**文章编号**:1003－207(2016)02－0047－09
DOI:10.16381/j.cnki.issn1003－207x.2016.02.006

# 考虑维修服务质量的产品质保联合决策

王　轩,刘丽文

(清华大学经济管理学院,北京　100084)

**摘　要**:在售后服务竞争日益激烈的大环境下,维修服务质量对于企业的意义越来越重要。经典的质保决策问题通常关心质保期和产品价格的联合决策问题,本文在此基础上进一步考虑了质保维修的服务质量问题。质保期、产品价格以及维修服务质量在产品生命周期内存在动态的关联关系,目前同时考虑此三类因素的研究尚不多见。本文以具有重复购买行为的大众消费品为研究对象,构建了包括成本模型、需求模型、利润模型在内的最优控制模型,并应用最大化原理对模型进行求解分析,在此基础上进一步对最优策略在静态市场和动态市场的应用分别做了具体分析和数值试验。

**关键词**:产品质保;服务质量;质保期;产品价格;重复购买;静态与动态市场;最大值原理

**中图分类号**:C931　　　**文献标识码**:A

## 1　引言

产品质保的相关研究中最为常见的是质保期和价格的联合决策问题。然而,质保的属性除了质保期长短之外还包括维修服务质量的好坏。同样一年的质保期,一份质保在产品发生问题的当天就能给顾客维修或更换新产品,另一份质保在一周之后才能解决顾客的问题,这带来的顾客满意度显然是有差别的。今天的商业环境下,产品竞争更加激烈,产品相关的售后服务市场竞争也变得更加激烈,顾客更加挑剔,更注重质保期内所享受到的质保服务。在此背景下,质保维修的服务质量正在成为企业发掘竞争力的新方向。

Dell 电脑享有售后服务好的声誉,其顾客在电脑发生故障时能够很快的得到服务,其质保策略中有下一个工作日上门服务的条款。Suqare Trade Warranty 是一家专门为消费者提供电子产品延保服务的公司,该公司提供的一个质保服务合同中规定:"保证 5 日内完成维修或者更换"。这两个例子说明质保维修的服务质量已经得到企业重视,然而服务质量如何决策的问题尚缺乏研究。单纯的决策质保期和价格已经不足以保证企业制定最佳的质保策略。在新的商业环境下,非常有必要在产品质保决策问题中考虑质保维修服务质量这一因素。

从产品生命周期的观点来看,可以将质保决策的相关问题分为产品销售环节和质保交付环节。产品销售环节关注的焦点是产品价格和质保期,较低的价格和较长的质保期能够促进产品销售,然而较长的质保期会增加质保成本,给企业的未来经营带来财务负担,同时产品价格也不能过低,要能够覆盖产品的成本并保证一定的利润。质保交付环节关注的焦点是质保维修的服务质量,良好的服务质量可以为企业赢得顾客满意度,进而带来品牌忠诚度和重复购买。服务质量的提升需要相应的投入,因此需要和价格、质保期进行联合决策才能保证企业在产品生命周期内获得最大的利润,三者在产品的生命周期内存在动态关联,有必要放在一起进行联合决策。

大众消费品的一个重要特点是有可能重复购买,本研究也拟考虑这一特点,因为好的服务质量能够带来更多的重复购买需求。王轩和刘丽文[1]已经将重复购买过程引入到质保期和价格决策模型中,做了一定的研究,这为本文继续把质保维修服务质量的决策变量融入进来,考虑三个变量的决策问题提供了一个良好基础,但是由于变量维度的增加,本文的研究难度也大大增加了。

本文主要涉及的研究文献包括质保维修服务质量相关文献以及质保期和价格联合决策的相关

**收稿日期**:2014－08－24; **修订日期**:2015－03－05
**基金项目**:国家自然科学基金资助项目(70972030)
**通讯作者简介**:王轩(1985－),男(汉族),河南人,清华大学经济管理学院,博士生,研究方向:管理科学与工程,E-mail:wangx3.11@sem.tsinghua.edu.cn.

文献。目前关于质保维修服务质量问题的研究，大多集中于资本密集型产品，通过基于绩效的合同(Performance Based Contract)加以保障。其原理是基于产品实际的正常运行时间来向供应商付费，而不是仅仅为零件、劳动及其他服务花钱。其核心思想就是把向供应商支付的费用与客户所关心的业绩捆绑起来以实现各方利益的一致[2]。关于大众消费品的质保维修服务质量的研究相对较少，仅找到两篇，其中 Cohen 等[3]构建了一个关于产品和售后服务质量的生命周期模型，模型中的决策变量是产品价格、售后服务质量以及售后服务价格，制造商和第三方的维修商在售后服务市场上形成竞争，制造商提供更好的服务同时收取更高的价格。Park 等[4]设计了一种新的两维质保策略，该质保策略包含两个维度：质保期和质保维修的服务时间，后者可看作服务质量。此研究第一次将服务质量的概念引入二维质保策略，通过产品的故障时间和质保服务时间来估算质保成本。此文章侧重于质保成本的估算并未考虑质保服务时间对产品需求的影响。

