

文章编号: 1000-4750(2016)02-0200-09

# 具有厚壁内衬圆筒的缠绕张力算法

康 超, 史耀耀, 何晓东, 俞 涛, 张 军

(西北工业大学现代设计与集成制造技术教育部重点实验室, 西安 710072)

**摘 要:** 缠绕张力作为缠绕工艺中的关键因素, 其合理设计直接影响制品性能。针对缠绕张力的设计, 提出缠绕张力算法。基于各向异性缠绕层弹性变形及各向同性内衬厚壁筒理论, 给出外压作用下缠绕层的径向应力及环向应力; 在弹性范围内采用应力叠加原理建立剩余张力与缠绕张力之间的解析算法。结合三种典型的张力缠绕模型, 给出剩余张力具体关系式; 分析等剩余张力, 得到不同特例下的剩余张力解析公式。依据该解析算法研究芯模内、外径比及张力锥度系数对各向同性材料缠绕层剩余张力分布的影响, 表明芯模内、外径比与锥度系数变化对缠绕层剩余张力分布有显著影响, 且该文算法简单、合理、可靠; 对各向异性复合材料缠绕层等剩余张力分析, 其结果与现有网格理论结果一致, 且该文缠绕张力上下层变化平缓, 易于张力控制的实现。

**关键词:** 剩余张力; 圆筒缠绕; 厚壁内衬; 锥度张力; 复合材料

中图分类号: TB33 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.07.0611

## ALGORITHM OF WINDING TENSION FOR CYLINDER WITH THICK-WALLED LINER

KANG Chao, SHI Yao-yao, HE Xiao-dong, YU Tao, ZHANG Jun

(Key Laboratory of Contemporary Design and Integrated Manufacturing Technology, Ministry of Education,  
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** As a key factor in winding process, reasonable design of winding tension directly affects the performance of productions. An algorithm to design winding tension is proposed for the design of winding tension. Considering the deformations of mandrel, radial and circumferential stresses of winding layers under external pressure are obtained through analyzing on the basis of anisotropic composite elastic theory and isotropic thick-walled cylinder elastic theory. Within the scope of the elastic limit and based on the stress superposition principle, the analytic algorithm between residual tension distribution and winding tension is established. By analyzing three typical tension models of filament winding, residual tension formulas are given. Furthermore, according to these formulas, different analytical formulas of winding tension are established through analyzing the uniform residual tension. The influence of inner to outer radius ratio of mandrel and taper coefficient on isotropic material residual tension distribution is investigated. The results indicate that changes of radius ration and taper coefficient have remarkable effects on residual tension distribution, while the algorithm to calculate the residual tension distribution is simple, reasonable and reliable. By analyzing uniform residual tension of the anisotropic composite, the result is found consistent with the existing netting theory, and the winding tensions of up and down layers change gently and are easy to be implemented.

**Key words:** residual tension; cylinder winding; thick-walled liner; taper tension; composite

收稿日期: 2014-07-12; 修改日期: 2015-01-19

基金项目: 国家自然科学基金项目(51375394)

通讯作者: 史耀耀(1959—), 男, 陕西人, 教授, 博士, 博导, 主要从事专用数控装备、机电控制及自动化研究(E-mail: shiyy@nwpu.edu.cn).

作者简介: 康 超(1985—), 男, 陕西人, 博士生, 主要从事纤维缠绕成型装备技术研究(E-mail: kaochao\_017@163.com);

何晓东(1982—), 男, 内蒙古人, 博士生, 主要从事复合材料带缠绕成型装备技术研究(E-mail: aqiaqia@gmail.com);

俞 涛(1985—), 男, 安徽人, 博士生, 主要从事复合材料带缠绕成型工艺研究(E-mail: scor00@163.com);

张 军(1989—), 男, 陕西人, 硕士生, 主要从事纤维缠绕成型工艺研究(E-mail: 474991607@qq.com).

随着工业技术的发展,有效利用材料、降低加工成本及制备技术的优化已成为制造业发展的趋势<sup>[1-2]</sup>。这种情况下,纤维缝合技术、树脂转移模塑成型技术(RTM)、树脂膜渗透成型技术(RFI)、低成本模具技术、低温低压固化技术、电子束化技术、缠绕技术及铺放技术等各种低成本技术应运而生。缠绕技术是发展较快的一种新型制造技术,已广泛应用于导弹壳体、火箭助推喷管、压力容器及各种管道等工程制造领域<sup>[3-4]</sup>。缠绕张力是影响缠绕制品的关键因素,对制品质量影响较大<sup>[4-6]</sup>。近年来,对其研究主要集中在张力稳定的算法控制和制品残余应力与缠绕张力理论关系的探究上<sup>[7-8]</sup>。

丁宝庚等<sup>[9]</sup>研究当前缠绕层对已缠绕完成部分的影响,依据薄壳圆筒挠度方程得到具有金属内衬筒体缠绕张力公式。郑长良等<sup>[10]</sup>提出虚-实结合逐层实化的有限元分析策略,模拟其缠绕工艺过程,将单元划分为虚实两类,实单元采用真实的材料常数,虚单元采用很小的刚度,使其不影响计算结果;缠绕过程中缠绕带的缠绕张力采用温度参数法控制,使其达到预定值,但该方法计算剩余张力的前提必须知道剩余张力与缠绕张力之间的关系。De等<sup>[8]</sup>基于大变形理论对线性正交缠绕线圈材料采用逆向求解获得残余应力与缠绕应力之间的解析式。Nozari<sup>[11]</sup>基于 Hakiel 非线性模型,考虑环境的影响,给出缠绕过程中,缠绕筒纸不发生褶皱与滑移情况下张力的最优解析式。许家忠等<sup>[12]</sup>介绍一种适用于热芯缠绕工艺的缠绕张力设计方法;考虑缠绕过程中温度引起的热应力,简化并给出了缠绕层环向应力与缠绕张力之间的关系,且考虑温度影响,建立等残余应力与缠绕张力的解析算法。刘成旭等<sup>[13]</sup>根据厚壁弹性理论将复合材料纤维层简化为各向同性体推导,得到剩余张力与缠绕张力关系。

