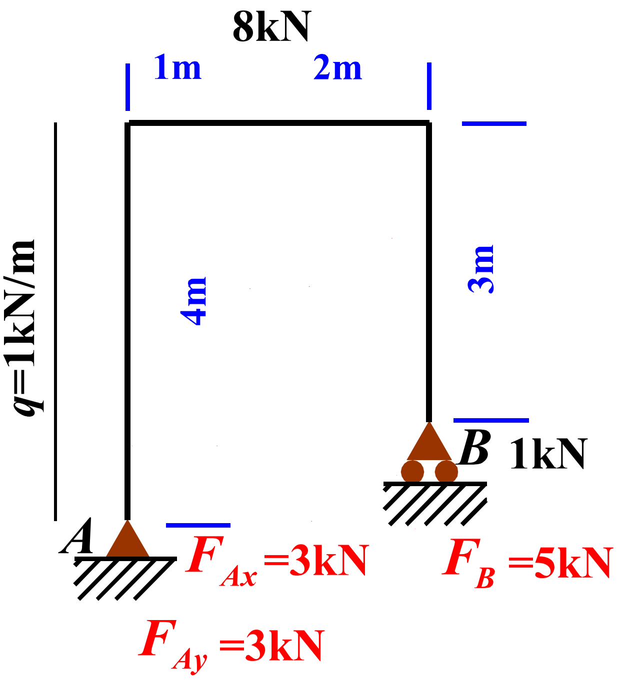
$$\Sigma F_y = 0, F_{Ay} + F_B - 8 = 0$$