质保维修服务质量包含的范畴比较广，服务人员的态度，维修站点的便利性，维修成本的高低，维修效果的好坏都会影响服务质量。在商业领域，售后服务的服务质量一般通过一定时间段内的故障件满足率来衡量。究其本质，维修服务与其他服务的不同之处在于顾客希望服务时间越短越好，因此我们将质保维修服务质量定义为故障件的维修响应时间。维修响应时间越短说明质保维修的服务质量越高。好的服务质量有利于保持顾客忠诚度，但是相应的要付出成本，因此厂商需要在提高服务质量和因此增加的成本之间进行权衡。我们这里定义的维修响应时间本质上等同于传统的服务竞争研究中的交付时间(Delivery Time)或反应时间(Response Time)。关于反应时间竞争的研究并不局限于质保服务，此类研究在传统的服务竞争研究中很常见，例如：Li[5]，Lederer 等[6]，So 等[7]，So[8]。基于反应时间的服务竞争为本文定义质保维修服务质量提供了借鉴。

关于质保期和价格联合决策的相关文献，首先是关于质保期影响产品需求的内在机理研究[9]。同样条件下产品质量低的制造商会承担更高的质保成本，因而只有产品质量更高的制造商才会提供更长的质保期，顾客通常不能直接观察到产品质量水平的高低，因此可以把质保期作为产品质量高低的有效信号。Glickman 等[10]是关于质保期和价格决策的早期经典研究，模型假设产品需求随价格和质保期分别呈指数变化。Mesak[11]将价格和质保期作为决策变量引入创新品扩散模型，分析了垄断厂商在规划期内的最优定价和质保期策略，根据价格和质保期影响需求的原理，提出了四种需求模型。Huang Hongzhong 等[12]在 Glickman 模型的基础上，研究了新产品的价格、质保期和产品质量水平选择的联合决策问题。Manna[13]引用 Glickman 模型构建了以制造商利润最大化为目标的价格和质保期决策模型。

Lin Peichun 等[14]研究了价格和质保期的联合决策问题，其中需求受到价格、质保期、累计销量的影响。Wu 等[15]研究了免费更换质保策略下的最优价格和和质保期决策，假设产品故障服从正态分布且价格和质保期在规划期内都是动态变化的。Wu 等[16]进一步分析了在免费更换和按比例赔付相结合的质保策略下如何确定最优的质保期和老化时间(Burn-in Time)使得生产成本和质保成本最低。所谓老化时间是指在产品出厂前的烧机测试时间，用来降低上市产品的故障率。Wu 等[17]在前两篇文章的基础上又引入产品的生产率作为决策变量分析了静态市场下垄断厂商如何选择最优的价格、质保期以及产品生产率。Wu 等[18]利用电池的实际销售数据对质保期、价格和生产率的决策问题做了实证研究。

Lin Peichun 等[19]同样以价格、质保期、生产率为决策变量分析如何使得规划期内厂商利润最大化，他们还在模型研究的基础上开发了决策支持系统。Zhou Zhefang 等[20]在免费维修质保策略的背景下研究了如何确定最优的质保期和价格使得厂商生命周期内的利润最大化。他们对生命周期的定义是从产品上市到最终退出市场。王轩和刘丽文[1]考虑了具有重复购买需求的质保期和价格的联合决策问题，用累计销量乘以重复购买率定义的重复购买需求。

## 2 基本决策模型

### 2.1 建模的假设

本文通过建模的手段分析制造商在产品生命周期内的维修服务质量、质保期和价格的最优联合决策。决策目标是制造商在产品生命周期内获得最大的利润。在构建需求和成本模型时有如下假设：

1)需求由初次购买需求和重复购买需求构成。

2)初次购买需求与产品价格负相关，与产品的质保期正相关。

3)重复购买需求由初次购买的累计销量乘以重复购买率得到，同时与产品价格负相关，与质保维修的服务质量正相关。

4)质保成本与产品的质保期和故障率正相关。

5)服务质量保障成本是服务质量的凸增函数。

与以往的研究不同，本文分析了质保维修的服务质量对利润的影响。模型背后的假设是好的服务质量会增大产品的重复购买需求。

## 2.2　符号说明

$s(t)$：t 时刻的维修服务质量。

$p(t)$：t 时刻的产品价格。

$w(t)$：t 时刻的产品质保期。

$f(t)$：t 时刻初次购买过程带来的需求量。

$N(t)$：t 时刻由初次购买带来的累计销量。

$r(t)$：t 时刻重复购买过程带来的需求量。

$M(t)$：t 时刻重复购买过程带来的累计销量。

$q(t)$：t 时刻的产品需求量。

$Q(t)$：t 时刻的产品累计销量。

$\Lambda$：重复购买率。

$N_0$：反映过去生产经验和销售经验的参数。

$N_M$：初次购买的市场容量。

$c_s$：服务质量保障成本。为保障服务质量需要的库存成本、物流投入和管理费用。

$c_r$：故障产品的维修成本。本文采用最常见的免费维修质保策略，每次维修所需要的人工、材料成本是固定值。

$\delta$：产品故障率。

$\eta$：折现率。

$L$：产品生命周期。

$\pi$：产品生命周期内的折现总利润。

## 2.3　需求模型

需求函数由初次购买需求和重复购买需求两部分构成。初次购买需求由产品价格、质保期和扩散效应共同决定。初次购买需求模型我们引用 Huang Hongzhong 等[12]的研究成果：

