文章编号:1003－207(2016)02－0162－07
DOI:10.16381/j.cnki.issn1003－207x.2016.02.020

优化离散灰色幂模型及其应用

杨保华[1]，赵金帅[2]

(1.江苏师范大学商学院,江苏 徐州　221116;2.江苏师范大学计算机学院,江苏 徐州　221116)

摘　要:考虑已有的灰色预测模型主要能对指数型发展系统或幂函数型发展系统进行模拟预测,本文构建了一种不仅能够模拟指数型和幂函数型的发展系统,并且能够体现出二者之间的相互作用关系的离散灰色幂模型;并针对初始条件对离散灰色幂模型模拟精度的影响,首先给出了离散灰色幂模型的建模步骤,然后以平均相对误差最小化为目标、参数之间的关系为约束条件,构建了离散灰色幂模型初始条件的优化模型,实现对离散灰色幂模型初始条件的优化。结果表明,优化的离散灰色幂模型使得平均相对误差在理论上达到了最小化,其模拟精度和预测精度都高于传统模型。最后,通过中国网络购物人数数据预测和仿真数据分析,说明了本文优化方法的有效性和适用性。

关键词:灰色系统;离散灰色幂模型;参数优化;网络购物

中图分类号:N941.5　　**文献标识码**:A

1　引言

灰色预测模型[1-2]通过累加生成弱化序列的随机性,寻找系统变化规律并以此为基础建立的预测模型,一般具有较高的模拟精度和预测精度,为小样本信息下行为序列的预测建模提供了有效工具。作为灰色预测模型体系中的核心部分,GM(1,1)模型群[3]已被广泛应用于能源、教育、经济、管理等方面,同时众多学者在GM(1,1)模型群的特性研究、背景值改进、时间响应式优化、扩展研究等方面开展了系统深入的工作[4-6],极大地推动了GM(1,1)模型群的发展。

由于灰色GM(1,1)预测模型存在着由离散形式的方程到连续形式的方程转变所造成的误差,谢乃明[7]提出了离散灰色预测模型避免了从差分方程到微分方程的跳跃。而GM(1,1)幂模型作为传统GM(1,1)模型和灰色Verhulst模型的扩展,模型中幂指数可以根据建模的实际背景进行灵活调整,以适用于不同的原始序列建模,较好地反映数据的非线性特征[8]。为提高GM(1,1)幂模型的建模精度,研究人员分别从GM(1,1)幂模型背景值插值系数的优化[9]、无偏性[10]以及病态型[11]等角度进行了研究。此外,为提高幂模型对震荡型数据的适应性,学者们又构建了基于傅立叶级数的小样本振荡序列灰色预测模型[12],这些模型的建立提高了GM(1,1)幂模型的预测精度,并且在实践中得到了广泛的应用[3-15]。在经典GM(1,1)模型和离散GM(1,1)模型的求解过程中,以第一个数据为白化微分方程的初始条件,然而,Liu Sifeng等[2]和王正新等[9]都从理论上证明了第一个数据与模型的发展系数和预测值无关,研究人员给出了一些初始条件选取的改进方法[6-17]。

事实上,时间序列预测在工业生产过程控制、经济数据分析、气象学等领域中也有着重要的应用。目前也有许多较成熟的方法,如统计回归[18]、神经网络[19]、小波变换[20]、支持向量机[21]和经验模态分解[22]等,但这些预测方法不仅需要复杂的数学计算,而且依赖于大量的经验数据。因此,这些方法不适用于短期的小样本数据预测。而对于具有相对较多的数据的时间序列预测问题,研究人员也将上述的神经网络、小波变换、支持向量机等方法引入到灰色预测模型,来提高灰色预测模型的预测精度和适应能力[23]。

无论从什么角度对灰色预测模型进行优化分析,都无法避免灰色GM(1,1)模型仅能较好模拟指数型变化序列和GM(1,1)幂模型仅能较好描述幂函数型变化序列的不足。事实上,现实系统的演化趋势受到多种因素的综合作用,其变化趋势不仅表现为指数型的增长[24]或幂函数型的饱和性增长[8],常常还会受

收稿日期:2014－03－11;**修订日期**:2015－05－20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(71301064);教育部人文社科基金项目(12YJC630262)
通讯作者简介:杨保华(1979－),男(汉族),河南周口人,江苏师范大学商学院副教授,研究方向:灰色系统、应急管理、物流工程,E-mail:mathyang@126.com.

