

文章编号:1003-207(2016)01-0001-10

DOI:10.16381/j.cnki.issn1003-207x.2016.01.001

内生性回收率与信用风险度量研究

吴建华¹,王新军²,张颖¹

(1. 济南大学数学科学院, 山东 济南 250022; 2. 山东大学经济学院, 山东 济南 250100)

摘要:在信用风险模型中,外生性回收率的设定会忽略回收率对损失分布尾部的影响,而且会导致潜在的模型风险。本文将因子扩散过程引入结构信用风险模型,获得了回收率和违约概率之间的内在关系,利用 Monte Carlo 模拟方法数值分析了预期回收率对违约概率和资产价值波动率的依赖性,结果表明预期回收率与违约率之间具有很强的负相关关系,而且这种相关关系会受到债务人资产价值波动率的正向影响。在内生性回收率下,推导了信用损失的概率分布,计算了信用风险的 Credit-VaR 和 ETF 指标。最后利用市场数据检验了内生回收率信用风险模型的有效性,结果表明该模型可以很好的描述历史违约率和回收率的变化过程。

关键词:内生性回收率;因子扩散过程;信用风险度量;数值模拟;实证检验

中图分类号:F832 **文献标识码:**A

1 引言

对金融机构、金融监管和债权人来说,信用风险度量一直是最为核心的内容。尤其是对于结构化信用衍生产品的定价和信用评级,信用风险的度量更是一个基本的前提条件。然而,目前大多数现代信用风险度量模型主要是围绕违约概率展开,对于违约回收率的研究相对较少,从技术层面来看,违约概率的建模比较容易处理,而回收率的建模需要考虑更多的影响因素,比如借款人的信用质量、债项的特征(债务工具优先级)、抵押品质量、行业分类、宏观经济因素等的影响。在信用风险管理中,违约回收率用来描述违约发生时债权人资产回收的程度。在商业银行内部评级高级法中,预期损失与非预期损失的计算以及对信贷业务的风险调整度量都需要估计回收率风险。同样,在信用衍生产品和结构化信用产品的定价计算中,也必须对标的资产回收率进行估计。

纵观信用风险度量模型的研究,主要以回收率

的外生假设为主。从结构化模型来看,虽然 Merton^[1]在第一次提出结构化信用风险模型时,就指出违约概率和回收率均由到期时企业的市场价值决定,但是 Merton 对于市场价值如何影响回收率的机制并没有做进一步的说明。而且,在 Black 和 Cox^[2]将 Merton 模型推广到首达时模型时,回收率不再设定为由企业市场价值决定,而是被独立的模型化的,它被定义为未偿付债务价值的固定比率,而且与违约概率相互独立。之后的研究基本上是以外生性回收率作为前提,只是具体假设有所差异,比如 Jokivuolle 和 Peura^[3]的研究中假设外生的抵押品的价值是决定回收率的唯一随机因素。Giesecke^[4]的研究中回收率则直接被假设为常数,Asvanunt 和 Staal^[5-6]的研究中回收率是由一个简约化的方法决定的。总之,绝大多数结构化模型中,无论回收率被直接假设为常数,还是决定于某些因素,都是以回收率的外生性为特征的。

从信用风险度量的另一个路径——简约化模型来看,回收率则彻底被外生化。Jarrow 和 Turnbull^[7]首次建立了一个离散形式的简约化模型,随后在 Jarrow 等^[8]、Duffie 和 Singleton^[9]的研究基础上发展形成了简约化信用风险模型,在所有的简约化模型中,只有在为了计算信用损失分布和进行资产定价的时候,才考虑回收率的问题。简约化模型对回收率的处理方式可以概括为三种:等价回收率、市值比例回收率和面值比例回收率。Jarrow 和

收稿日期:2014-02-19; 修订日期:2014-07-17

基金项目:教育部人文社科规划基金资助项目(13YJAZH091);
国家社会科学基金资助项目(12BTJ015); 济南大学
社科基金资助项目(15Y1329); 济南大学优秀人才科
研基金资助项目(1008359,1008645)

通讯作者简介:吴建华(1975-),男(汉族),山东博兴人,济南大
学数学科学学院,讲师,校聘 A4 岗,研究方向:
精算与风险控制、金融风险量化与管理,E-mail:
wu88172968@163.com.