基于以往缠绕张力研究的基础上,一些学者针对不同缠绕张力模型对制品缺陷影响进行了深入分析<sup>[14-16]</sup>。研究发现,缠绕层内部最终的张力并不等于缠绕时张力控制系统施加的张力,而是随着卷装直径的加大不断减小;恒张力收卷的结果是“内松外紧”,而使用恒力矩收卷又会造成“内紧外松”,这与实际情况一致;锥度收卷则相当于是采用了一种折中策略,通过锥度系数调整两种内张力分布的比例,以实现相对均匀的“内外紧,中间松”分布。但针对芯模变形引起纤维复合材料缠绕制品残余张力变化的研究,仍没有很好的解决。

本文考虑芯模弹性变形,给出具有厚壁内衬圆筒复合材料缠绕剩余张力与缠绕张力之间的关系,并讨论三种典型缠绕张力模型下各向同性材料剩余张力分布及各向异性材料等剩余张力分布下的缠绕张力。

## 1 纤维缠绕层变形和应力

本文纤维缠绕模型基于以下假设:1) 假设纤维缠绕层间无摩擦力的影响;2) 假设纤维缠绕层间紧密接触,无滑移发生;3) 假设纤维缠绕体只受均匀外压力作用,不计体力、温度场与轴向力的影响;4) 假设缠绕体变形均为线弹性变形,不发生塑性变形;5) 假设缠绕体为轴对称模型。纤维缠绕模型如图1所示, $a$ 、 $b$ 分别为芯模内、外壁半径。设下标带有“1”和“2”的符号分别表示芯模与缠绕层变量;下标“ $r$ ”和“ $\theta$ ”分别表示沿径向和环向的物理量; $u$ 、 $\varepsilon$ 、 $\sigma$ 、 $\nu$ 和 $E$ 分别表示位移、应变、应力、泊松比及弹性模量。

### 1.1 芯模径向刚度

缠绕芯模为各向同性体,其缠绕模型如图1所示。根据厚壁筒理论得芯模位移与径向应力为:

$$\begin{cases} u_{1r} = Ar + \frac{B}{r} \\ \sigma_{1r} = E_1 \left( \frac{1}{1-\nu_1} A - \frac{1}{1+\nu_1} \frac{B}{r^2} \right) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $A$ 、 $B$ 为位移通解系数; $r$ 为芯模半径。

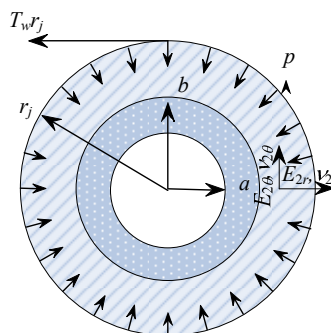


图1 缠绕模型横截面

Fig.1 Cross section of winding model

芯模内外壁边界条件:

$$\sigma_{1r} \Big|_{r=a} = 0, \sigma_{1r} \Big|_{r=b} = -P_1$$

式中,  $-P_1$ 为芯模外径  $r=b$  处所受径向应力。

引入芯模径向刚度<sup>[13]</sup>:

$$K = \frac{\sigma_{1r} \Big|_{r=b}}{u_{1r} \Big|_{r=b}} \quad (2)$$

将式(1)代入芯模边界条件及式(2),得芯模径向刚度:

$$K = \frac{(b^2 - a^2)E_1}{b[b^2(1 - \nu_1) + a^2(1 + \nu_1)]} \quad (3)$$

### 1.2 缠绕层几何方程与物理方程

小变形情况下,筒形缠绕层的径向位移与应变满足下面关系:

$$\varepsilon_{2r} = \frac{du_{2r}}{dr}, \quad \varepsilon_{2\theta} = \frac{u_{2r}}{r} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{2r} = \frac{1}{E_{2r}}\sigma_{2r} - \frac{\nu_{2\theta}}{E_{2\theta}}\sigma_{2\theta} \\ \varepsilon_{2\theta} = \frac{1}{E_{2\theta}}\sigma_{2\theta} - \frac{\nu_{2r}}{E_{2r}}\sigma_{2r} \end{cases} \quad (5)$$

### 1.3 缠绕层平衡方程

筒形纤维缠绕层满足平衡方程:

$$\frac{d\sigma_{2r}}{dr} + \frac{\sigma_{2r} - \sigma_{2\theta}}{r} = 0 \quad (6)$$

由式(4)和式(5)可得:

$$\sigma_{2r} = \left[ u'_{2r} + \frac{\nu_{2\theta}}{1 - \nu_{2\theta}\nu_{2r}} \times \left( \frac{u_{2r}}{r} + \nu_{2r}u'_{2r} \right) \right] E_{2r} \quad (7)$$

$$\sigma_{2\theta} = \frac{E_{2\theta}}{1 - \nu_{2\theta}\nu_{2r}} \left( \frac{u_{2r}}{r} + \nu_{2r}u'_{2r} \right) \quad (8)$$

将式(7)、式(8)代入平衡方程式(6)得:

$$u''_{2r} + \frac{1}{r}u'_{2r} - \frac{\beta^2}{r^2}u_{2r} = 0$$

式中,  $\beta = \sqrt{\frac{E_{2\theta}}{E_{2r}}}$ .

求解该微分方程,得通解:

$$u_{2r} = c_1 r^\beta + c_2 r^{-\beta} \quad (9)$$

式中,  $c_1, c_2$  为系数。

将位移通解式(9)分别代入式(7)和式(8)得:

$$\sigma_{2r} = c_1 S_1 r^{\beta-1} - c_2 S_2 r^{-\beta-1} \quad (10)$$

$$\sigma_{2\theta} = c_1 S_3 r^{\beta-1} + c_2 S_4 r^{-\beta-1} \quad (11)$$

式中:  $S_1 = \frac{\beta + \nu_{2\theta}}{1 - \nu_{2r}\nu_{2\theta}} E_{2r}$ ;  $S_2 = \frac{\beta - \nu_{2\theta}}{1 - \nu_{2r}\nu_{2\theta}} E_{2r}$ ;  $S_3 =$

$$\frac{1 + \beta\nu_{2r}}{1 - \nu_{2r}\nu_{2\theta}} E_{2\theta}$$
;  $S_4 = \frac{1 - \beta\nu_{2r}}{1 - \nu_{2r}\nu_{2\theta}} E_{2\theta}$ .