到两种增长趋势的综合性的非线性作用，从而使得系统的时间序列表现出更复杂的变化态势。

基于此，本文借鉴离散灰色模型的思想，给出一种能够描述系统变化趋势表现出复杂的变化规律的离散灰色幂模型，该模型不仅能够描述时间序列的指数型变化和幂函数型的变化规律，并能综合考虑他们之间非线性作用；考虑到初始条件的选取对模型模拟精度的影响，构建初始值优化的离散灰色幂模型，应用实例和仿真分析表明新模型可以显著地改善预测模型的建模精度并具有良好的适应性。

2 离散灰色幂模型及其特性

设非负原始序列为 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$，对原始序列 $X^{(0)}$ 作一阶累加生成为 $X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$，其中 $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),k=1,2,\cdots,n$。

定义 1 设 $x^{(0)}(k),x^{(1)}(k)$ 如上所述，称灰方程：

$$x^{(1)}(k+1)=\beta_0+\beta_1 k^{\gamma}+\beta_2 x^{(1)}(k) \tag{1}$$

为离散灰色幂模型，其中 γ 称为幂指数。

定理 1 设 $X^{(0)}$ 为非负序列，$X^{(0)},X^{(1)}$ 如定义 1 所述，假定离散灰色幂模型的幂指数 γ 已知，若 $\hat{\beta}=(\beta_0,\beta_1,\beta_2)^T$ 为参数列，则有：

$$\hat{\beta}=(B^TB)^{-1}B^TY \tag{2}$$

其中，

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1^{\gamma} & x^{(1)}(1)\\ 1 & 2^{\gamma} & x^{(1)}(2)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & (n-1)^{\gamma} & x^{(1)}(n-1)\end{bmatrix},$$

$$Y=\begin{bmatrix}x^{(1)}(2)\\ x^{(1)}(3)\\ \vdots\\ x^{(1)}(n)\end{bmatrix}。$$

定理 2 若 $\hat{\beta}=(B^TB)^{-1}B^TY$ 如定理 1 所述，且初值条件为 $\hat{x}^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)$，则离散灰色幂模型的解为：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\begin{cases}k\beta_0+\beta_1\sum_{i=1}^{k}i^{\gamma}+x^{(0)}(1),\beta_2=1\\ \beta_0\dfrac{1-\beta_2^k}{1-\beta_2}+\beta_1\sum_{i=1}^{k}i^{\gamma}\beta_2^{k-i}+\\ \quad x^{(0)}(1)\beta_2^k,\beta_2\neq 1\end{cases} \tag{3}$$

定理 3 若 $\hat{\beta}=(B^TB)^{-1}B^TY$ 如定理 1 所述，且初值条件为 $\hat{x}^{(1)}(n)=x^{(1)}(n)$，则离散灰色幂模型的解为：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^{(1)}(n)-\beta_0(n-k-1)-\beta_1\sum_{i=k+1}^{n-1}i^{\gamma}}{\beta_2^{n-k-1}},\beta_2=1\\ \dfrac{x^{(1)}(n)-\beta_0\dfrac{1-\beta_2^{n-k-1}}{1-\beta_2}-\beta_1\sum_{i=k+1}^{n-1}i^{\gamma}\beta_2^{n-1-i}}{\beta_2^{n-k-1}},\beta_2\neq 1\end{cases} \tag{4}$$

性质 1 当 $\gamma=0$ 时，离散灰色幂模型适用于具有近似指数 $x(t)\approx ce^{at}$ 规律的序列建模。

性质 2 当 $\gamma=1$ 时，离散灰色幂模型适用于具有近似非齐次指数 $x(t)\approx ce^{at}+b$ 规律的序列建模。

从模拟的模拟序列的递推关系式(3)和(4)可以看出，累加模拟序列不仅包含指数型序列的特征 $x^{(0)}(1)\beta_2^k(x^{(1)}(n)\beta_2^{k+1-n})$，而且还蕴含了指数型与幂函数型间的非线性作用关系 $\beta_1\sum_{i=1}^{k}i^{\gamma}\beta_2^{k-i}(\beta_1\sum_{i=k+1}^{n-1}i^{\gamma}\beta_2^{n-1-i})$。事实上，系统的演化发展受到多种因素的影响，其变化规律可能是多种因素的综合作用，如可采用小波变换、经验模态分解或乘法分解等方式来找出系统内在蕴含规律[22,25]。以往的研究也表明，灰色系统预测模型能较好的模拟指数型发展规律的序列和幂函数型发展规律的序列[24]。因此，本文给出的离散灰色幂模型可以用于更复杂系统的小样本数据的预测。