Turnbull^[1]假设当违约发生时,债权人可以获得固定比例的等价面值无违约风险的零息债券。Duffie和Singleton^[9]假设回收部分的价值与债券违约前的市场价值保持一个恒定的比率。Houweling和Vorst^[10]将回收率看做违约债券面值的一部分。违约发生时,债权人可获得基于面值的恒定比率的现金偿还。这三种方法各具特点:等价回收率的形式更适合适用于公司债券;市值比例回收率的假定符合互换合约的结构且易于拓展。面值比例回收率可以简化模型在计算方面的复杂性。

另外,从信用风险的应用模型来看,四大现代信用风险度量应用模型 Credit Metrics、KMV、Credit Portfolio View 和 Credit Risk Plus 中的违约回收率通常被看作是外生的常数或随机变量,而且回收率和违约概率被看作两个独立变量。关于外生性回收率分布的假设,Frye^[11]建立了回收率的正态分布模型,Pykhtin^[12]提出对数正态分布模型,Andersen和Sidenius^[13]讨论了正态模型、log 正态模型、probit 正态模型和 logit-正态模型进行了对比研究。黄大海^[14]对四种经典的应用模型的回收率情况进行了总结,说明了 Credit Metrics、KMV 和 Credit Portfolio View 中的回收率通常假定服从单峰 Beta 分布,与违约概率互不相关,Credit Risk+模型中的回收率则被假设为常数。王国栋和詹原瑞^[15],汪飞星和姚磊^[16]则进一步建立了回收率的双峰 Beta 分布密度模型。陈暮紫等^[17]利用广义 Beta 回归对影响不良贷款回收率的因素进行了实证分析,给回收率的实证研究提供了一个很好的计量经济学分析框架。

关于回收率和违约概率之间的相关性关系实证研究方面存在一定的争议。对于债券来说,Carty等^[18]、Frye^[19]、Bakshi等^[20]、Hu和Perraudin^[21]、Cantor等^[22]、Carey和Gordy^[23]以及Altman等^[24]的研究发现对于企业债券来说,回收率与违约概率之间存在负相关关系。对于贷款来说,由于抵押品的存在,只要抵押品的价值相对稳定,即使由于外在经济环境的影响导致违约概率上升,贷款的回收率也可能不会下降。但是Hamilton^[25]、Hu Yenting等^[26]通过实际的数据研究显示,当总的贷款违约概率较高时,回收率与违约概率之间还是存在一定的负相关性。对于信用衍生产品来说,Hull和White^[27]研究表明,衍生品CDO和CDS的隐含回收率与PD之间都存在显著的负相关关系。Das和Hanouna^[28]利用CDS价差数据进行了实证分析,发现隐含回收率和PD呈负相关关系,尤其在PD很

高时,这种负相关性更加明显。

综上所述,在信用风险度量模型中,有关回收率的研究主要集中于回收率的影响因素、回收率的分布模型、回收率与违约率的相关性等方面。目前的研究主要包括两个方面的不足,一是回收率的外生性假设。绝大多数信用风险模型普遍假设回收率与违约概率相互独立,实证研究表明这会严重低估实际的巨额损失。而且这种主观的假设会导致潜在的模型设定风险;二是回收率分布的假设,多数模型假设回收率服从贝塔分布。但是实证研究显示,基于贝塔分布的信用 VaR 估计的误差有增大的趋势。

然而,无论是从经济学直觉还是从金融实践来看,违约资产的回收率都不应该是外生的,事实上,如果某项资产在违约之后具有较低的回收率,那么这就意味着该项资产必然具有较高的违约率,反之,较高的回收率必然意味着债务人的以及债项的信用质量较高,在正常的经济环境下,不会轻易的发生违约。实际上,从大量关于回收率的实证研究来看,违约概率和回收率之间不是相互独立的。

从上面这些文献可知,无论是债券、贷款还是信用衍生品,回收率和违约概率之间都存在明显的负相关关系。但是以上这些文献只是说明了回收率和违约概率之间的负相关关系,并没有具体说明这种负相关关系之间的内在机理。为此,需要考虑如何将回收率进行内生分析。目前关于这方面的研究还较少,仅有的文献有,Guo Xin等^[29]提出在传统简约模型的框架中加入一个反映回收率的随机过程。模型中公司违约过程、回收率过程和风险债务定价的量化都是基于公司的资产价值。Chava等^[30]提出,在简约模型中假设违约概率和回收率同时依赖于单一的公共因子,从而保留了违约和回收率之间的负相关,但是该模型的缺点是待估参数过多,而且有些参数从经济学的角度难以解释。不过,以上这两篇文章对于回收率内生化的研究,主要是在简约模型框架内进行的,对于结构模型框架内的回收率内生机理的研究还是个空白。