### 1.4 缠绕层应力

在缠绕过程中,芯模外表面与纤维缠绕层紧密贴合,则接触面上的径向位移与径向应力满足连续条件,其模型如图1所示,图中由缠绕张力  $T_w(r_j)$  所产生的径向外压应力  $P = T_w(r_j)/r_j$  (其中,

$T_w(r_j) = F_j \cos \theta$ ,  $T_w(r_j)$  始终为环向缠绕分力,  $F_j$  为沿纤维缠绕方向的合力,  $\theta$  为缠绕角)。

缠绕层内、外壁边界条件:

$$\sigma_{2r}|_{r=b} = -P_1, \quad \sigma_{2r}|_{r=r_j} = -P$$

芯模及缠绕层在半径  $b$  处满足连续条件:

$$\sigma_{2r}|_{r=b} = \sigma_{1r}|_{r=b}$$

由连续条件及芯模径向刚度式(2),则缠绕层内、外壁边界条件转化为:

$$\begin{cases} \sigma_{2r}|_{r=b} = K \times u_{1r}|_{r=b} \\ \sigma_{2r}|_{r=r_j} = -P \end{cases} \quad (12)$$

将式(3)和式(10)代入纤维缠绕层边界条件式(12)得:

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{H_2 \left(\frac{r_j}{b}\right)^{2\beta}}{H_1 S_2 + H_2 S_1 \left(\frac{r_j}{b}\right)^{2\beta}} \frac{1}{r_j^{\beta-1}} P \\ c_2 = \frac{H_1 r_j^{\beta+1}}{H_1 S_2 + H_2 S_1 \left(\frac{r_j}{b}\right)^{2\beta}} P \end{cases} \quad (13)$$

式中:  $H_1 = Kb - S_1$ ,  $H_2 = Kb + S_2$ 。

将式(13)代入式(10)得缠绕层径向应力:

$$\sigma_{2r} = -\frac{H_1 S_2 + H_2 S_1 \left(\frac{r}{b}\right)^{2\beta}}{H_1 S_2 + H_2 S_1 \left(\frac{r_j}{b}\right)^{2\beta}} \left(\frac{r}{r_j}\right)^{-\beta-1} P \quad (14)$$

同理,由式(13)及式(11)得缠绕层环向应力:

$$\sigma_{2\theta} = \frac{H_1 S_4 - H_2 S_3 \left(\frac{r}{b}\right)^{2\beta}}{H_1 S_2 + H_2 S_1 \left(\frac{r_j}{b}\right)^{2\beta}} \left(\frac{r}{r_j}\right)^{-\beta-1} P \quad (15)$$

## 2 缠绕层剩余张力分析

由于本文圆筒变形为小变形,且作用在纤维缠绕层上的张力在弹性极限范围内,此条件均符合弹性叠加原理要求。依此,圆筒在缠绕完第  $n$  层后,作用在第  $i$  缠绕层上总的环向内应力  $\sigma'_{2\theta}(r_i, r_n)$  为第  $i$  层缠绕张力  $T_w(r_i)$  产生的应力及第  $i$  层到第  $n$  层各层对其产生的应力影响之和。依此建立圆筒环向内应力公式:

$$\sigma'_{2\theta}(r_i, r_n) = \frac{T_w(r_i)}{h} + \sigma_{2\theta}(i, i+1) + \dots + \sigma_{2\theta}(i, n) = \frac{T_w(r_i)}{h} + \sum_{j=i+1}^n \sigma_{2\theta}(i, j) \quad (16)$$

式中： $h$  为缠绕每层厚度； $\sigma_{2\theta}(i, i+1), \dots, \sigma_{2\theta}(i, n)$  分别表示第  $(i+1)$  层缠绕张力对第  $i$  层产生的环向内应力，...，第  $n$  层缠绕张力对第  $i$  层产生的环向内应力。

将式(15)代入式(16)，且两边同乘缠绕层厚度  $h$ ，得剩余张力：

$$T(r_i) = h\sigma'_{2\theta}(r_i, r_n) = T_w(r_i) + h(H_1S_4 - H_2S_3 \left(\frac{r_i}{b}\right)^{2\beta}) (r_i)^{-\beta-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\left(\frac{1}{r_j}\right)^{-\beta-1} \frac{T_w(r_j)}{r_j}}{H_1S_2 + H_2S_1 \left(\frac{r_j}{b}\right)^{2\beta}}$$

考虑缠绕层厚度  $b$  较小，可利用积分代替累加，剩余张力分布公式为：

$$T(r_i) = T_w(r_i) + \left( H_1S_4 - H_2S_3 \left(\frac{r_i}{b}\right)^{2\beta} \right) (r_i)^{-\beta-1} \int_{r_i}^{r_n} \frac{\left(\frac{1}{r_j}\right)^{-\beta-1} \frac{T_w(r_j)}{r_j}}{H_1S_2 + H_2S_1 \left(\frac{r_j}{b}\right)^{2\beta}} dr_j \quad (17)$$

以  $R$  替换自变量  $r_j$  得：

$$T(r_i) = T_w(r_i) + \left( H_1S_4 - H_2S_3 \left(\frac{r_i}{b}\right)^{2\beta} \right) (r_i)^{-\beta-1} \int_{r_i}^{r_n} \frac{\left(\frac{1}{R}\right)^{-\beta-1} \frac{T_w(R)}{R}}{H_1S_2 + H_2S_1 \left(\frac{R}{b}\right)^{2\beta}} dR \quad (18)$$

引入  $m = \frac{r_n}{b}$ ， $x = \frac{r_i}{b}$ ， $\rho = \frac{R}{b}$ ， $(1 \leq x \leq m)$ ， $x$  为

缠绕层径向比)得：

$$T(x) = T_w(x) + (H_1S_4 - H_2S_3(x)^{2\beta})(x)^{-\beta-1} \int_x^m \frac{\rho^\beta T_w(\rho)}{H_1S_2 + H_2S_1 \rho^{2\beta}} d\rho \quad (19)$$