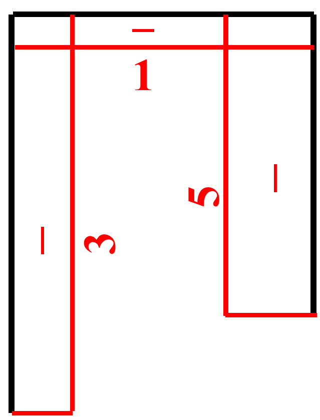
$$F_{Ay} = 8 - 5 = 3\,\text{kN}$$

将约束力大小标在图上



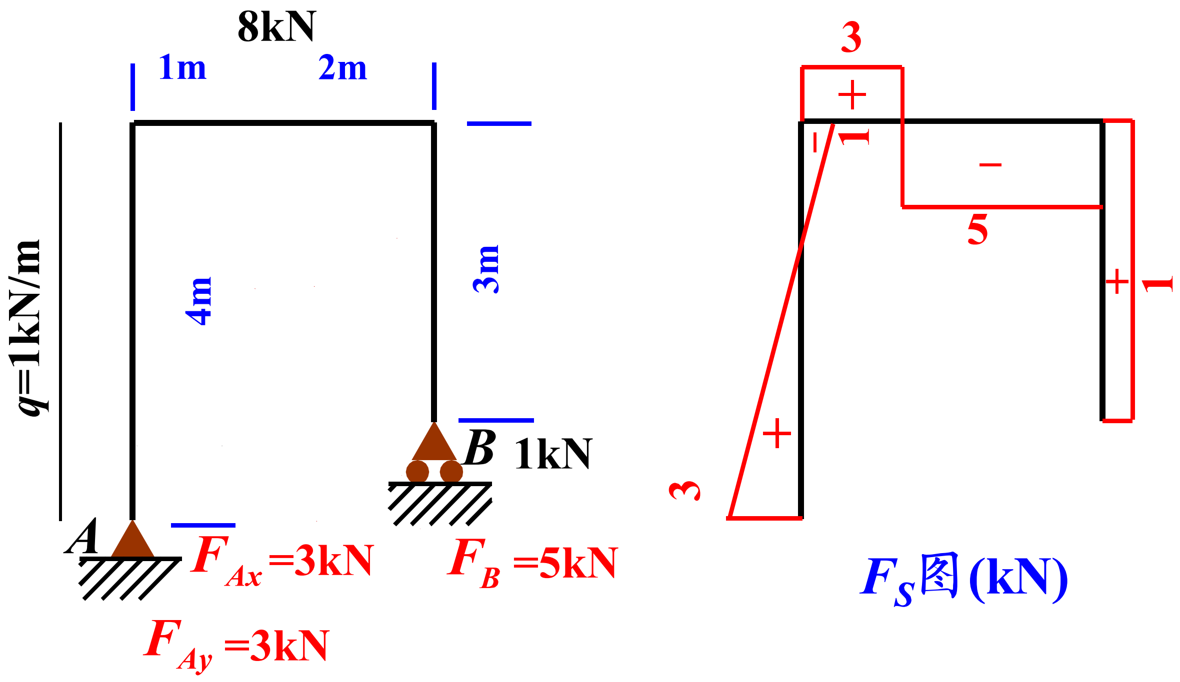
2、作F_N、F_S、M图（M图画在杆件受拉侧）





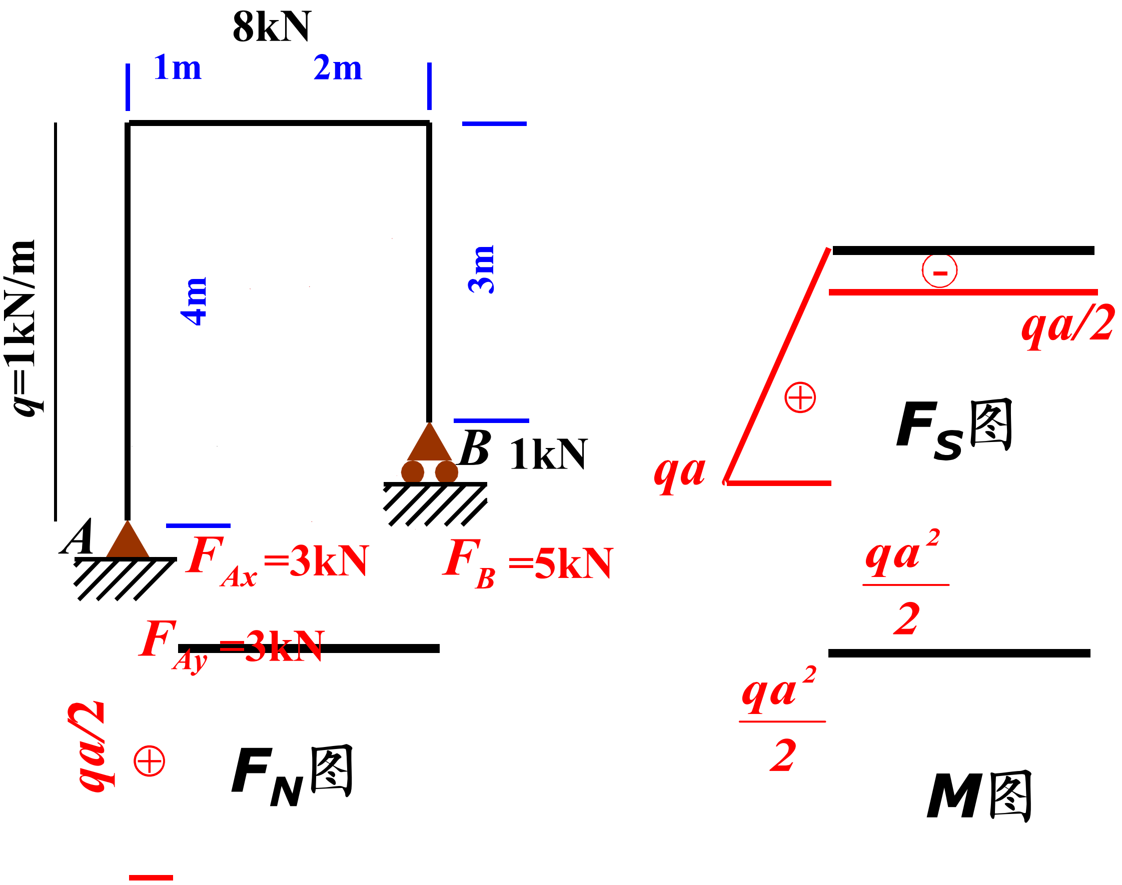
F_N图(kN)