Merton曾提出违约概率和回收率均由到期时企业的市场价值决定。但是Merton对于市场价值如何影响回收率的机制并没有做进一步的说明。本文在结构模型框架内,研究了多资产内生性回收率的机理,在假设信用资产服从因子扩散过程的假设下,推导了回收率和违约概率之间的内在函数关系,该函数关系仅仅依赖于一个参数,我们称之为内生回收率。内生回收率在保持违约率同回收率之间的

负相关关系的前提下,避免了外生性回收率假设所存在的潜在的模型风险。在内生回收率框架内,推出了信用损失的概率分布,计算了两个重要的信用风险度量指标 C-VaR 和 ETF。利用 Monte Carlo 模拟数值分析,检验了内生回收率的有效性。最后,利用 Moody 公司的部分数据,检验了本文模型的有效性。

2 回收率的内生性分析

考虑具有 K 个企业的债务组合,企业 $k(k=1, \dots, K)$ 的市场价值为 V_k 。出于分析的简化,假设企业资产结构由所有权益和负债组成,企业 k 发行一种特定的零息债券,该债券的面值为 $F_k = F$,持有期为 T 。假设企业资产市值的初始值为 $V_k(0) = V(0)$ 。当企业资产价值在 T 时刻低于面值,即 $V_k < F$ 时,违约发生。记企业 k 发生违约时,债权人的回收率表示如下:

$$R_k = \begin{cases} V_k/F & V_k < F \\ 1 & V_k \geq F \end{cases} \quad (1)$$

令 $f_{V_k}(v)$ 表示在到期日 T ,企业 k 的市场价值 V_k 的概率密度函数。那么违约概率为:

$$P_{D,k} = P(V_k < F) = \int_0^F f_{V_k}(v) dv \quad (2)$$

预期回收率为:

$$E(R_k) = \int_0^{+\infty} \frac{v}{F} f_{V_k}(v) dv = 1 - P_{D,k} + \int_0^F \frac{v}{F} f_{V_k}(v) dv \quad (3)$$

由(2)(3)式可知,违约率和回收率都是由 T 时刻企业的资产价值 V_k 决定的。从(3)可以看出,预期回收率 $E(R_k)$ 受到违约率 $P_{D,k}$ 的直接影响,同现有的大多数信用风险模型中两者是独立的假设相比,违约率和回收率之间的这种函数关系更贴近实际情况,我们称之为内生性回收率。值得一提的是,本文突出了回收率的“内生”特征,这一点从式子(1)和(3)中可以清楚的看到,无论是回收率 R_k 还是预期回收率 $E(R_k)$ 都是资产价值 V_k 的函数,这是同已有的外生性回收率的设定本质不同的地方,而三种常见的外生性回收率:等价回收率、市值比例回收率和面值比例回收率的设定都是在债权债务契约签订之前就外生设定的,而与债务契约签订之后的资产的价值是没有任何关系的。

3 基于因子扩散模型的内生回收率

3.1 企业价值的因子扩散模型

在经典的结构模型中,通常假设企业的市场价

值 $V(t)$ 服从下面的扩散过程:

$$dV(t) = V(t)\mu dt + V(t)\sigma dZ \quad (4)$$

其中 μ 为漂移项, σ 为波动项, dZ_k 服从标准布朗运动。但是,这种经典设定没有说明造成市场价值波动的原因。从经济学常识我们可知,影响市场价值波动的原因无非来源于两个方面,一是系统性的宏观经济环境的改变;二是非系统性的个别企业内部经营管理的微观层面的变动。因此,在扩散过程中引入公共的宏观经济因子和企业自身的特殊因子,可以更好的刻画企业价值的变化。另外,在信用资产组合中,不同企业之间的相关性也会影响到整个资产组合价值的变动,表现为企业之间的违约相关性,通过因子模型可以方便的描述不同企业之间的交互作用,这种相关性的描述在经典的 Merton 模型中没有给出。