$$f(t) = k_1 (w(t) + k_2)^{\alpha} p(t)^{-\beta}\left[1 - \frac{N(t)}{N_M}\right]\left[\psi + \frac{N(t)}{N_M}\right]$$

$$\mathrm{N}(t) = \mathrm{N}_0 + \int_0^t f(t)dt$$

事实上这个初次购买需求模型由 Glickman 等[10]的质保期一价格模型和 Bass[21]的创新品扩散模型组合形成的，下面分别介绍。

需求模型的前半部分 $k_1 (w(t) + k_2)^{\alpha} p(t)^{-\beta}$ 来自 Glickman 模型。模型假设需求与价格负相关，与质保期正相关，$k_1 > 0, k_2 \geqslant 0, 0 < \alpha < 1, \beta > 1$。$k_1$ 是放大系数，$k_2$ 是个时间系数以保证质保期为 0 时模型依然成立，$\alpha$ 和 $\beta$ 是质保和价格的需求弹性系数。模型的后半部分来自 Bass 模型，体现了扩散效应对需求的影响。这里 $N(t)$ 是 $t$ 时刻的初次购买累计销量，$N_M$ 是初次购买的市场容量，$\psi$ 是创新者的影响，$N(0) = N_0$，$N_0$ 表示规划期开始以前的初次购买累积销售量，或表示销售经验。Bass 模型将人群分为创新者和追随者，创新者带来的需求与尚未购买该产品的总人数正相关，即与 $N_M - N(t)$ 正相关。追随者带来的需求不仅与 $N_M - N(t)$ 正相关，还会受到已经购买了该产品的顾客影响，即与 $N(t)$ 正相关。

已经发生了初次购买的顾客可能由于多种原因发生初次购买。王轩和刘丽文(2014)[1]对重复购买过程进行建模，认为重复购买带来的需求等于初次购买累计销量 $N(t)$ 乘以重复购买率 $\Lambda$，同时重复购买过程受到价格的影响。

$$r(t) = \Lambda N(t) h_1(p)$$

这里 $h_1(p)$ 是重复购买过程对价格的反应函数，表明产品价格对重复购买过程的影响。这里我们采用指数形式描述：

$$h_1(p) = e^{-\chi p(t)}$$

其中 $\chi > 0$ 表示价格弹性系数，这种指数形式的需求函数在很多研究中被采用，例如 Mesak 等[22]。

本文的重要假设是提高服务质量会促进顾客的重复购买行为。因此重复购买需求建模的关键是建立服务质量与重复购买过程之间的联系。根据假设，重复购买需求是服务质量 $s(t)$ 的增函数。

综上，本文对重复购买带来的需求 $r(t)$ 建模如下：

$$r(t) = \Lambda N(t) h_1(p) h_2(s)$$

这里 $h_2(s)$ 是重复购买需求对服务质量的反应函数，是关于 $s$ 的增函数，即 $dh_2(s)/ds > 0$。不妨假设为 $h_2(s) = (s(t) + k_3)^{\gamma}$，$k_3 \geqslant 0, 1 > \gamma > 0$。其中 $k_3$ 是调节参数，保证服务质量为 0 时模型依然有意义。$\gamma$ 表示重复购买对于服务质量的敏感度。

对重复购买需求积分可以得到重复购买累计销量：

$$M(t)=\int_0^T r(t)dt$$

需要说明的是，质保期影响需求的内在机理是其对于产品质量的信号示意功能，顾客在初次购买的时候不了解产品质量的信息，需要把质保期作为产品质量的有效信号。在顾客做重复购买的决策时，顾客已经对产品质量有了充分的了解，因此质保期失去了信号示意的功能，因此在本模型中重复购买不受到质保期的影响。

至此我们得到需求模型：

$$q(t)=f(t)+r(t)$$

### 2.4　成本模型

对制造商来说每件产品的成本包括生产成本、质保成本和服务质量保障成本。本文模型中产品的生产成本是固定值，因此可以将其归一化，模型中的价格可以理解为减去了生产成本的价格。我们只讨论质保成本和服务质量保障成本。

质保成本指质保维修发生时产品的维修材料和人工成本等基本费用，这部分费用是不可缩减的，否则厂家将承担违约责任。假设产品发生两次故障之间的时间服从指数分布，故障时间的累计分布律为 $F(t)=1-e^{-\delta t}$。其中 $t$ 是产品使用时间，$\delta$ 是产品故障率，单位产品在质保期 $w$ 内的平均损坏次数可表示为 $\rho(w)=\delta w$。假设每次故障维修成本固定为 $c_r$，单位产品的质保成本为：$c_r\rho(w)=c_r\delta w$。