此外，从定理 2 和定理 3 关于离散灰色幂模型的时间响应式可以看出，该模型的模拟和预测结果依赖于参数 β_0、β_1 和 β_2 和初始值 $x^{(1)}(1)$、$x^{(1)}(n)$，选择不同的初始值将会直接影响到最终的模拟预测结果。下节将研究给定幂指数 γ 的情况下，离散灰色幂模型初始条件的优化问题。

3 离散灰色幂模型的初始条件优化

3.1 已知参数 $\boldsymbol{\beta_0}$、$\boldsymbol{\beta_1}$ 和 $\boldsymbol{\beta_2}$ 的情形下离散灰色幂模型初始条件的优化

设离散灰色幂模型的参数 β_0、β_1 和 β_2 已经确定，令由定理 2 和定理 3 得到的模型 $DGPM-x^{(1)}(1)$ 和 $DGPM-x^{(1)}(n)$ 的初始值分别为 $\hat{x}^{(1)}(1)=c_1$，$\hat{x}^{(1)}(n)=c_n$。则 c_1 和 c_n 的解析式可以通过下述定理 4 和定理 5 给出。

定理 4 若选取最佳初始条件 c_1，使得原始序列的一阶累加生成序列的 $x^{(1)}(k)$ 与其模拟值 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 的误差

平方和 $S^2=\sum_{k=2}^{n}\{\hat{x}^{(1)}(k)-x^{(1)}(k)\}^2$ 达到最小,则:

$$c_1=\begin{cases}\dfrac{\sum_{k=2}^{n}\beta_2^{k-1}\{x^{(1)}(k)-\beta_0\dfrac{1-\beta_2^{k-1}}{1-\beta_2}-\beta_1\sum_{i=1}^{k-1}i^{\gamma}\beta_2^{k-1-i}\}}{\sum_{k=2}^{n}\beta_2^{2(k-1)}} & (\beta_2\neq 1)\\ \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\{x^{(1)}(k)-(k-1)\beta_0-\beta_1\sum_{i=1}^{k-1}i^{\gamma}\} & (\beta_2=1)\end{cases}\quad(5)$$

证明:由离散灰色幂模型 $DGPM-x^{(1)}(1)$ 的时间响应式可得:

(1)当 $\beta_2\neq 1$ 时,

$$\underset{c_1}{Min}S^2=\sum_{k=2}^{n}\{\beta_0\frac{1-\beta_2^{k-1}}{1-\beta_2}+\beta_1\sum_{i=1}^{k-1}i^{\gamma}\beta_2^{k-1-i}+c_1\beta_2^{k-1}-x^{(1)}(k)\}^2$$ 令 $\dfrac{dS^2}{dc_1}=0$;

可得:

$$c_1=\frac{\sum_{k=2}^{n}\beta_2^{k-1}\{x^{(1)}(k)-\beta_0\dfrac{1-\beta_2^{k-1}}{1-\beta_2}-\beta_1\sum_{i=1}^{k-1}i^{\gamma}\beta_2^{k-1-i}\}}{\sum_{k=2}^{n}\beta_2^{2(k-1)}}$$

(2)当 $\beta_2=1$ 时,

$$\underset{c_1}{Min}S^2=\sum_{k=2}^{n}\{(k-1)\beta_0+\beta_1\sum_{i=1}^{k-1}i^{\gamma}+c_1-x^{(1)}(k)\}^2$$

令 $\dfrac{dS^2}{dc_1}=0$;

可得:

$$c_1=\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\{x^{(1)}(k)-(k-1)\beta_0-\beta_1\sum_{i=1}^{k-1}i^{\gamma}\}。$$