### 3 不同缠绕张力下的剩余张力分析

典型张力模型主要有恒张力模型、恒力矩模型及锥度模型，本文针对不同的情况给出剩余张力分布公式。

#### 3.1 恒缠绕张力模型

设缠绕恒张力  $T_w(x) = t$ ，由式(19)可得：

$$T(x) = t \left[ 1 + (H_1S_4 - H_2S_3(x)^{2\beta})(x)^{-\beta-1} \int_x^m \frac{\rho^\beta}{H_1S_2 + H_2S_1 \rho^{2\beta}} d\rho \right] \quad (20)$$

#### 3.2 恒力矩模型

设力矩  $T_w(x) = \frac{t}{x}$ ，由式(19)可得：

$$T(x) = t \left[ \frac{1}{x} + (H_1S_4 - H_2S_3(x)^{2\beta})(x)^{-\beta-1} \int_x^m \frac{\rho^{\beta-1}}{H_1S_2 + H_2S_1 \rho^{2\beta}} d\rho \right] \quad (21)$$

#### 3.3 锥度张力

1) 设线性锥度  $T_w(x) = t(1 - \kappa x)$  ( $\kappa$  为锥度系数)，由式(19)可得：

$$T(x) = t \left[ 1 - \kappa x + (H_1S_4 - H_2S_3(x)^{2\beta})(x)^{-\beta-1} \int_x^m \frac{\rho^\beta (1 - \kappa \rho)}{H_1S_2 + H_2S_1 \rho^{2\beta}} d\rho \right] \quad (22)$$

2) 设双曲锥度  $T_w(x) = t \left( 1 + \kappa \frac{1-x}{x} \right)$  由式(19)

可得：

$$T(x) = t \left[ 1 + \kappa \frac{1-x}{x} + (H_1S_4 - H_2S_3(x)^{2\beta})(x)^{-\beta-1} \int_x^m \frac{\rho^{\beta-1} [\rho + \kappa(1-\rho)]}{H_1S_2 + H_2S_1 \rho^{2\beta}} d\rho \right] \quad (23)$$

### 4 等剩余张力分析

同理，根据弹性叠加原理，在缠绕完第  $n$  层后，作用在第  $i$  层上的总径向应力为第  $i$  径向应力及第  $i$  层上各层对其产生的应力之和。则总径向应力为：

$$\sigma'_{2r}(r_i, r_n) = \sigma_{2r}(i, i) + \sigma_{2r}(i, i+1) + \dots + \sigma'_{2r}(i, n) = \sum_{j=i}^n \sigma_{2r}(i, j) \quad (24)$$

将式(14)代入式(24)，得：

$$\sigma'_{2r}(r_i, r_n) = \sum_{j=i}^n \frac{H_1S_2 + H_2S_1 \left(\frac{r_i}{b}\right)^{2\beta}}{H_1S_2 + H_2S_1 \left(\frac{r_j}{b}\right)^{2\beta}} \cdot \left(\frac{r_i}{r_j}\right)^{-\beta-1} \frac{T_w(r_j)}{r_j} - \left[ H_1S_2 + H_2S_1 \left(\frac{r_i}{b}\right)^{2\beta} \right]$$

$$\sum_{j=i}^n \frac{\left(\frac{r_i}{r_j}\right)^{-\beta-1}}{H_1 S_2 + H_2 S_1 \left(\frac{r_j}{b}\right)^{2\beta}} \frac{T_w(r_j)}{r_j}$$

考虑缠绕层厚度较小, 可利用积分代替累加, 剩余张力分布公式为:

$$\sigma'_{2r}(r_i, r_n) = -\frac{1}{h} \left[ H_1 S_2 + H_2 S_1 \left(\frac{r_i}{b}\right)^{2\beta} \right] \left(\frac{b}{r_i}\right)^{\beta+1} \times \int_{r_i}^{r_n} \frac{T_w(r_j)}{H_1 S_2 + H_2 S_1 \left(\frac{r_j}{b}\right)^{2\beta}} \left(\frac{r_j}{b}\right)^{\beta+1} \left(\frac{b}{r_j}\right) d\left(\frac{r_j}{b}\right) \quad (25)$$

以  $R$  替换自变量  $r_j$ , 则其缠绕张力  $T_w(r_j)$  变为  $T_w(R)$ , 式(25)化为:

$$\sigma'_{2r}(r_i, r_n) = -\frac{1}{h} \left[ H_1 S_2 + H_2 S_1 \left(\frac{r_i}{b}\right)^{2\beta} \right] \left(\frac{b}{r_i}\right)^{\beta+1} \times \int_{r_i}^{r_n} \frac{T_w(R)}{H_1 S_2 + H_2 S_1 \left(\frac{R}{b}\right)^{2\beta}} \left(\frac{R}{b}\right)^{\beta+1} \left(\frac{b}{R}\right) d\left(\frac{R}{b}\right) = -\frac{1}{h} [H_1 S_2 + H_2 S_1 (x)^{2\beta}] (x)^{-\beta-1} \cdot \int_x^m \frac{\rho^\beta T_w(\rho)}{H_1 S_2 + H_2 S_1 \rho^{2\beta}} d\rho \quad (26)$$

根据最佳张力制度的选择要求, 在制品固化后整个制品的剩余张力为常数  $T$ , 即  $T(x)=T$ , 则  $\sigma'_{2r}(i, n), \sigma'_{2\theta}(i, n)$  存在如下关系:

$$\sigma'_{2r}(i, n) = -\frac{T'}{r_i} = -\frac{(r_n - r_i) \sigma'_{2\theta}(i, n)}{r_i} = -\frac{r_n - r_i}{r_i} \frac{T}{h} \quad (27)$$

式中,  $T'$  为  $r_i$  外层所作用剩余张力。

由式(19)、式(26)、式(27)可得等剩余张力分布公式:

$$T_w(x) = \left[ 1 + \frac{\frac{H_2 S_3}{H_1 S_4} (x)^{2\beta} - 1}{\frac{H_2 S_1}{H_1 S_2} (x)^{2\beta} + 1} \frac{m-x}{x} \right] T \quad (28)$$

特例1: 缠绕层为各向同性材料  $E_{2r}=E_{2\theta}, \beta=1, S_3=S_1, S_4=S_2$  代入式(28)得:

$$T_w(x) = \left[ 1 + \frac{\frac{H_2 S_1}{H_1 S_2} (x)^2 - 1}{\frac{H_2 S_1}{H_1 S_2} (x)^2 + 1} \frac{m-x}{x} \right] T \quad (29)$$