2、作F_N、F_S、M图（M图画在杆件受拉侧）

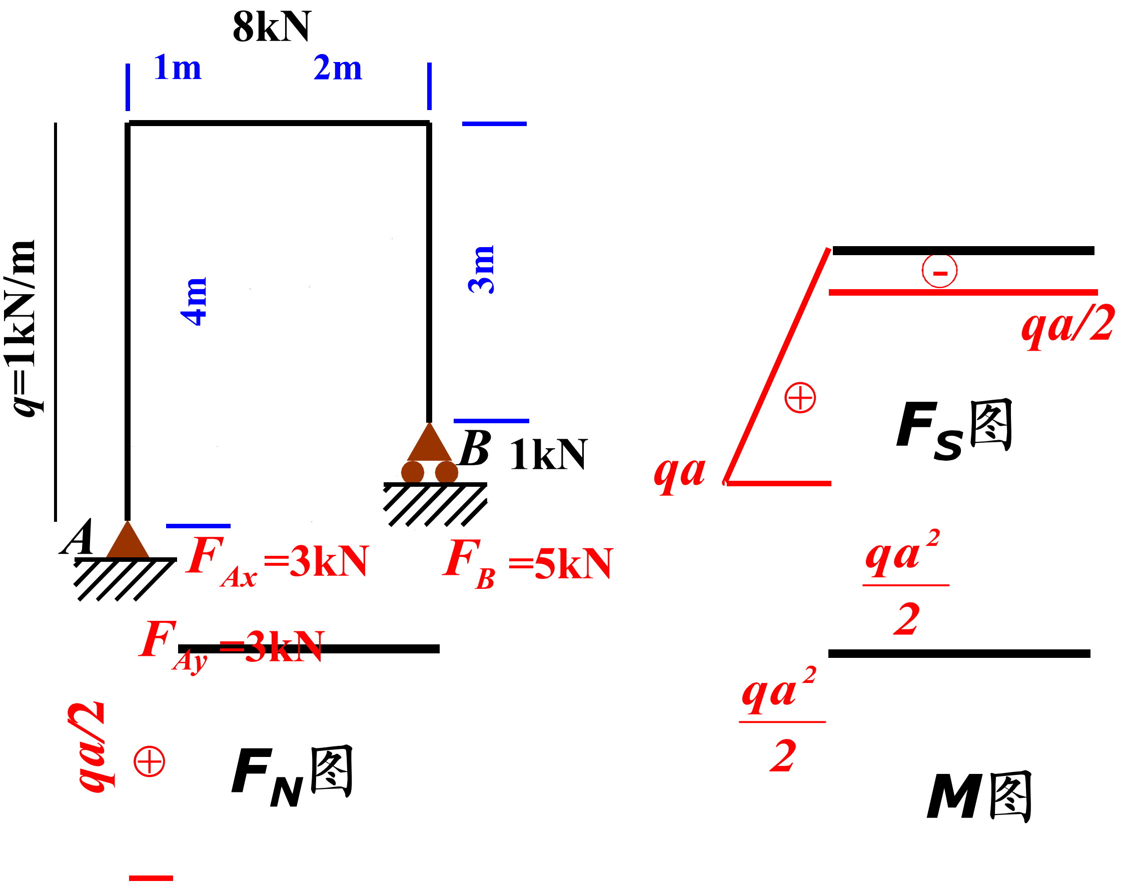


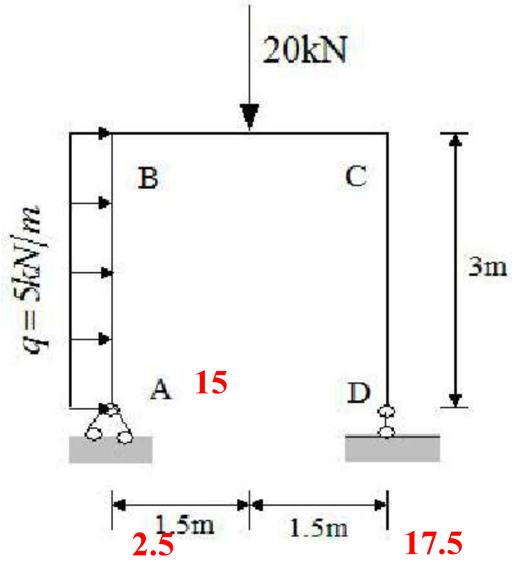
F_S图(kN)