服务质量保障成本是指制造商为了保障一定的服务质量所付出的额外成本，具体指制造商为了尽量缩短故障件的维修时间而增加库存水平、增加维修站点、提高管理费用等活动带来的成本。服务质量保障成本与制造商的服务竞争策略密切相关，服务水平越高，这部分成本也越高。在研究质量的成本时，通常假设成本是质量的增函数且为凸函数（例如 Teng 等[23]），即 $dc(s)/ds>0, d^2c(s)/ds^2>0$。基于这样的假设我们对单位产品的服务质量保障成本建模：

$$c_s=k_4 s(t)^{\varphi}, k_4>0, \varphi>1$$

其中 $s(t)$ 是服务质量，$k_4$ 是调节参数，$\varphi$ 表示服务质量保障成本对于服务质量的敏感度。$0<s(t)<1$，$s(t)=0$ 代表服务质量非常差，故障件的维修时间很长，$s(t)=1$ 表示服务质量非常高，顾客的产品出现故障后立刻能得到更换。

### 2.5　利润模型

在需求建模和成本建模的基础上，我们得到制造商在规划期内的利润函数：

$$Max\pi=\int_0^T e^{-\eta t}(p(t)-c_r\delta w(t)-k_4 s(t)^{\varphi})(f(t)+r(t))dt$$

$$s.t.\ \frac{dN(t)}{dt}=f(t)$$

模型中 $T$ 是规划期，$\eta$ 是折现率，$p(t)$ 是 t 时刻的产品价格，$w(t)$ 是 t 时刻的质保期长度，$s(t)$ 是 t 时刻的维修服务水平。

## 3　模型求解

为了方便表示，在不引起歧义的情况下后文都省去各变量的时间参数，除非特别说明，$p$ 和 $p(t)$ 表示相同的意思。

$$Max\pi=\int_0^T e^{-\eta t}(p-c(w,s))(f(p,w,N)+r(p,s,N))dt$$

$$s.t.\ \frac{dN}{dt}=f(p,w,N)$$

此模型是最优控制问题，模型包含三个控制变量和一个状态变量，可以应用庞特里亚金最大值原理求解。这里需要引入一个被称为协状态变量的新变量，用 $\lambda$ 表示，它的经济含义是状态变量 $N$ 的边际价值。

应用最大值原理首先需要构建汉密尔顿函数，用 $H$ 表示：

$$H=(p-c(w,s))[f(p,w,N)+r(p,s,N)]+\lambda f(p,w,N)$$

为了方便表示，可将函数中的变量省去，将 $H$ 简写为下面形式：

$$H=(p-c+\lambda)f+(p-c)r \tag{1}$$

其中协状态变量 $\lambda$ 满足下面微分方程：

$$\dot{\lambda}=\eta\lambda-H_N, \lambda(T)=0 \tag{2}$$

相应的求解汉密尔顿函数关于状态变量的偏微分 $H_N$：

$$H_N=(p-c+\lambda)f_N+(p-c)r_N \tag{3}$$

将(3)式带入(2)式进行化简可得关于协状态变量 $\lambda$ 的微分方程：

$$\dot{\lambda}=(\eta-f_N)\lambda-(p-c)q_N \tag{4}$$

式(4)是关于 $\lambda(t)$ 的微分方程，通过求解此方程可以得到 $\lambda(t)$，它反映了增加一单位的状态变量所带来的经济价值。

根据庞特利雅金最大值原理，控制变量 $p(t)$，$w(t)$ 和 $s(t)$ 的最优控制路径上的值，满足下面条件：

$$H_p = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \tag{5}$$

$$H_w = \frac{\partial H}{\partial w} = 0 \tag{6}$$

$$H_s = \frac{\partial H}{\partial s} = 0 \tag{7}$$

并且汉密尔顿函数对应的海塞矩阵 $HM$ 是负定矩阵：

$$HM = \begin{pmatrix} H_{pp} & H_{pw} & H_{ps} \\ H_{wp} & H_{ww} & H_{ws} \\ H_{sp} & H_{sw} & H_{ss} \end{pmatrix} \tag{8}$$

由海塞矩阵负定还可以得到下列条件：

$$H_{pp} < 0 \tag{9}$$

$$H_{ww} < 0 \tag{10}$$

$$H_{ss} < 0 \tag{11}$$

$$H_{pp}H_{ww} - H_{pw}^2 > 0 \tag{12}$$

$$H_{pp}H_{ss} - H_{ps}^2 > 0 \tag{13}$$

$$H_{ww}H_{ss} - H_{ws}^2 > 0 \tag{14}$$

已知 $H_p$，$H_w$ 和 $H_s$ 是包含下列五个变量的函数：$p$，$w$，$s$，$N$，$\lambda$，而这五个变量又是时间 $t$ 的函数。如果对 $H_p$ 求时间 $t$ 的导数，依据链式法则需要先对每个变量求导，然后相应变量再对 $t$ 求导。

针对(5)－(7)等式两边分别对时间 t 求导可得：

$$H_{pp}\dot{p} + H_{pw}\dot{w} + H_{ps}\dot{s} + H_{pN}\dot{N} + H_{p\lambda}\dot{\lambda} = 0 \tag{15}$$

$$H_{wp}\dot{p} + H_{ww}\dot{w} + H_{ws}\dot{s} + H_{wN}\dot{N} + H_{w\lambda}\dot{\lambda} = 0 \tag{16}$$

$$H_{sp}\dot{p} + H_{sw}\dot{w} + H_{ss}\dot{s} + H_{sN}\dot{N} + H_{s\lambda}\dot{\lambda} = 0 \tag{17}$$