特例2: 缠绕层与芯模材料相同且均为各向同性  $E_1=E_{2r}=E_{2\theta}, \nu_1=\nu_{2r}=\nu_{2\theta}, \frac{H_2 S_1}{H_1 S_2} = -\frac{b^2}{a^2}$ , 代入式(29)得:

$$T_w(x) = \left[ 1 + \frac{x^2 + \lambda^2}{x^2 - \lambda^2} \frac{m-x}{x} \right] T \quad (30)$$

式中:  $x = \frac{r_i}{b}, m = \frac{r_n}{b}, \lambda = \frac{a}{b}$

## 5 各向同性材料分析

考虑文献[17]中环向缠绕圆柱形容器参数: 内筒和缠绕层材料参数为:  $\nu_1=0.3, E_1=210 \text{ GPa}$ ; 取钢带厚度  $h=4 \text{ mm}$ , 芯模外径  $b=500 \text{ mm}$ ,  $x$  取值范围为[1,1.2]。

### 5.1 恒张力缠绕

由式(20)及上述参数可得到剩余缠绕张力:

$$T(x) = t \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( 1 + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^2 \right) \ln \frac{m^2 - \lambda^2}{x^2 - \lambda^2} \right] \quad (31)$$

由式(31)可得恒张力下剩余张力分布如图2所示。一般圆筒壁厚与外径比小于1:20即认为薄壁圆筒, 因此, 本文 $\lambda$ 取值按照芯模壁厚与外径比大于1:20, 即为厚壁筒。

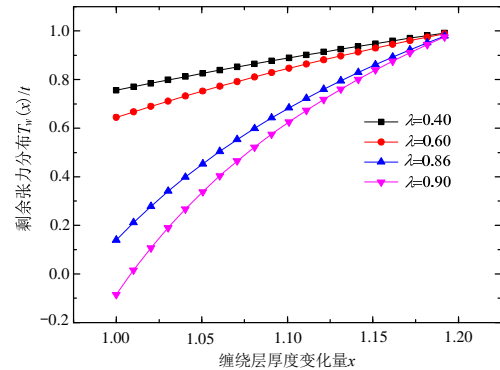


图2 恒张力下剩余张力分布

Fig.2 Residual tension distribution under constant winding tension

图2中剩余张力随芯模内、外径比 $\lambda$ 的增大而减小; 芯模内、外径比 $\lambda$ 增大到0.90时,  $T(x)/t$ 在缠绕层向比 $x=1$ 处为负值, 这不是实际需要的结果, 所以恒张力有一定的限制, 即保证:

$$1 - \frac{1}{2} \left( 1 + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^2 \right) \ln \frac{(m)^2 - \lambda^2}{(x)^2 - \lambda^2} > 0$$

### 5.2 恒力矩缠绕

由式(21)及上述参数可得到剩余缠绕张力:

$$T(x) = t \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{2\lambda} \left( 1 + \left( \frac{\lambda}{x} \right)^2 \right) \ln \frac{(m-\lambda)(x+\lambda)}{(m+\lambda)(x-\lambda)} \right] \quad (32)$$

由式(32)可得恒力矩下剩余张力分布如图 3 所示。

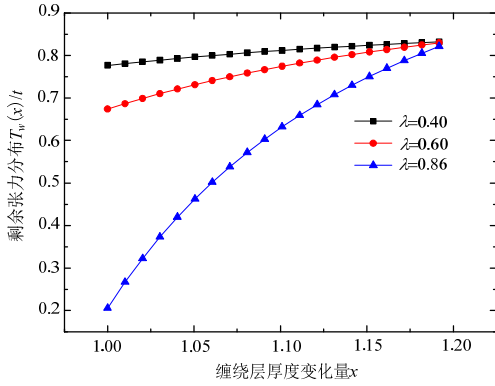


图 3 恒力矩下剩余张力分布

Fig.3 Residual tension distribution under constant torque winding tension

图 3 中剩余张力随芯模内、外径比 $\lambda$ 增大而减小；在[1,1.2]区间，剩余张力随缠绕层径向比 $x$ 增大而递增。

### 5.3 锥度张力

#### 1) 线性锥度张力

由式(22)及上述参数可得到剩余缠绕张力：

$$\begin{cases} T(x) = t \left[ 1 - \kappa x - \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{\lambda}{x} \right)^2 \right) \left( \ln \frac{m^2 - \lambda^2}{x^2 - \lambda^2} - \kappa C \right) \right] \\ C = \lambda \ln \frac{(x+\lambda)(m-\lambda)}{(x-\lambda)(m+\lambda)} + 2(m-x) \end{cases} \quad (33)$$

由式(33)可得线性锥度  $\kappa=0.3$  下剩余张力分布如图 4 所示。

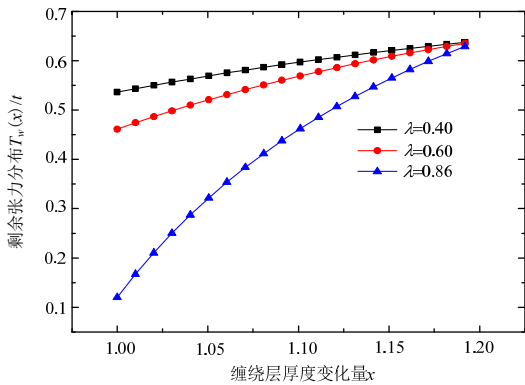


图 4 线性锥度下剩余张力分布

Fig.4 Residual tension distribution under linear taper winding tension

图 4 中剩余张力随芯模内、外径比 $\lambda$ 增大而减小；在[1,1.2]区间，剩余张力随缠绕层径向比 $x$ 增大而加大。

为计算方便，任意选择 $\lambda=0.4$ ，由式(33)可得此芯模内、外径比时，不同锥度系数 $\kappa$ 下剩余张力分布如图 5 所示。

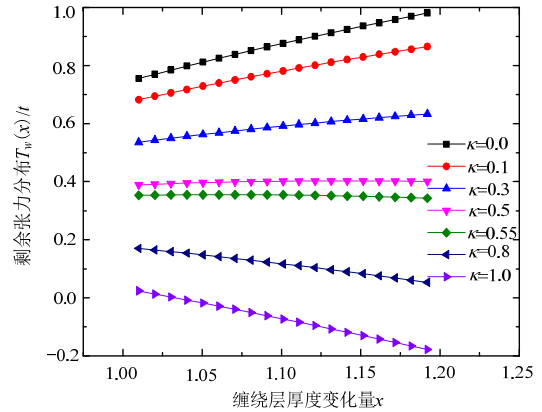


图 5 不同锥度系数  $\kappa$  下剩余张力分布

Fig.5 Residual tension distribution under linear taper tension at different  $\kappa$