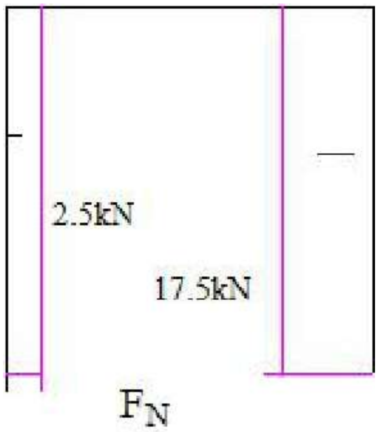
2、作F_N、F_S、M图（M图画在杆件受拉侧）

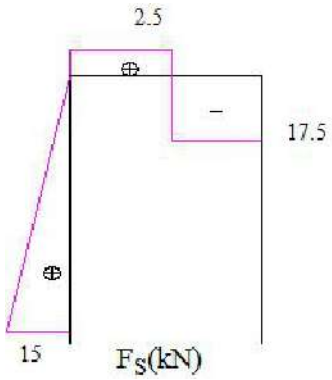


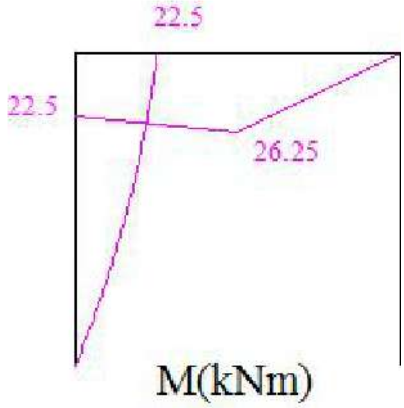
2、作F_N、F_S、M图（M图画在杆件受拉侧）

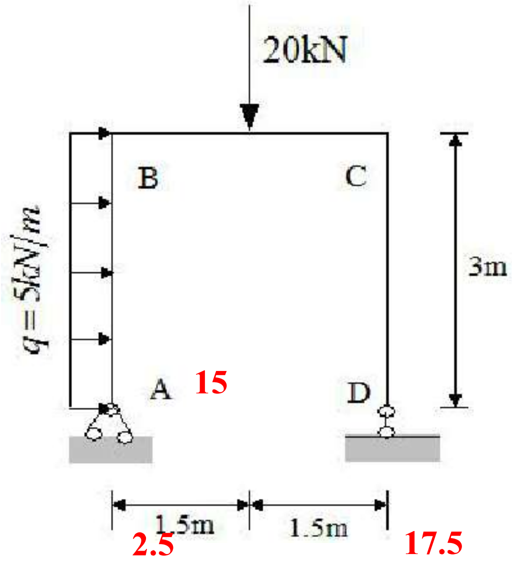


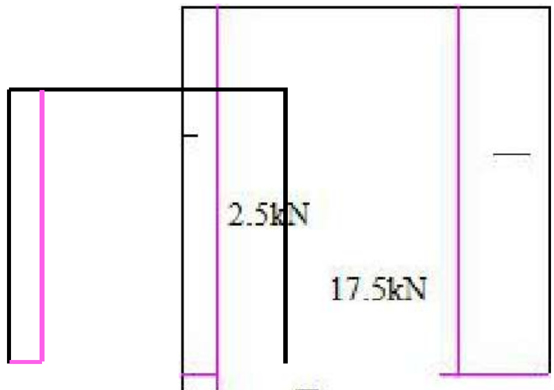

20kN
B
C
q = 5kN/m
3m
A
15
D
1.5m
1.5m
2.5
17.5


2.5kN
17.5kN
F_N

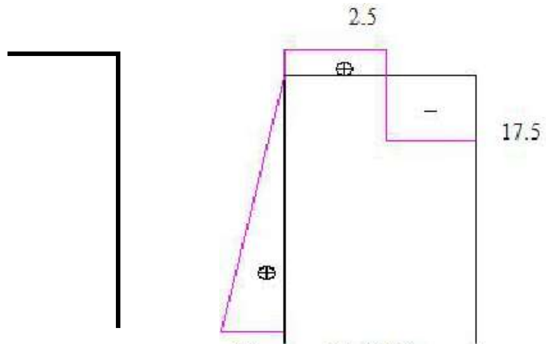

2.5
17.5
15
F_S(kN)


22.5
22.5
26.25
M(kNm)