假设企业 $k(k=1, \dots, K)$ 的市场价值 V_k 是由公共的宏观经济因子 M 和个别企业的特殊因子 Z_k 所决定的,即:

$$V_k = \sqrt{c}M + \sqrt{1-c}Z_k \quad (5)$$

其中 M 和 Z_k 均服从标准正态分布, $Z_k, k=1, \dots, K$ 之间相互独立,每一个 Z_k 与 M 也相互独立。 $c \in [-1, 1]$ 为常数,这意味着,任何两个企业之间的具有相同的相关结构。这样,我们就可以假设企业 k 的市场价值 $V_k(t)$ 在 t 时刻的变动过程服从下面的随机微分方程:

$$\frac{dV_k(t)}{V_k(t)} = \mu dt + \sqrt{c}\sigma dM + \sqrt{1-c}\sigma dZ_k \quad (6)$$

上式描述了一个具有线性相关特征的因子扩散过程, μ 为漂移项, σ 为波动项和 c 为相关系数。 dM 和 dZ_k 分别表示市场的波动性和企业 k 的波动性,都服从标准维纳过程。显然,由(6)式可知,不同的宏观经济变量 M 和企业的特殊状况 Z_k 的实际值,会形成不同的市场价值 V_k 的概率密度函数 $f_{V_k}(v)$,从而根据(2)(3)我们可以计算得到不同的违约概率 $P_{D,k}$ 和预期回收率 $E(R_k)$ 。

3.2 内生回收率的理论分析

把债券的期限 T 等分为 N 段, $\Delta t = T/N$ 为离散时间的增量,这样我们就可以得到(6)式的离散形式,对任意的 $t \in [0, T]$:

$$\frac{\Delta V_k(t)}{V_k(t)} = \mu \Delta t + \sqrt{c}\sigma \eta \sqrt{\Delta t} + \sqrt{1-c}\sigma \epsilon_k \sqrt{\Delta t} \quad (7)$$

其中 η 和 ϵ_k 均为标准正态分布,分别表示来自市场方面的随机冲击和企业自身经营的不确定性带

来的冲击。对(7)利用迭代运算可得在到期日 T ，企业 k 的市场价值服从如下的规律：

$$V_k(T) = V(0) \prod_{t=1}^N (1 + \mu\Delta t + \sqrt{c\sigma}\eta \sqrt{\Delta t} + \sqrt{1-c}\sigma\epsilon_k \sqrt{\Delta t}) \quad (8)$$

令 $X_k = (V_k(T) - V(0))/V(0)$ 为企业 k 的市场收益率，所有 K 个企业在 $[0, T]$ 内的市场平均收益率记为 X_m ，则：

$$X_m = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K X_k = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \prod_{t=1}^N (1 + \mu\Delta t + \sqrt{c\sigma}\eta \sqrt{\Delta t} + \sqrt{1-c}\sigma\epsilon_k \sqrt{\Delta t}) - 1 = \prod_{t=1}^N (1 + \mu\Delta t + \sqrt{c\sigma}\eta \sqrt{\Delta t} + \sqrt{1-c}\sigma(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \epsilon_k) \sqrt{\Delta t}) - 1 \quad (9)$$

令 $K \rightarrow \infty$ ，我们可以得到所有的 ϵ_k 的均值的极限，记为 $E(\epsilon_k) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \epsilon_k = 0$ 。因此，在 K 足够大的情况下，(9)可以近似的写成：

$$X_m + 1 = \prod_{t=1}^N (1 + \mu\Delta t + \sqrt{c\sigma}\eta \sqrt{\Delta t}) = \exp(\sum_{t=1}^N \ln(1 + \mu\Delta t + \sqrt{c\sigma}\eta \sqrt{\Delta t})) \approx \exp(\bar{\mu}T + \sqrt{c\sigma}\eta \sqrt{\Delta T}) \quad (10)$$

其中 $\bar{\mu} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ 。上式的最后一个约等号，利用了对数函数关于一阶差分 Δt 的泰勒展式，并且略掉了高阶项之后整理而得。对上式两边取对数可得：

$$\ln(X_m + 1) = \bar{\mu}T + \sigma \sqrt{cT} \sqrt{N}\eta \quad (11)$$

由于 η 服从标准正态分布，根据泛函中心极限定理(陆懋祖^[31])， $\sqrt{N}\eta$ 渐进服从标准正态分布，因此，当 N 足够大的时候， $\ln(X_m + 1)$ 服从均值为 $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$ ，方差为 $\sigma^2 T$ 的正态分布。这实际上是对市场平均收益率 X_m 进行了一个对数正态分布的转换，那么 X_m (因为 $X_m = (X_m + 1) - 1$) 的概率密度为：

$$f_{X_m}(x) = \frac{1}{(x+1) \sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \cdot \exp(-\frac{(\ln(x+1) - \bar{\mu}T)^2}{2\sigma^2 T}) \quad (12)$$