从图 5 可以看出，随锥度系数 $\kappa$ 增大，剩余张力递减；锥度系数 $\kappa$ 增大到某一值时，剩余张力在区间[1,1.2]从单调增函数变为单调减函数，且锥度系数 $\kappa$ 值越大，剩余张力越容易变为负值；在缠绕径向比靠近 1 附近，剩余张力永远大于 0，说明线性锥度张力在最初缠绕层不易发生褶皱；锥度系数 $\kappa=0.5$ ， $\kappa=0.55$  时，缠绕层接近等剩余张力状态，说明线性锥度张力存在临界锥度系数使缠绕层可达到等剩余张力。

#### 2) 双曲锥度张力

由式(23)及上述参数可得到剩余缠绕张力：

$$T(x) = t \left[ 1 + \kappa \frac{1-x}{x} - \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{\lambda}{x} \right)^2 \right) \left[ (1-\kappa) \ln \frac{m^2 - \lambda^2}{x^2 - \lambda^2} + \frac{\kappa}{\lambda} \ln \frac{(m-\lambda)(x+\lambda)}{(m+\lambda)(x-\lambda)} \right] \right] \quad (34)$$

由式(34)可得双曲锥度 $\kappa=0.3$  下剩余张力分布如图 6 所示。

图 6 中剩余张力芯模内、外径比 $\lambda$ 增大而减小；在[1,1.2]区间，剩余张力分布随缠绕层径向比 $x$ 增大而递增。

由式(34)得芯模内、外径比 $\lambda=0.4$  时，不同锥度系数 $\kappa$ 下剩余张力分布如图 7 所示。

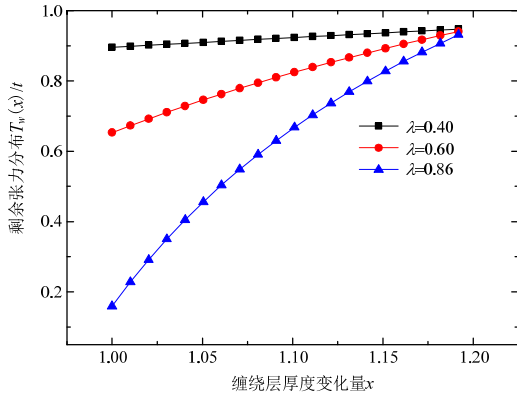


图6 双曲锥度下剩余张力分布

Fig.6 Residual tension distribution under hyperbolic taper winding tension

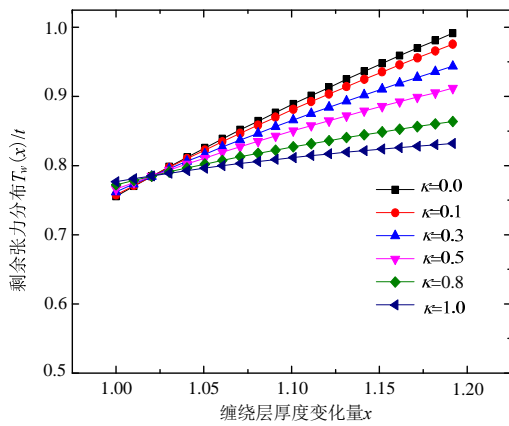


图7 不同锥度系数kappa下剩余张力分布

Fig.7 Residual tension distribution under hyperbolic taper winding tension at different kappa

由图7可以看出, 缠绕层径向比在靠近1值附近, 剩余张力随锥度系数kappa增大而递减; 在靠近1.2值附近, 剩余张力随锥度系数kappa增大而递增, 主要

由于锥度系数kappa由0增大到1时, 缠绕张力由恒张力向恒力矩张力过渡, 剩余张力变化趋于平缓造成。

5.4 算例对比

文献[13]根据厚壁弹性理论将复合材料纤维层简化为各向同性体推导, 得到剩余张力与缠绕张力关系。本文算法与文献[13]对比, 在一定条件下存在相同与差别两种情况。

1) 当  $E_1=E_{2r}=E_{2\theta}$ ,  $\nu_1=\nu_{2r}=\nu_{2\theta}$  时, 剩余缠绕张力结果与弹性模量和泊松比没有关系, 故本文算法可以退化为文献[13]的结果。

2) 当  $E_1 \neq E_{2r}=E_{2\theta}$  或  $\nu_1 \neq \nu_{2r}=\nu_{2\theta}$  时, 本文算法与文献[13]存在差异, 其主要原因在于本文与文献[13]计算后层对第i层所产生总的环向缠绕应力

$$\sum_{j=i+1}^n \sigma_{2\theta}(i, j)$$

方法不同。文献[13]原理为: 将第i层后所有径向均布压力作用于第i层, 积分得总的压力P, 再将n层的缠绕体看做总层为i层, 外压力为P的模型并求出第i层的环向应力, 即为第i层以后所有层对第i层作用的环向应力。本文原理为: 将每层对第i层的环向应力分别用式(15)算得, 再积分, 故式(15)中  $r_j$  会成为积分量, 而文献[13]则将此  $r_j$  直接采用  $r_i$  代替, 没有积分, 只对外压力求和积分, 所以结果上存在差异。本文以恒缠绕张力为例验证结论, 取芯模及缠绕层参数:  $\nu_1=0.3$ ,  $E_1=210 \text{ GPa}$ ;  $a=200 \text{ mm}$ ,  $b=500 \text{ mm}$ ,  $m=1.2$ ,  $E_{2r}=E_{2\theta}=108 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{2r}=\nu_{2\theta}=0.35$ , 剩余张力分布具体结果如表1所示。