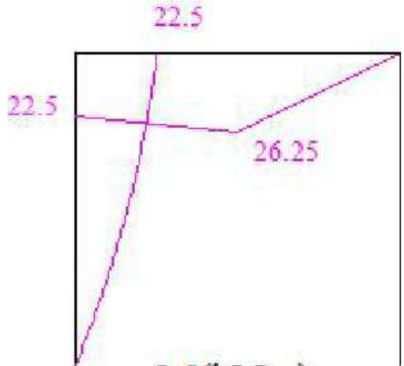

20kN
B
C
$q=5kN/m$
3m
A
15
D
1.5m
1.5m
2.5
17.5


2.5kN
17.5kN

F_N


2.5
17.5
15

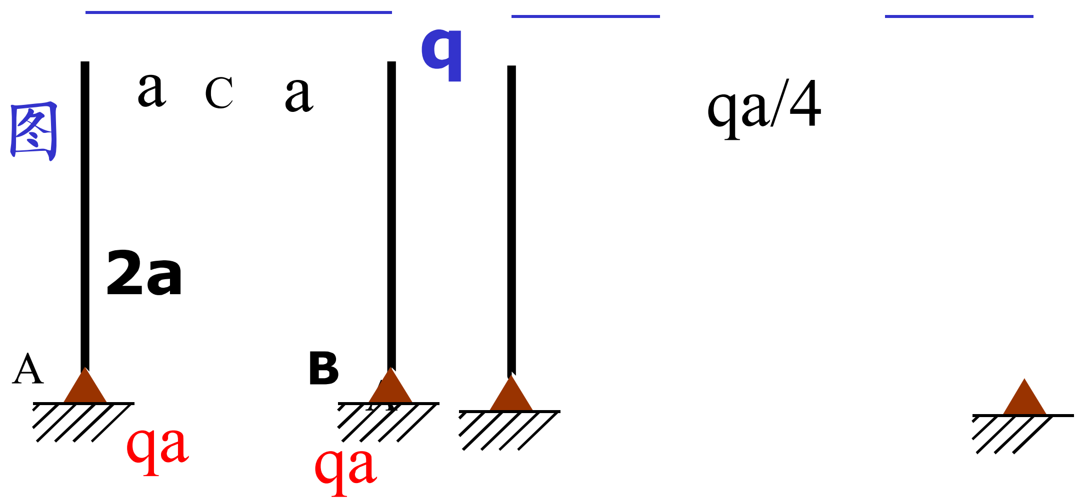
$F_S(kN)$

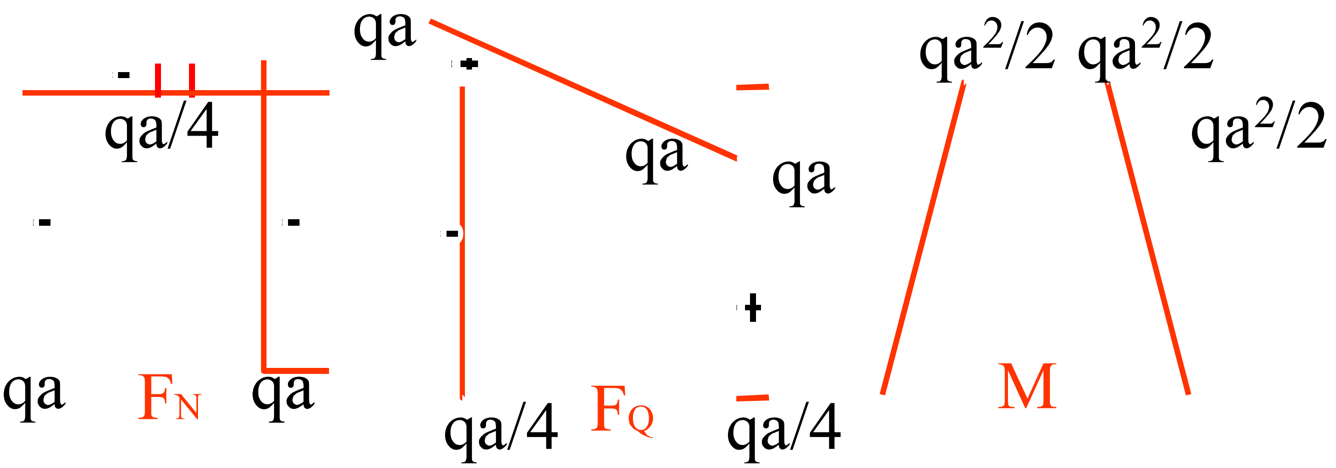

22.5
22.5
26.25

M(kNm)