定理 5 若选取最佳初始条件 c_n,使得原始序列的一阶累加生成序列的 $x^{(1)}(k)$ 与其模拟值 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 的误差平方和 $S^2=\sum_{k=2}^{n}\{\hat{x}^{(1)}(k)-x^{(1)}(k)\}^2$ 达到最小,则:

$$c_n=\begin{cases}\dfrac{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{\beta_0\dfrac{1-\beta_2^{n-k}}{1-\beta_2}-\beta_1\sum_{i=k}^{n-1}i^{\gamma}\beta_2^{n-1-i}-x^{(1)}(k)\beta_2^{n-k}}{\beta_2^{2(n-k)}}\right)}{\sum_{k=1}^{n-1}\beta_2^{2(k-n)}} & (\beta_2\neq 1)\\ \dfrac{\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\dfrac{\beta_0(n-k)-\beta_1\sum_{i=k}^{n-1}i^{\gamma}-x^{(1)}(k)\beta_2^{n-k}}{\beta_2^{2(n-k)}}\right\}}{\sum_{k=1}^{n-1}\beta_2^{2(k-n)}} & (\beta_2=1)\end{cases}\quad(6)$$

证明:由离散灰色幂模型 $DGPM-x^{(1)}(n)$ 的时间响应式可得:

(1)当 $\beta_2\neq 1$ 时,

$$\underset{c_n}{Min}S^2=\sum_{k=1}^{n-1}\{\frac{c_n-\beta_0\dfrac{1-\beta_2^{n-k}}{1-\beta_2}-\beta_1\sum_{i=k}^{n-1}i^{\gamma}\beta_2^{n-1-i}}{\beta_2^{n-k}}-x^{(1)}(k)\}^2$$ 令 $\dfrac{dS^2}{dc_n}=0$;

可得:

$$c_n=\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{\beta_0\dfrac{1-\beta_2^{n-k}}{1-\beta_2}-\beta_1\sum_{i=k}^{n-1}i^{\gamma}\beta_2^{n-1-i}-x^{(1)}(k)\beta_2^{n-k}}{\beta_2^{2(n-k)}}\right)}{\sum_{k=1}^{n-1}\beta_2^{2(k-n)}}$$

(2)当 $\beta_2=1$ 时,

$$\underset{c_n}{Min}S^2=\sum_{k=1}^{n-1}\{\frac{c_n-\beta_0(n-k)-\beta_1\sum_{i=k}^{n-1}i^{\gamma}}{\beta_2^{n-k}}-x^{(1)}(k)\}^2$$ 令 $\dfrac{dS^2}{dc_n}=0$;

即:

$$c_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\beta_2^{2(n-k)}}=\sum_{k=1}^{n-1}\{\frac{\beta_0(n-k)-\beta_1\sum_{i=k}^{n-1}i^{\gamma}}{\beta_2^{2(n-k)}}-\frac{x^{(1)}(k)}{\beta_2^{n-k}}\}$$ 所以有:

$$c_n=\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\{\dfrac{\beta_0(n-k)-\beta_1\sum_{i=k}^{n-1}i^{\gamma}-x^{(1)}(k)\beta_2^{n-k}}{\beta_2^{2(n-k)}}\}}{\sum_{k=1}^{n-1}\beta_2^{2(k-n)}}$$

3.2 未知参数 β_0、β_1 和 β_2 的情形下灰色离散幂模型初始条件的优化

以上是假定模型的参数 β_0、β_1 和 β_2 已经确定的情形下得到的初始条件的最优解析解。事实上,初始条件和 β_0、β_1 和 β_2 之间有着紧密的联系,一旦利用最优的初始条件 c_1 和 c_n 替代原始条件 $x^{(1)}(1)$ 和 $x^{(1)}(n)$,参数 β_0、β_1 和 β_2 也会相应地变化。因此,有必要考虑参数 β_0、β_1 和 β_2 未知的情形下,初始条件优化的问题。

由定理 1 可知:

$$B^TB=\begin{bmatrix} n-1 & \sum_{k=1}^{n-1}k^{\gamma} & \sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)\\ \sum_{k=1}^{n-1}k^{\gamma} & \sum_{k=1}^{n-1}k^{2\gamma} & \sum_{k=1}^{n-1}k^{\gamma}x^{(1)}(k)\\ \sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k) & \sum_{k=1}^{n-1}k^{\gamma}x^{(1)}(k) & \sum_{k=1}^{n-1}(x^{(1)}(k))^2\end{bmatrix}$$

$$B^TY=\begin{bmatrix}\sum_{k=2}^{n}x^{(1)}(k)\\ \sum_{k=2}^{n}(k-1)^{\gamma}x^{(1)}(k)\\ \sum_{k=2}^{n}x^{(1)}(k-1)x^{(1)}(k)\end{bmatrix}$$