可以看到上面三个方程是关于 $\dot{p}$，$\dot{w}$ 和 $\dot{s}$ 的三元一次方程，利用线性代数知识可以将其写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} H_{pp} & H_{pw} & H_{ps} \\ H_{wp} & H_{ww} & H_{ws} \\ H_{sp} & H_{sw} & H_{ss} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{w} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} H_{pN}\dot{N} + H_{p\lambda}\dot{\lambda} \\ H_{wN}\dot{N} + H_{w\lambda}\dot{\lambda} \\ H_{sN}\dot{N} + H_{s\lambda}\dot{\lambda} \end{pmatrix}$$

两边分别乘以海塞矩阵的逆矩阵可以得到三个控制变量的最优路径表达式：

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{w} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = -HM^{-1}\begin{pmatrix} H_{pN}\dot{N} + H_{p\lambda}\dot{\lambda} \\ H_{wN}\dot{N} + H_{w\lambda}\dot{\lambda} \\ H_{sN}\dot{N} + H_{s\lambda}\dot{\lambda} \end{pmatrix} \tag{18}$$

## 4　最优解讨论

### 4.1　一阶条件

下面我们通过分析最优解的一阶必要条件得到制造商的最优策略的一些启示。对汉密尔顿函数分别求偏微分可以将(5)－(7)式展开：

$$H_p = f + r + (p - c + \lambda)f_p + (p - c)r_p = 0 \tag{19}$$

$$H_w = -c_w f - c_w r + (p - c + \lambda)f_w = 0 \tag{20}$$

$$H_s = -c_s f - c_s r + (p - c)r_s = 0 \tag{21}$$

化简(20)式可以得到：

$$p - c + \lambda = \frac{c_w q}{f_w} \tag{22}$$

化简(21)式可以得到：

$$p - c = \frac{c_s q}{r_s} \tag{23}$$

可得：

$$\lambda = \left(\frac{c_w}{f_w} - \frac{c_s}{r_s}\right)q \tag{24}$$

我们知道 $\lambda(t) > 0$，因此在产品生命周期内都有：$c_w/f_w > c_s/r_s$。这个不等式的经济意义是，通过提高服务质量来促进需求比通过延长质保期促进需求更有效率。

将(22)和(23)带入(19)可以得到：

$$1 + c_w\frac{f_p}{f_w} + c_s\frac{r_p}{r_s} = 0 \tag{25}$$

根据假设我们知道 $f_w > 0$，$f_p < 0$，$c_w > 0$ 以及 $r_s > 0$，$r_p < 0$，$c_s > 0$，因此(25)式是可以得到满足的。此外(25)式也具有一定的经济意义。$f_p$ 表示提高价格对需求的抑制作用，体现为消费者的支付意愿，$f_w$ 表示延长质保期对需求的促进作用，$c_w$ 表示延长质保期的边际成本。由此我们看到制造商在制定质保期时应该使得质保期增加带来的成本等于消费者的支付意愿。同理制造商确定服务水平时也应该保证服务水平增加带来的成本等于消费者的支付意愿。

### 4.2　二阶条件

(9)－(11)三个不等式是最优解的二阶必要条件，对汉密尔顿函数求二阶偏导数：

$$H_{pp} = 2f_p + 2r_p + \frac{c_w q}{f_w}f_{pp} + \frac{c_s q}{r_s}r_{pp} < 0 \tag{26}$$

$$H_{ww} = -2c_w f_w + \frac{c_w q}{f_w}f_{ww} < 0 \tag{27}$$

$$H_{ss} = -c_{ss}q - 2c_s r_s + (p - c)r_{ss} < 0 \tag{28}$$

上面三个不等式是最优策略的必要条件。经检

验(27)和(28)总是成立。因此我们可以把(26)式作为检验最优策略的基础条件。

下面我们分析三个变量的混合偏导数：

$$H_{pw}=H_{wp}=f_w-c_wq_p+\frac{c_wq}{f_w}f_{pw} \tag{29}$$

$$H_{ps}=H_{sp}=r_s-c_sq_p+(p-c)r_{ps} \tag{30}$$

$$H_{ws}=H_{sw}=-c_wr_s-c_sf_w \tag{31}$$

(29)和(30)式不能看出明显的结论，分析(31)式可知 $H_{ws}<0$，因此得到以下结论：

服务质量会减小质保期的边际利润，同时质保期也会减小服务质量的边际利润。

这个结论可以为制造商的决策提供一定的参考。结论表明在最优策略下质保期和服务质量是反向变化的，企业需要在质保期和服务质量之间进行权衡，要么选择较长的质保期辅以较低的服务质量要么选择较短的质保期辅以更高的服务质量。最优策略下延长质保期的同时需要相应的降低服务质量，提高服务质量的同时需要相应的缩短质保期。