例

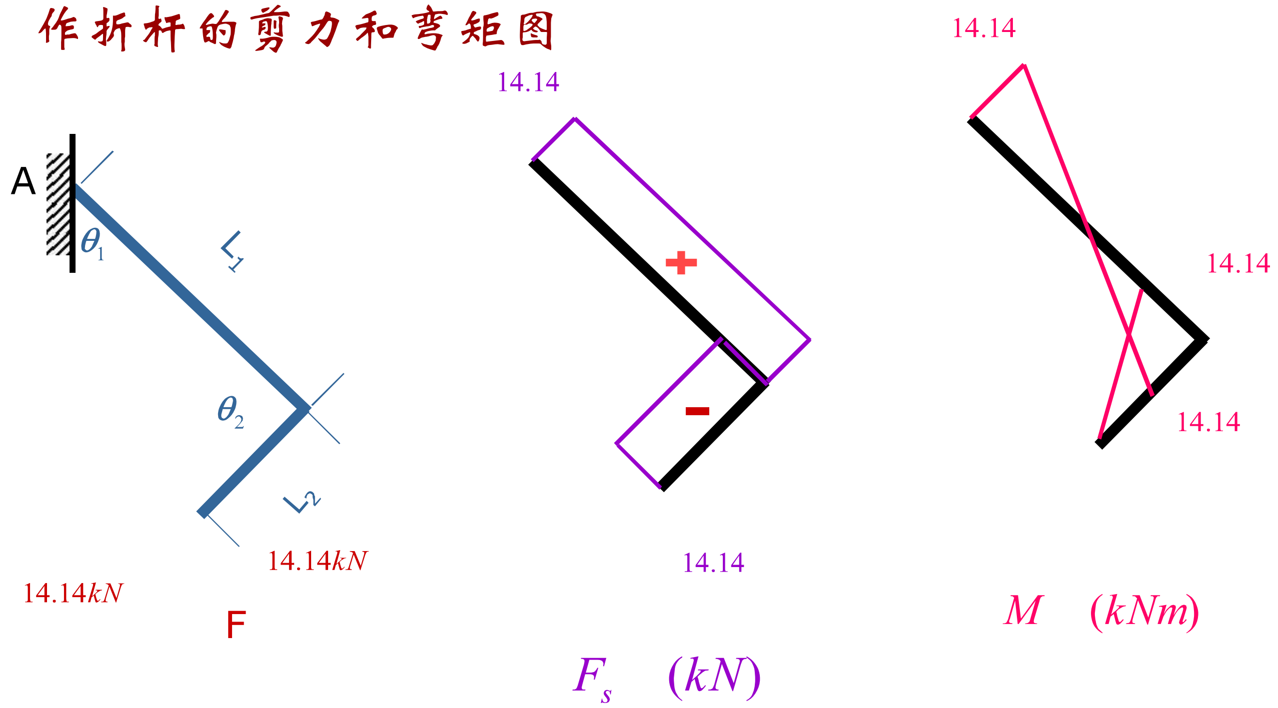
作内力图


q
a
C
a
2a
A
B
qa
qa
qa/4


qa
qa/4
-
-
-
qa
FN
qa
+
-
qa
qa
+
qa/4
FQ
qa/4
qa²/2
qa²/2
qa²/2
M

例题 4.18

等截面折杆ABC的A端固定在墙上，自由端承受集中力F=20kN.设$L_1=2m$，$L_2=1m$，$\theta_1=45^0$，$\theta_2=90^0$，试作折杆的剪力和弯矩图



平面曲杆的弯曲内力

平面曲杆———轴线是一平面曲线的杆件。

平面曲杆的内力情况及绘制方法与平面刚架相同。

求平面曲杆的内力的方法——截面法:

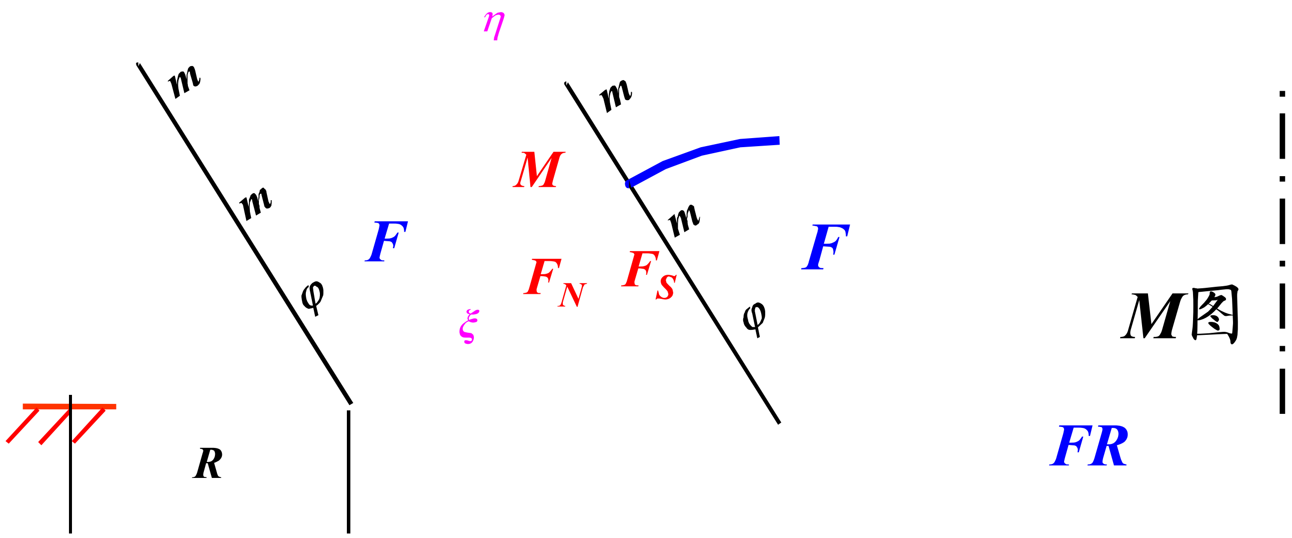
沿任意截面将曲杆切开，内力F_N、F_S、M按正值方向假设，根据平衡方程即可列出内力方程

内力符号规定:

F_N、F_S 同前

M——使轴线曲率增加的弯矩为正，M图画在受拉一侧，不标正负。

例：写出图示曲杆的内力方程，并作弯矩图。



解：用截面法

$$\Sigma F_{\xi}=0, F_{\mathrm{N}}(\varphi)=F\sin\varphi$$

$$\Sigma F_{\eta}=0, F_{s}(\varphi)=-F\cos\varphi$$

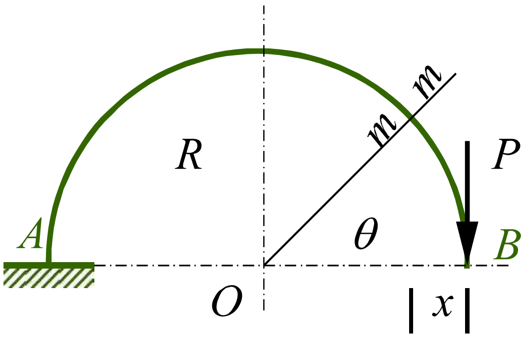
$$\Sigma M_{C}=0, M(\varphi)=-FR\sin\varphi$$