令 $(B^TB)_i$ 为用 B^TY 替换 B^TB 中第 i 列所获得的矩阵，其中 $i=1,2,3$。则有：

$$\beta_0=\frac{\det(B^TB)_1}{\det(B^TB)},\beta_1=\frac{\det(B^TB)_2}{\det(B^TB)},\beta_2=\frac{\det(B^TB)_3}{\det(B^TB)};$$

(1)对于 $DGPM-x^{(1)}(1)$ 模型，在上述 β_0、β_1 和 β_2 的代数表达式中，令 $x^{(1)}(1)=c_1$。并以平均相对模拟误差（ARPE）最小化为目标，以参数之间的关系为约束条件，构建如下优化模型：

$$\underset{c_1}{Min}\ ARPE=\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\left|\frac{\hat{x}^{(0)}(k)-x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}\right|$$

$$s.t.\begin{cases}\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1)\\ \hat{x}^{(1)}(k)=\beta_0\dfrac{1-\beta_2^{k-1}}{1-\beta_2}+\beta_1\sum_{i=1}^{k-1}i^{\gamma}\beta_2^{k-1-i}+c_1\beta_2^{k-1}\\ k=2,3,\cdots,n.\end{cases}\tag{7}$$

(2)对于 $DGPM-x^{(1)}(n)$ 模型，在上述 β_0、β_1 和 β_2 的代数表达式中，令 $x^{(1)}(n)=c_n$。并以平均相对模拟误差最小化为目标，以参数之间的关系为约束条件，构建如下优化模型：

$$\underset{c_n}{Min}\ ARPE=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{\hat{x}^{(0)}(k)-x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}\right|$$

$$s.t.\begin{cases}\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1);\\ \hat{x}^{(1)}(k)=\dfrac{c_n-\beta_0\dfrac{1-\beta_2^{n-k}}{1-\beta_2}-\beta_1\sum_{i=k}^{n-1}i^{\gamma}\beta_2^{n-1-i}}{\beta_2^{n-k}}\\ k=2,3,\cdots,n-1.\end{cases}\tag{8}$$

利用运筹学软件 LINGO（或 MATLAB、EXCEL 等）可以很方便的求解以上模型，得到参数 c_1、c_n、β_0、β_1 和 β_2 的优化值。

4　应用实例与仿真分析

中国电子商务市场随着社会信息化发展而迅速崛起，网上购物作为一种新兴的消费模式应运而生。2012 年，中国网络购物用户规模已达到 2.42 亿人，网购用户比例提升至 42.9％，交易规模达人民币 12,594 亿元，占据中国社会零售总额的 6％。并自 2003 年起至 2011 年期间保持了 100％的年复合增长，这一扩张速度已超过世界任何一个国家。对比中国网民总量、宽带网络覆盖率、智能手机覆盖率、中国人均可支配收入的增长前景，可以发现网络购物市场的发展远未饱和。据麦肯锡全球研究院的估计，2020 年中国网购规模预估将达到 25000－40000 亿元，保守估计其规模将是 2011 年的 3.5 倍。

事实上，网络购物人数规模的增长不仅会随电子商务的快速发展而体现出指数型的增长趋势，而且其自身规模也具有一定的饱和性（即“S”型增长），并且二者之间也具有一定的交互作用；即网络购物人数演化不仅会体现出指数性的快速增长，也会体现出系统发展极限的幂函数性，也受到他们之间相互作用的影响。因此应用本文给出的离散灰色幂模型可以较好地描述这种系统内在演化规律，进而可以为系统发展的短期预测提供可选择的工具。

以中国 2006－2012 年的网络购物人数数据（如表 1 所示，数据来源于中国互联网络信息中心（CNNIC）统计数据）为例，说明优化离散灰色幂模型的优越性。应用 2006－2012 年的 7 个数据，取 $\gamma=1.7774$，按照本文提出的优化方法可得，$c_1=3432.789$，$\beta_0=4133.995$，$\beta_1=2023.626$ 和 $\beta_2=0.53096$。离散灰色幂模型为：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=8813.737(1-0.53096^k)+2023.626\cdot\sum_{i=1}^{k}i^{\gamma}\,0.53096^{k-i}+3432.789\cdot0.53096^k\tag{9}$$