### 4.3 最优策略

我们利用线性代数的知识得到了关于三个控制变量的最优解表达式，即(18)式。本节进行进一步讨论。

$$\begin{pmatrix}\dot{p}\\ \dot{w}\\ \dot{s}\end{pmatrix}=-HM^{-1}\begin{pmatrix}H_{pN}\dot{N}+H_{p\lambda}\dot{\lambda}\\ H_{wN}\dot{N}+H_{w\lambda}\dot{\lambda}\\ H_{sN}\dot{N}+H_{s\lambda}\dot{\lambda}\end{pmatrix}$$

带入具体式子可得：

$$\begin{pmatrix}\dot{p}\\ \dot{w}\\ \dot{s}\end{pmatrix}=-HM^{-1}\begin{pmatrix}H_1\\ H_2\\ H_3\end{pmatrix}$$

其中：

$$H_1=ff_N+fr_N+\eta\lambda f_p+\frac{c_wq}{f_w}(ff_{pN}-f_pf_N)+(p-c)(fr_{pN}-f_pr_N)$$

$$H_2=-c_wff_N-c_wfr_N+\eta\lambda f_w+\frac{c_wq}{f_w}(ff_{wN}-f_wf_N)-(p-c)f_wr_N$$

$$H_3=-c_sff_N-c_sfr_N+(p-c)fr_{sN}$$

由于 $HM$ 是一个对称负定矩阵，因此 $HM^{-1}$ 可以等价变换成一个对角线矩阵，且对角线上的值都是负值。根据矩阵相乘的运算法则，我们知道等式左右两侧的列向量符号相同。由此我们得到定理 1。

**定理 1：**

若 $H_1>0$，则 $\dot{p}>0$，若 $H_1<0$，则 $\dot{p}<0$；

若 $H_2>0$，则 $\dot{w}>0$，若 $H_2<0$，则 $\dot{w}<0$；

若 $H_3>0$，则 $\dot{s}>0$，若 $H_3<0$，则 $\dot{s}<0$。

我们知道 $\dot{p}$，$\dot{w}$ 和 $\dot{s}$ 分别表示价格、质保期和服务质量对时间的导数。在产品生命周期的 t 时刻，若 $\dot{p}>0$ 则表明在 t 时刻需要提高价格，若 $\dot{p}<0$ 则表明在 t 时刻需要降低价格。同理可以判断质保期和服务质量的变化规律。利用定理 1，可以避免求解复杂的微分方程，直接通过代数式 $H_1$，$H_2$ 和 $H_3$ 来判断如何调整价格、质保期以及服务质量。

## 5 最优策略的具体应用

到目前为止，我们对最优解的分析讨论都局限于符号函数的层面，这保证了我们结论的通用性。建模部分我们对每个函数都给出了具体的表达式，本部分将函数的具体形式带入通用解，分析静态市场这一特殊情况，并通过数值试验的方式讨论动态市场的情况。

### 5.1 静态市场分析

静态市场是指口碑效应不明显的产品市场，顾客的购买多为个人独立决策，不太受到已经购买该产品的用户的影响。此类产品多为价格较低的产品，例如一些价格较低的小家电。考虑静态市场下有：$f_N=0$，$\eta=0$。

下面通过应用定理 1 分析静态市场下价格、质保期和服务质量的变化规律。

$$H_1=(1+(p-c)(\beta-\chi))fr_N$$

根据定理 1，若 $\beta>\chi$ 则 $H_1>0$，即应该提高产品价格。反之则降低价格。在静态市场下，若初次购买的价格弹性大于重复购买的价格弹性，则制造商在产品生命周期内应该不断的提高价格以获得最大的利润。若初次购买的价格弹性小于重复购买的价格弹性，则制造商在产品生命周期内应该不断的降低价格以获得最大的利润。现实生活中，重复购买的价格弹性往往大于初次购买的价格弹性，因而产品生命周期内的价格调整也以降价居多。

$$H_2=-c_wfr_N-(p-c)f_wr_N$$

根据定理 1，由于 $c_w>0$，$f>0$，$f_w>0$，$r_N>0$，显然有 $H_2<0$。在静态市场下，制造商为了在产品的生命周期获得最大利润，最优的质保期决策是开始给一个较长的质保期以促进销售，然后逐渐的缩短质保期。

$$H_3 = f\Lambda e^{-\chi p}(s+k_3)^{\gamma-1}((p-c)\gamma - c_s(s+k_3))$$

根据定理 1，若 $(p-c)\gamma > c_s(s+k_s)$，则 $H_3 > 0$，即应该提高服务质量。反之则降低服务质量。其经济意义是，若提高服务质量的边际收益大于边际成本，则应该提高服务质量，若提高服务质量的边际收益小于边际成本，则应该降低服务质量。

### 5.2　动态市场分析

动态市场是指存在口碑效应的市场，消费者的购买行为会受到其他购买者的影响。动态市场下的定理应用比较复杂，本节通过数值试验描绘出价格、质保期和服务质量的最优变化轨迹。通过分析其变化轨迹，检验我们的结论。