表1 恒缠绕张力设计: 文献[13]与本文对比

Table 1 Design of constant winding tension: comparison of tension between this paper and Ref. [13]

层号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
本文	0.820	0.833	0.846	0.859	0.872	0.884	0.896	0.908	0.920	0.932	0.944	0.955	0.967	0.978	0.989	1
文献[13]	0.798	0.813	0.828	0.843	0.858	0.871	0.885	0.899	0.912	0.925	0.938	0.951	0.964	0.976	0.988	1

5.5 等剩余张力

考虑文献[17]参数:  $a=250 \text{ mm}$ ,  $b=6 \text{ mm}$ ,

$r_n=314 \text{ mm}$ ,  $h=4 \text{ mm}$  等剩余张力 105 MPa 代入式(30)得表2结果。表2中采用文献[17]及[18]方法均可以

表2 等剩余张力设计: 文献[17-18]与本文对比

Table 2 Design of uniform residual tension: comparison of tension between this paper and Ref. [17-18]

层号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
文献[17]	391.8	311.7	258.6	220.9	193.0	171.5	154.4	140.6	129.2	119.7	111.6	105.0
文献[18]	327.3	273.5	234.0	205.2	182.3	164.3	149.4	137.9	127.6	118.4	111.4	105.0
本文	327.8	272.7	233.6	204.4	181.9	164.0	149.4	137.4	127.3	118.8	111.4	105.0

实现等张力缠绕设计且可以保证工程精度要求。本文与上述两种方法对比, 较文献[17]给出较低的缠

绕张力, 尤其在最初几层缠绕张力比文献[17]小, 且各层前后缠绕张力变化平缓, 这更有利于实现稳

定的缠绕张力，满足工艺、控制及可行性要求；与文献[18]比较，缠绕张力结果一致，准确性得到保证，但本方法可直接得出结果，无需迭代计算。

### 6 各向异性材料分析

在上述各向同性材料分析的基础上，本章节仅对实际应用较多的等剩余张力设计与恒缠绕张力两种模型进行了分析。

#### 6.1 等剩余张力设计

文献[19]中给出了基于网格理论下，环向缠绕张力和缠绕完后环向应力之间的解析关系，由于采用刚度降级方法，其基体刚度  $E_m=0$ ，具体如下式：

$$T_w(i) = \frac{\frac{E_1}{E_{2\theta}} t_1 + n \cdot t_2}{\frac{E_1}{E_{2\theta}} t_1 + i \cdot t_2} \sigma_{2\theta} \cdot t_2 = \frac{\frac{E_1}{E_{2\theta}} t_1 + n \cdot t_2}{\frac{E_1}{E_{2\theta}} t_1 + i \cdot t_2} T \quad (35)$$

式中： $t_1$ 、 $t_2$ 、 $E_1$ 、 $E_{2\theta}$ 、 $n$  分别表示内衬壁厚、缠绕层厚度、内衬弹性模量、缠绕层环向弹性模量、缠绕层总层数。

考虑一环氧树脂基玻璃纤维复合材料缠绕气瓶，其内衬内径  $a=200$  mm，内衬外径  $b=400$  mm，缠绕层厚度  $t_2=0.25$  mm，缠绕层  $n=30$  层。 $E_1=206$  GPa， $\nu_1=0.3$ ， $E_{2\theta}=54.8$  GPa， $E_{2r}=18.3$  GPa， $\nu_{2\theta}=0.25$ 。设剩余张力  $T=100$  N/mm，则文献[19]与本文利用式(28)所得缠绕张力结果如图 8 所示。

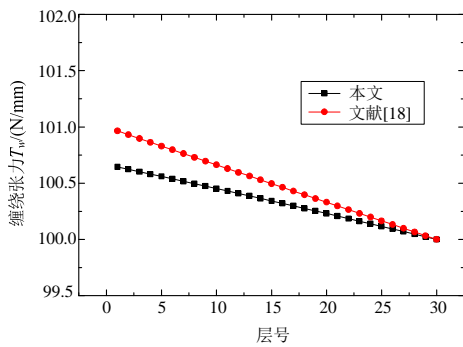


图 8 文献[18]与本文缠绕张力比较

Fig.8 Comparison of the winding tension between this paper and Ref. [18]

从图 8 可以看出，本文计算结果与文献[19]计算结果较吻合，误差波动基本在 1 N/mm 内；但本文由于考虑径向弹性模量的影响，计算更全面，计算结果更真实可靠，且相对文献[18]，内外层缠绕张力结果变化缓慢，张力越容易实现。

#### 6.2 恒缠绕张力

采用 6.1 章节中弹性模量与泊松比，芯模内径

$a=200$  mm，通过式(20)可得到图 9 中几种情况。

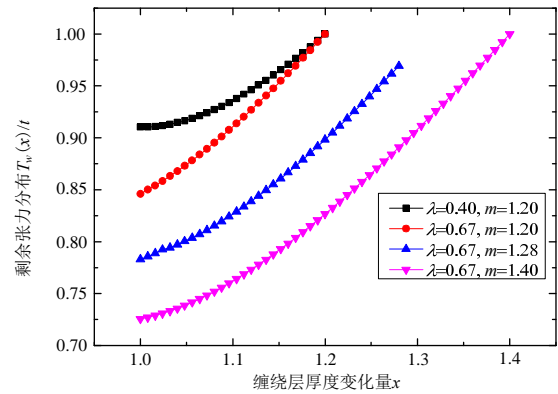


图 9 恒缠绕张力下各向异性材料剩余张力分布

Fig.9 Residual tension distribution of anisotropic material under constant winding tension

从图 9 可以看出， $m$  相同时，剩余张力应力分布随  $\lambda$  增大而减小，这与各向同性材料的趋势基本一致，但线型的凹凸不同，各向异性材料剩余张力分布变化更趋近于先缓后快，这与同性材料不同； $\lambda$  相同时，剩余张力随  $m$  的增大而变小，这与实际情况也相符。