根据时间响应式(9)可对 2013－2014 年的网络购物人数进行预测，应用 GM(1,1)模型、离散 GM(1,1)模型和初值优化离散灰色幂模型的模拟与预测结果如表 1 所示。

其中，2006—2012 年为模拟值，2013－2014 年为预测值。

表 1 显示，传统优化灰色离散幂模型对 2006－2012 年我国网络购物人数的平均模拟相对误差为 2.19％，按照灰色模型的检验标准[2]，该模型通过 $\alpha=0.05$ 的残差检验，可用于短期预测。应用式(9)可以获得 2013 年和 2014 年的网络购物人数为 28174.88 和 32183.67。

从表 1 可以看出，应用本文提出的初值优化离散灰色幂模型的模拟高于传统 GM(1,1)模型和离散 GM(1,1)模型。此外，据 CNNIC 发布的 2013

年第 32 次中国互联网发展状况统计报告，2013 年 6 月底，我国网络购物网民规模达到 2.71 亿人，与 2012 年 12 月底相比，2013 年上半年增长率为 11.9%。按此增长速度预计，2013 年底网络购物人数将达到 3 亿人。按此数据推断，初值优化离散灰色幂模型的预测误差为 6%，而 GM(1,1) 模型和离散 GM(1,1) 模型的预测误差分别为 28% 和 14%，因此，优化初始条件的离散灰色幂模型在模拟和预测方面都比 GM(1,1) 模型和离散 GM(1,1) 模型更具有优势。

为进一步讨论分析本文构建模型的实用性及其作用效果，下面通过数据仿真来进一步的说明本文所构建模型的适用性。

仿真数据主要考虑 6 种情形的系统发展态势：低速增长型、中速增长型、高速增长型、先增后减型、递减型和先减后增型。其中低速增长型、中速增长型和高速增长型用来模拟系统在不同上升阶段情形；先增后减型和递减型用来模拟系统饱和后逐步衰减的阶段；而先减后增型则用来描述增长型系统受到冲击扰动后的恢复发展情形。

仿真数据的生成：以 2.1356 为初值，上述 6 种情形的 γ 值分别取为 1.01324、1.3354、0.9455、0.6354、－1.2354 和－0.1335；若生成的仿真数据不满足上述给定的情形，则重新产生直至生成数据满足要求，具体生成的仿真数据见表 2。

以每组前 5 个数据作为建立模型的基础数据，第 6 个数据作为预测对比数据，应用本文给出的初值优化方法，建立每类数据的优化预测模型，所得的模拟数据与预测数据见表 2。从表 2 的模拟结果的平均模拟误差与预测结果的误差来看，本文给出的优化初始条件的离散灰色幂模型对 6 种典型的数据序列具有较好的模拟与预测效果，这也表明本文给出的小样本数据预测模型能够适应多种类型的数据序列，即具有较广的应用领域。

5 结语

人类面对的大量实际系统都具有信息不完全的特点，正是现实世界中普遍存在的小样本、贫信息不确定性系统为灰色系统理论提供了十分丰富的研究资源[24]。本文借鉴已有的灰色预测模型研究的优

表 1 GM(1,1)模型、离散 GM(1,1)模型和优化离散灰色幂模型的建模结果

年份	实际值（万人）	GM(1,1)模型		离散 GM(1,1)模型		初值优化离散灰色幂模型	
		预测值	相对误差(%)	预测值	相对误差(%)	预测值	相对误差(%)
2006	3357	3357		3357		3432.789	2.25
2007	4641	6170.02	32.95	6257.25	34.822	4547.506	2.01
2008	7400	8193.43	10.72	8314.54	12.36	7328.066	0.97
2009	10800	10880.4	0.74	11048.23	2.29	11215.27	3.84
2010	16051	1448.54	9.98	14680.71	8.54	15474.44	3.59
2011	19395	19186.83	1.07	19507.5	0.58	19792.56	2.05
2012	24202	25479	5.28	25921.27	7.1	24041.3	0.66
平均模拟相对误差			10.13		10.95		2.19
2013		38571.2		34443.78		28174.88	
2014		53253.45		45768.37		32183.67	