$\varphi=0^{\circ}$时，$M=0$

$\varphi=90^{\circ}$时，$M=-FR$

负号说明内侧受拉

例 已知：如图所示，P及R。试绘制F_s、M、F_N图。

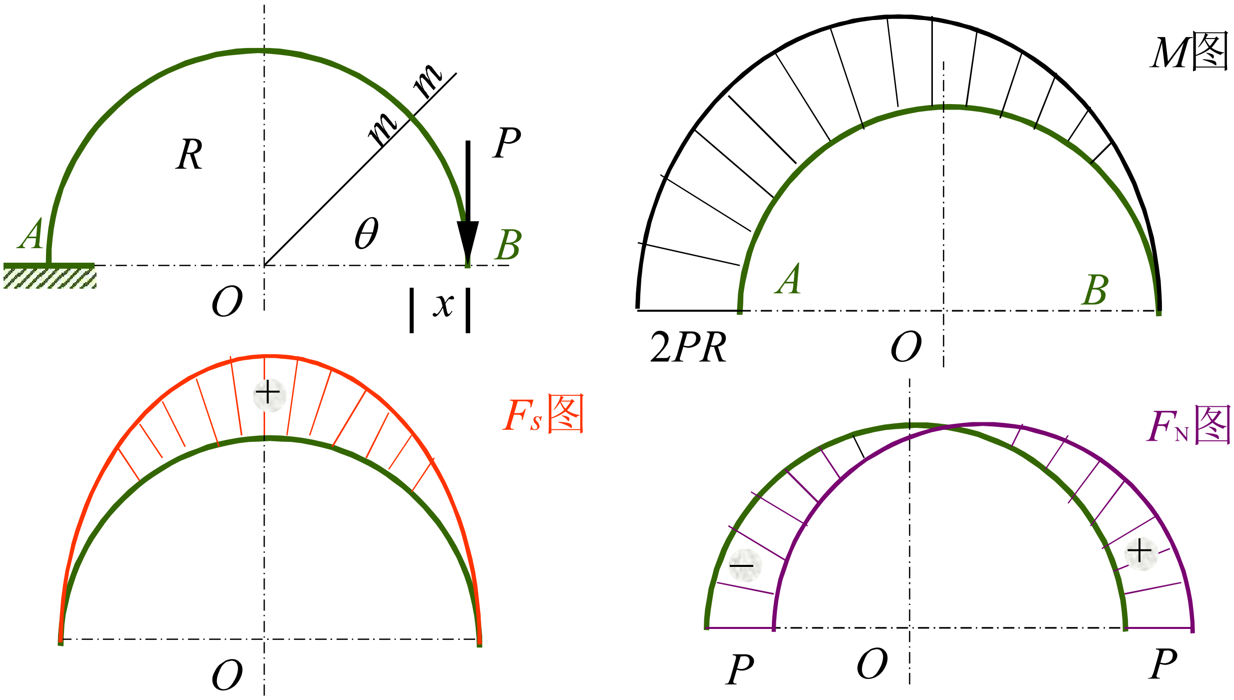


解：建立极坐标，O为极点，OB极轴，θ表示截面m–m的位置。

$$M(\theta) = Px = P(R - R\cos\theta) = PR(1 - \cos\theta) \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

$$F_s(\theta) = P_1 = P\sin\theta \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

$$F_N(\theta) = P_2 = P\cos\theta \quad (0 \le \theta \le \pi)$$



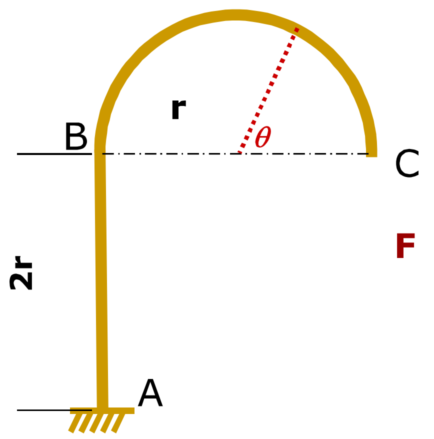
$$M(\theta) = Px = P(R - R\cos\theta) = PR(1-\cos\theta)\ \ (0 \le \theta \le \pi)$$

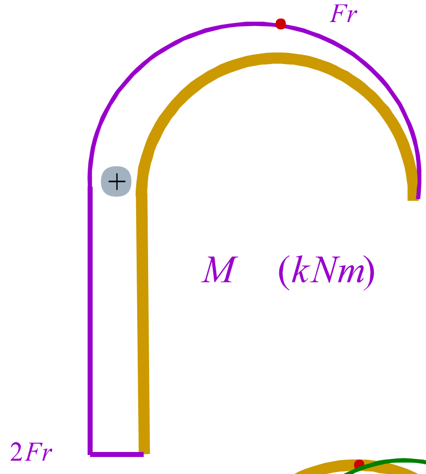
$$Q(\theta) = P_1 = P\sin\theta \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

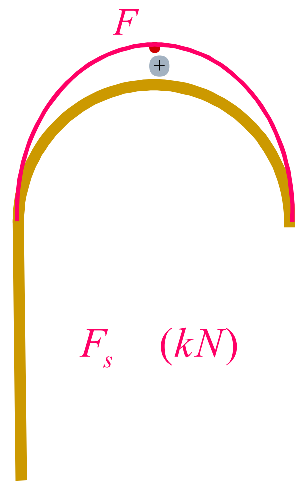
$$N(\theta) = P_2 = P\cos\theta \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

例题 4.19

图示杆ABC由直杆和半圆组成,试作该杆的内力图.