将优化模型的具体函数形式带入如下：

$$Max\int_0^T[(p-c_r\delta w-k_4 s^{\varphi})(k_1(^{w}+k_2)\alpha p^{-\beta}$$

$$(1-\frac{N}{N_M})$$

$$(\psi+\frac{N}{N_M})+\Lambda N(^{s}+k_3)\gamma e^{-\chi p(t)})]e^{-\eta t}dt$$

$$s.t.\ \dot{N} = k_1 p^{-\beta}(^{k}_{2}+w)-\alpha(1-\frac{N}{N_M})(\psi+\frac{N}{N_M})$$

其中 $p, w, s, N$ 均是随时间变化的变量，这里为了方便表示，省略了时间参数。为了便于数值分析，将此模型离散化：

$$Max\sum_{i=1}^{n}[(p_i - c_r\delta w_i - k_4 s_i{}^{\varphi})(k_1(w_i +$$

$$k_2)^{\alpha}p_i{}^{-\beta}(1-\frac{N_i}{N_M})(\psi+\frac{N_i}{N_M})+\Lambda N_i(s_i+k_3)^{\gamma}e^{-\chi p_i}]$$

$$\frac{1}{(1+\eta)^{i-1}}$$

$$s.t.\ N_{i+1} = k_1(w_i+k_2)\alpha p_i{}^{-\beta}(1-\frac{N_i}{N_M})(\psi+\frac{N_i}{N_M});i=$$

$$0\sim n$$

这里把规划期离散成 $n$ 期决策，其中：$p_i$，$w_i$ 和 $s_i$ 分别对应第 $i$ 期的价格、质保期和服务质量，$N_i$ 是到第 $i$ 期为止初次购买的累计销量。经过离散化，把最优控制问题转化为有 $3n$ 个变量的非线性优化问题。最优解即反映了价格、质保期以及服务质量的最优控制轨迹。

为了完成数值试验，需要对参数进行赋值。由于我们引用了 Huang Hongzhong 等[12]的初次购买需求模型，我们也采用他们的参数设定：

$\alpha = 0.1$；$\beta = 2$；$k_1 = 3*10^9$；$k_2 = 0.1$；

$N_M = 25000$；$\eta = 0.15$；$c_r = 30$；

$\delta = 0.2$；$\psi = 0.01$

此外还有一些变量和参数是本文新增的，其中包括：重复购买率 $\Lambda$，服务质量的需求参数 $k_3$ 和 $\gamma$，服务质量的成本参数 $k_4$ 和 $\varphi$ 以及重复购买需求的价格弹性系数 $\chi$。这些参数我根据模型的假设条件可知其取值范围：

重复购买率：$\Lambda > 0$。

服务质量的需求参数：$k_3 \geqslant 0$，$1 > \gamma > 0$。

服务质量的成本参数：$k_4 > 0$，$\varphi > 1$。

重复购买需求的价格弹性系数：$\chi > 0$。

假设进行 5 期决策，利用 Lingo11 可以求解此问题，优化结果如下：

**表 1　最优服务质量、价格和质保期**

| 目标函数值 | | 6376803 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | 321.1131 | $w_1$ | 2.5396 | $s_1$ | 0.1798 |
| $p_2$ | 476.2702 | $w_2$ | 3.8208 | $s_2$ | 0.1723 |
| $p_3$ | 509.9387 | $w_3$ | 4.088 | $s_3$ | 0.1715 |
| $p_4$ | 465.8166 | $w_4$ | 3.6796 | $s_4$ | 0.2305 |
| $p_5$ | 319.1145 | $w_5$ | 2.3349 | $s_5$ | 0.3526 |

三个控制变量的最优变化轨迹如表格 1 所示，价格和质保期呈现先增后减的变化规律，服务质量呈现先减后增的变化规律。质保期和服务质量的变化规律也符合我们利用结论 1 的判断。

## 6　结语

本文针对大众消费品的质保决策问题，构建了一个以质保期、价格和质保维修服务质量为决策变量的最优控制模型。在以往的研究中常常忽视质保维修服务质量这一因素的决策和控制。本文假设提高质保服务质量能够带来更多的重复购买，并以此为基础构建了需求模型和成本模型。在完整建模的基础上，应用最大化原理对模型进行了求解，并且对求解结果进行了应用讨论。

研究结果显示质保服务质量与价格、质保期是联动的决策变量，需要进行联合决策，以往的研究中忽视质保服务质量是不够准确的。质保期和质保服务质量存在相背关系，制造商需要在较长的质保期和较高的服务质量之间进行权衡。另一方面，本文还对制造商的调整决策提供了三个指标，在制定决策的同时应该结合产品的市场反应情况，不断检查当前的策略是否正确，如果出现决策失误应该及时调整。

本文将维修服务质量问题引入到质保策略决策的研究中，将研究的视角从单纯的产品扩展到产品和服务的组合包中。现实生活中，单纯的产品或单

纯的服务都比较少见，而产品和服务的组合存在大量的例子，因此本研究具有一定的现实意义。本研究通过模型的优化求解可以得到最佳的服务质量控制策略，这对企业的管理实践具有一定的指导作用，具有应用价值。

本研究存在若干可以继续研究的方向，本文考虑的质保期、价格和服务质量反映了产品生命周期的中产品投向市场之后的过程，而没有考虑产品投向市场之前的研发设计环节。产品的研发设计直接决定了产品的故障率，进而影响产品的质保策略和质保成本，将产品质量相关的因素引入我们的模型，构建产品全生命周期优化决策模型是我们下一步的工作。

## 参考文献：


[1] 王轩，刘丽文．静态市场下考虑重复购买的价格和质保期联合决策[J]. 中国管理科学，2015，23(4)：70－77.