表 2 基于优化初始条件的离散灰色幂模型 6 种数据情形的模拟预测对比分析表

序号	系统数据类型											
	低速增长型数据		中速增长型数据		高速增长型数据		先增后减型数据		先减后增型数据		递减型数据	
	原始数据	预测数据	原始数据	预测数据	原始数据	预测数据	原始数据	预测数据	原始数据	预测数据	原始数据	预测数据
1	2.1356	2.1897	2.1356	2.2194	2.1356	2.2947	2.1356	2.1017	2.1356	2.1795	2.1356	2.2581
2	3.1591	3.1729	2.9298	2.9306	9.0436	9.1467	2.8471	2.8232	1.8867	1.7867	1.1539	1.1638
3	3.8579	3.8140	4.0323	4.0306	13.6571	13.7764	3.5731	3.6906	2.3671	2.2670	0.4597	0.4538
4	4.4365	4.4825	5.6994	5.7008	19.4619	18.9647	3.3706	3.5775	3.0597	3.1357	0.2779	0.2872
5	5.1943	5.1783	8.2301	8.2298	26.8037	26.6032	3.1633	3.2802	3.9974	3.9774	0.2051	0.1985
	平均模拟误差(%)	1.091		0.8403		2.5532		3.1098		2.9138		2.8884
6	6.0135	5.9016	11.9544	12.0554	36.1099	36.8161	2.9571	2.9938	5.2485	5.3457	0.1717	0.1682
	预测误差(%)	1.8608		0.8449		1.9557		1.2411		1.852		2.0384

势，提出并构建了离散灰色幂模型，新模型不仅能够模拟指数型增长序列和幂函数型增长序列，并能够综合考虑它们之间的相互作用的影响。在上述分析基础上，建立了给定幂指数 γ 的情况下，考虑了参数 β_0、β_1 和 β_2 已知和未知两种情形下离散灰色幂模型初始条件的优化问题。应用实例和仿真结果表明，优化初始条件可以有效地改善离散灰色幂模型的建模精度。但考虑到离散灰色幂模型幂指数 γ 取值的多样性和灵活性的特点，如何根据实际问题的数据特点，建立合理的优化模型求解离散灰色幂模型的幂指数将是一个研究的重点。此外，以往的研究证明了第一个数据与模型的发展系数和预测值无关，这显然与灰色系统的最少信息原理相违背[2]，因此，研究建立能够体现灰色系统最小信息原理的新型预测模型也将是一个重要的研究方向。

参考文献：

[1] Deng J L. Introduction of grey system[J]. The Journal of Grey System, 1989,1 (1):1－24.

[2] Liu Sifeng, Lin Yi. Grey systems theory and applications[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2010.

[3] 刘思峰，邓聚龙. GM(1,1)模型的适用范围[J]. 系统工程理论与实践，2000, 20(5): 121－124.

[4] 党耀国，王正新，刘思峰. 灰色模型的病态问题研究[J]. 系统工程理论与实践，2008, 28(1): 156－160.

[5] 熊萍萍，党耀国，姚天祥，等. 灰色 Verhulst 模型背景值优化的建模方法研究[J]. 中国管理科学，2012,20(6): 154－159.

[6] 王道平，张学龙，赵相忠. 具有灰色随机动态特征的供应链牛鞭效应的鲁棒性分析[J]. 中国管理科学，2013,21(1):57－62.

[7] Xie Naiming, Liu Sifeng. Discrete grey forecasting model and its optimization [J]. Applied Mathematical Modeling, 2009, 33(2):1173－1186.

[8] 王正新. 含可变参数的缓冲算子与 GM(1,1)幂模型研究[D]. 南京：南京航空航天大学，2010.

[9] 王正新，党耀国，赵洁珏. 优化的 GM(1,1)幂模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践，2012,32(9):1973－1978.

[10] 王正新，党耀国，练郑伟. 无偏 GM(1,1)幂模型及其应用[J]. 中国管理科学，2011,19(4): 144－151.

[11] 王正新，党耀国，刘思峰. GM(1,1)幂模型的病态性[J]. 系统工程理论与实践，2013,33(7):1859－1866.

[12] 王正新. 基于傅立叶级数的小样本振荡序列灰色预测方法[J]. 控制与决策，2014,29(2): 270－274.