AB:

$$M = 2Fr \qquad F_N = -F$$

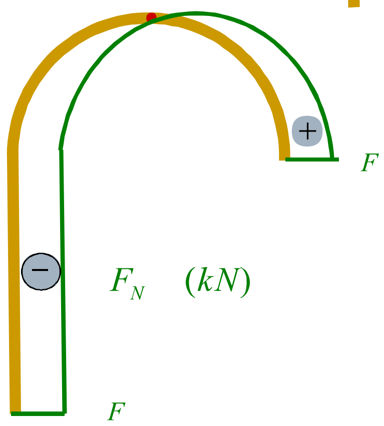
$$F_S = 0$$

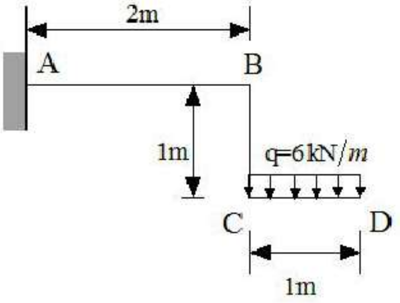
BC:

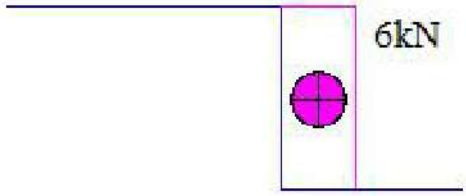
$$M = Fr(1 - \cos\theta)$$

$$F_N = F\cos\theta$$

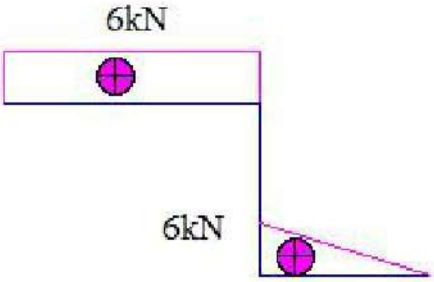
$$F_S = F\sin\theta$$



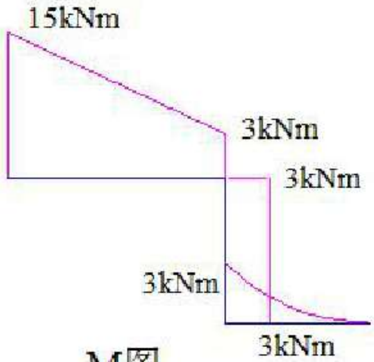




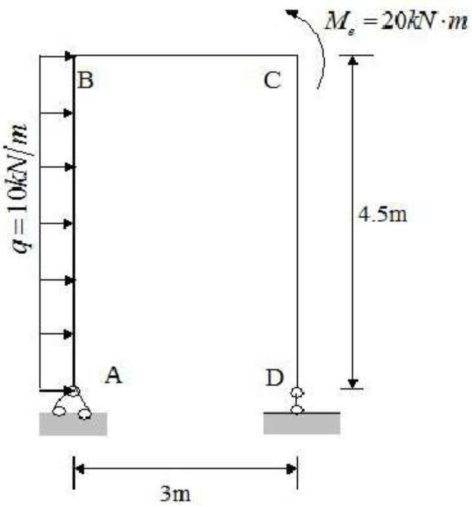
F_N图



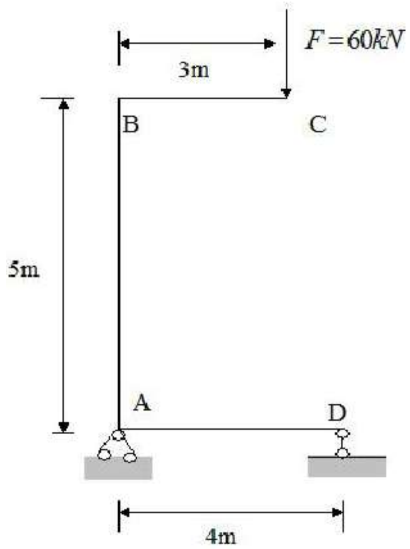
F_S图



M图



$M_e = 20kN \cdot m$
B
C
$q = 10kN/m$
4.5m
A
D
3m



$F = 60kN$
3m
B
C
5m
A
D
4m