[2] Kim S H, Cohen M A, Netessine S. Performance contracting in after-sales service supply chains [J]. Management Science, 2007, 53(12): 1843－1858.

[3] Cohen M A, Whang S. Competing in product and service: A product life-cycle model [J]. Management Science, 1997, 43(4): 535－545.

[4] Park M, Pham H. A new warranty policy with failure times and warranty servicing times [J]. IEEE Transactions on Reliabilities, 2012, 61(3): 822－831.

[5] Li L. The role of inventory in delivery-time competition [J]. Management Science, 1992, 38(2): 182－197.

[6] Lederer P J, Li L. Pricing, production, scheduling, and delivery-time competition [J]. Operations Research, 1997, 45(3): 407－420.

[7] So K C, Song Jingsheng. Price, delivery time guarantees and capacity selection[J]. European Journal of Operational Research, 1998, 111(1): 28－49.

[8] So K C. Price and time competition for service delivery [J]. Manufactuning & Services Operations Management, 2000, 2(4): 392－409.

[9] Emons W. The theory of warranty contracts [J]. Journal of Economic Surveys, 1989, 3(1): 43－57.

[10] Glickman T S, Berger P D. Optimal price and protection period decisions for a product under warranty [J]. Management Science, 1976, 22(12): 1381－1390.

[11] Mesak H I. Modeling monopolist pricing and protection period decisions for new products under warranty [J]. Optimal Control Applications and Methods, 1996, 17(4): 231－252.

[12] Huang Hongzhong, Liu Zhijie, Murthy D N P. Optimal reliability, warranty and price for new products [J]. IIE Transactions, 2007, 39(8):819－827.

[13] Manna D K. Price-warranty length decision with Glickman-Berger model [J]. International Journal of Reliability and Safety, 2008, 2(3): 221－233.

[14] Lin Peichun, Shue L Y. Application of optimal control theory to product pricing and warranty with free replacement under the influence of basic lifetime distributions [J]. Computers & Industrial Engineering, 2005, 48(1) :69－82.

[15] Wu C C, Lin Peichun, Chou Chaoyu. Determination of price and warranty length for a normal lifetime distributed product [J]. International Journal of Production Economics, 2006, 102(1):95－107.

[16] Wu C C, Chou Chaoyun, Huang Chikong. Optimal burn-in time and warranty length under fully renewing combination free replacement and pro-rata warranty [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2007, 92(7): 914－920.

[17] Wu C C, Chou Chaoyu, Huang Chikong. Optimal price, warranty length and production rate for free replacement policy in the static demand market [J], Omega, 2009, 37(1): 29－39.

[18] Wu C C, Huang Chikong, Chou Chaoyu, et al. An empirical study on the determination of price, warranty length and production rate in the static sales market [J]. Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers, 2009, 26(2): 126－134.

[19] Lin Peichun, Wang Jenhung, Chin S S. Dynamic optimization of price, warranty length and production rate [J]. International Journal of Systems Science, 2009, 40(4):411－420.

[20] Zhou Zhefang, Li Yanjun, Tang K. Dynamic pricing and warranty policies for products with fixed lifetime [J]. European Journal of Operational Research, 2009, 196(3):940－948.

[21] Bass F M. A new product growth for model consumer durables [J]. Management Science, 1969, 15 (5): 215－227.

[22] Mesak H I, Berg W D. Incorporating price and replacement purchases in new product diffusion models for consumer durables [J]. Decision Sciences, 1995, 26(4): 425－450.

[23] Teng J T, Thompson G L. Optimal strategies for general price-quality decision models of new products with learning production costs [J]. European Journal of Operational Research, 1996, 93(3):476－489.

## Joint Warranty Decisions Research Considering Warranty Service Quality

**WANG Xuan，LIU Li-wen**
(School of Economics and Management，Tsinghua University，Beijing 100084，China)

**Abstract**：Service quality becomes more and more important as after-sale service competitions become fierce in modern business. Scholars usually consider the joint decisions of warranty length and product price. In this paper，service quality decisions based on traditional warranty length and price optimization researches are concerned. Better service quality and warranty length can promote sales and raise the price. These three dimensions have dynamic relationship in product lifecycle，but few scholars consider them jointly. The market of consumer goods and developed optimal control problems including cost models，demand models and profit model were investigated in this paper. Manufactures' profit is optimized by choosing optimal service quality，price and warranty length jointly. The maximum principle method is used to obtain solutions. The optimal policies for static market were further investigated and Lingo11 was used to do some numerical tests for dynamic market. This research can help manufactures make better warranty policy and give consumers better warranty service.

**Key words**：warranty；service quality；warranty length；price；repeated purchase；static and dynamic market；maximum principle