[13] Wang Jianzhou, Zhu Suling, Zhao Weigang, et. al. Optimal parameters estimation and input subset for grey model based on chaotic particle swarm optimization algorithm[J]. Expert Systems with Applications, 2011,38(7):8151－8158.

[14] Zhao Ze, Wang Jianzhou, Zhao Jing, et al. Using a grey model optimized by differential evolution algorithm to forecast the per capita annual net income of rural households in China[J]. Omega, 2012,40(5):525－532.

[15] Evans M. An alternative approach to estimating the parameters of ageneralized Grey Verhulst model: An application to steel intensity of use in the UK[J]. Expert Systems with Applications, 2014,41(4):1236－1244.

[16] Dang Yaoguo, Liu Sifeng. The GM models that x(n) be taken as initial value [J]. Kybernetes, 2004, 33(2):247－255.

[17] Wang Yuhong, Dang Yaoguo, Li Yueqing, et. al. An approach to increase prediction precision of GM(1,1) model based on optimization of the initial condition [J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(8): 5640－5644.

[18] Li D C, Lin L S. A new approach to assess product lifetime performance for small data sets[J]. European Journal of Operational Research, 2013,230(2):290－298.

[19] Zhang Yongjun, Zhang Xitian, Li Qinhao, et. al. Gray theory based energy saving potential evaluation and planning for distribution networks[J]. Electrical Power and Energy Systems, 2014,57:298－303.

[20] Piotr F, Bellegem V, Sachs R. Forecasting non-stationary time series by wavelet process modeling[J]. The Institute of Statistical Mathematics, 2002,55(4): 737－764.

[21] 王革丽，杨培才，毛宇清. 基于支持向量机方法对非平稳时间序列的预测[J]. 物理学报，2008,57(2): 714－719.

[22] Yang Peicai, Wang Geli, Bian Jianchun, et al. The prediction of non-stationary climate series based on empirical mode decomposition[J]. Advances in Atmospheric Sciences, 2010,27(4): 845－853.

[23] Li D C, Chang C J, Chen C C, et. al. A grey-based fitting coefficient to build a hybrid forecasting model for small data sets[J]. Applied Mathematical Modeling, 2012,36(10):5101－5108.

[24] 刘思峰，曾波，刘解放，等. GM(1,1)模型的几种基本形式及其适用范围研究[J]. 系统工程与电子技术，2014,36(3):501－508.

Optimized Discrete Grey Power Model and Its Application

YANG Bao-hua[1], ZHAO Jin-shuai[2]
(1. Business school, Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116, China;
2. Computer college, Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116, China)

Abstract: A large number of practical systems have the characteristics of incomplete information, it is prevalent in the real world of the small sample, and the uncertainty of poor information system provides a very rich resource for the study of gray system theory. Grey prediction model has provided a useful tool for the small sample data predict. But, the existing research suggests that grey forecasting model can better simulate exponential function changes system and power function system, but the existing prediction model cannot better reflecting the exponential and power function combined effects to the system, so it is difficult to apply these model to predict the small sample data which effect by complex multifactorial impact. Based on this consideration, a new grey forecasting model-discrete grey power model is proposed. The new model add one time power function in the existing discrete grey model, and it also allows the power parameters by endue any value. So, the time-responsive features of this model can reflect the exponential and power function changes system, and includes the interaction characteristics of power function and exponential changes in the system. Based on the new model, taking into account the effect of the initial condition in the discrete grey power model, two optimization models are constructed with the objective of minimum average relative error, the constraints of relationships between parameters in order to optimize the initial condition. The example of online shopper from 2006 to 2012 in China is used to compare the simulation and prediction results of GM (1,1) model, discrete GM (1,1) model and the new method, the results show that the optimized model has better simulation and prediction accuracy than other two grey models. Additionally, in order to test adaptive of the new model, under the conditions of a given power exponent, six kinds of situations data Low-growth data、Medium-growth data、Rapid-growth data、Volatility data、Disturbance-growth data and Attenuation data are genercated by using randomly generated method, and the new model is used to simulate and predict the rand data, the results also show that the new model has better stability, which is further illustrated the validity and applicability of the new model. Therefore, the new prediction model constructed in this paper not only enriches the theory of grey forecast model system, but also provides a more rich set of tools for the prediction of small sample system under the combined effects of multiple factors.

Key words: grey system; discrete grey power model; parameters optimization; online shopper