### 7 结论

(1) 三种典型的缠绕张力下，剩余张力随芯模内、外径比  $\lambda$  的增大而减小，随缠绕层径向比  $x$  增大逐渐递增。

(2) 线性锥度张力下，锥度系数  $\kappa$  增大到某一值时，剩余张力从单调递增变为单调递减，且锥度系数  $\kappa$  值越大，在最初缠绕层越不易发生褶皱；且线性锥度系数存在某一临界值使缠绕制品可以达到等剩余张力状态。

(3) 双曲锥度张力下，随着锥度系数增大，缠绕张力由恒张力向恒力矩张力过渡，在缠绕层径向比  $x$  靠近 1 值附近，剩余张力递减；在缠绕层径向比  $x$  靠近最大值  $m$  附近，剩余张力递增。

(4) 本文算法与各向同性材料、各向异性材料文献等剩余张力算法对比，说明本文等剩余张力计算方法合理，可靠，易于实现。

#### 参考文献：

[1] 陈祥宝. 先进复合材料低成本技术[M]. 北京: 化学工业出版社, 2004: 10-25.  
Chen Xiangbao. Low cost technology of advanced composite materials [M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2004: 10-25. (in Chinese)  
[2] 杜善义. 先进复合材料与航空航天[J]. 复合材料学报,



- 2007, 1(24): 1—12.
- Du Shanyi. Advanced composite materials and aerospace engineering [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2007, 1(24): 1—12. (in Chinese)
- [3] 任明法, 陈浩然. 含金属内衬复合材料缠绕容器固化过程应力场的混合 Hamilton 元半解析法[J]. *工程力学*, 2006, 23(Suppl 1): 51—57.
- Ren Mingfa, Chen Haoran. Process-induced stress analysis of composite wound shell structure with metal liner during the curing process using semi-analytical Hamiltonian method [J]. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(Suppl 1): 51—57. (in Chinese)
- [4] 史耀耀, 唐虹, 余强. 数控布带缠绕机关键技术[J]. *航空学报*, 2008, 29(1): 233—239.
- Shi Yaoyao, Tang Hong, Yu Qiang. Key technology of the NC tape winding machine. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2008, 29(1): 233—239. (in Chinese)
- [5] Imamura T, Kuroiwa T, Mitsui N, et al. Development of hoop filament winding system with tension control [J]. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Part C*, 2003, 69(4): 906—913.
- [6] Ren S, Lu H, Wang Y, et al. Development of PLC-based tension control system [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2007, 20(3): 266—271.
- [7] Nozari H A, Banadaki H D, Mokhtare M, et al. Intelligent non-linear modelling of an industrial winding process using recurrent local linear neuro-fuzzy networks [J]. *Journal of Zhejiang University Science C*, 2012, 13(6): 403—412.
- [8] De H F R, Cozijnsen M, Yuen W Y D. An inverse solution for winding stresses in wound coils of linear orthotropic material with large deformations [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2007, 221(6): 639—652.
- [9] 丁保庚, 杨福江. 缠绕张力公式的研究[J]. *玻璃钢/复合材料*, 2000, 6(11): 3—7.
- Ding Baogeng, Yang Fujiang. Study of winding tension formulas [J]. *Fiber Reinforced Plastics/Composites*, 2000, 6(11): 3—7. (in Chinese)
- [10] 郑长良, 任明法, 陈浩然. 具有内衬缠绕式压力容器缠绕过程的有限元模拟[J]. *机械强度*, 2006, 28(6): 913—918.
- Zheng Changliang, Ren Mingfa, Chen Haoran. Finite element simulation of the winding process of band wound vessels with liner [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2006, 28(6): 913—918. (in Chinese)
- [11] Hashimoto H. Optimization of wind-up tension of webs preventing wrinkles and slippage [J]. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 2009, 131(5): 611—623.
- [12] 许家忠, 刘丹, 乔明, 等. 基于热芯缠绕工艺的缠绕张力研究[J]. *纤维复合材料*, 2012(3): 20—22.
- Xu Jiazhong, Liu Dan, Qiao Ming, et al. Research on the winding tension based on heated mandrel winding [J]. *Fiber Composites*, 2012(3): 20—22. (in Chinese)
- [13] 刘成旭, 邢静忠, 陈利, 等. 柔性厚壁筒环向缠绕张力分析与设计[J]. *固体火箭技术*, 2013, 36(2): 261—265.
- Liu Chengxu, Xing Jingzhong, Chen Li, et al. Analysis of residual winding tension and design of winding tension for hoop winding on flexible cylinder [J]. *Journal of Solid Rocket Technology*, 2013, 36(2): 261—265. (in Chinese)
- [14] 杨娅君, 陈德传. 收卷中的张力及其控制[J]. *仪器仪表学报*, 2004, 25(5): 691—693.
- Yang Yajun, Chen Dezhan. The tension and its control upon rolling-up [J]. *Chinese Journal of Science Instrument*, 2004, 25(5): 691—693. (in Chinese)
- [15] Lee C W, Shin K H. A study on taper-tension control considering telescoping in the winding system [J]. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 2010, 46(2): 687—693.
- [16] 吴德会, 张忠远. 厚壁复合材料管纤维缠绕张力的神经网络设计方法[J]. *复合材料学报*, 2012, 29(8): 195—203.
- Wu Dehui, Zhang Zhongyuan. Approach to design tension of filament winding for thick composite pipes using a neural network [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2012, 29(8): 195—203. (in Chinese)
- [17] 朱国辉, 郑津洋. 新型绕带式压力容器[M]. 北京: 机械工业出版社, 1995: 85—90.
- Zhu Guohui, Zheng Jinyang. New type steel ribbon wound of pressure vessel [M]. Beijing: China Machine Press, 1995: 85—90. (in Chinese)
- [18] 任明法, 郑长良, 陈浩然. 具有内衬的缠绕容器缠绕层等张力设计的迭代搜索[J]. *复合材料学报*, 2004, 21(5): 153—158.
- Ren Mingfa, Zheng Changliang, Chen Haoran. Iterative search for the isotension design of the band wound vessels with liner [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2004, 21(5): 153—158. (in Chinese)
- [19] 益小苏, 杜善义, 张立同. 复合材料手册[M]. 北京: 化学工业出版社, 2009: 303—304.
- Yi Xiaosu, Du Shanyi, Zhang Litong. Composite handbook [M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2009: 303—304. (in Chinese)