对于企业 k ，利用(8)(9)(11)我们有：

$$\ln \frac{V_k(T)}{V(0)} = \sum_{t=1}^N \ln(1 + \mu\Delta t + \sqrt{c\sigma}\eta \sqrt{\Delta t} +$$

$$\sqrt{1-c}\sigma\epsilon_k \sqrt{\Delta t}) \approx \ln(X_m + 1) - \frac{(1-c)\sigma^2}{2}T + \sigma \sqrt{(1-c)T} \quad (13)$$

$$\sqrt{N}\epsilon_k \quad (14)$$

由于 $\epsilon_{k,t} \sim N(0, 1)$ ，因此在 X_m 已知的条件下，所有的变量 V_k 是独立的，并且当 N 足够大时， $\ln V_k(T)/V(0)$ 近似服从正态分布，其中均值为 $\bar{\mu} = \ln(X_m + 1) - \frac{1}{2}(1-c)\sigma^2 T$ ，方差为 $\sigma^2 = (1-c)\sigma^2 T$ 。

注意，由于我们考虑的是一个同质的资产组合，因此，在后面的叙述中，我们将忽略掉下标 k ，这样会使得表达更为简洁。在 T 时刻，企业市值 V 的概率密度函数是如下的对数正态分布：

$$f_V(v) = \frac{1}{v \sqrt{2\pi\sigma^{\wedge}}} \exp(-(\ln \frac{v}{V_0} - \mu^{\wedge})^2 / 2\sigma^{\wedge}) \quad (15)$$

由此可以得到单个企业的违约概率如下：

$$P_D = P_D(X_m) = P(V < F) = \int_0^F f_V(v) dv = \Phi\left(-\frac{\ln \frac{F}{V_0} - \mu^{\wedge}}{\sigma^{\wedge}}\right) \quad (16)$$

其中， Φ 表示累积标准正态分布。为简化表达，令 $A(X_m) = \ln \frac{F}{V_0} - \ln(X_m + 1)$ 表示均值部分， $B = \sqrt{(1-c)\sigma^2 T}$ 表示波动部分。从而 $P_D(X_m)$ 可以简化为：

$$P_D(X_m) = \Phi\left(\frac{A(X_m) + \frac{1}{2}B^2}{B}\right) \quad (17)$$

企业的平均违约损失 $L = 1 - V/F$ 的期望值可以如下计算：

$$E(L(X_m)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \frac{v}{F}) f_V(v) dv = \int_0^F (1 - \frac{v}{F}) f_V(v) dv = P_D(X_m) - \exp(\ln(X_m + 1) - \ln \frac{F}{V_0}) \Phi((\ln \frac{F}{V_0} - \mu^{\wedge})/\sigma^{\wedge}) = P_D(X_m) - e^{-A(X_m)} \Phi((A(X_m) - \frac{1}{2}B^2)/B) \quad (18)$$

从而有：

$$E(R(X_m)) = 1 - E(L(X_m)) = 1 - P_D(X_m) + e^{-A(X_m)} \Phi((A(X_m) - \frac{1}{2}B^2)/B) \quad (19)$$

根据(17)我们可以将 $A(X_m)$ 表达成 P_D 的函数：

$$A(X_m) = B\Phi^{-1}(P_D) - \frac{1}{2}B^2 \quad (20)$$

这样,我们就可以得到预期回收率和违约概率的函数依赖关系:

$$E(R(P_D)) = 1 - P_D(X_m) + \exp(-B\Phi^{-1}(P_D) + \frac{1}{2}B^2)\Phi(\Phi^{-1}(P_D) - B) \quad (21)$$

这就是内生性回收率如何受到违约概率影响的内在机理。此外,从方程(21)还可以看到预期回收率与违约率的函数关系受外生变量 B 的结构性影响。为了更加直观的理解这一关系,在图 1 中给出不同的波动率下 B,违约概率对预期回收率影响的变化情况。

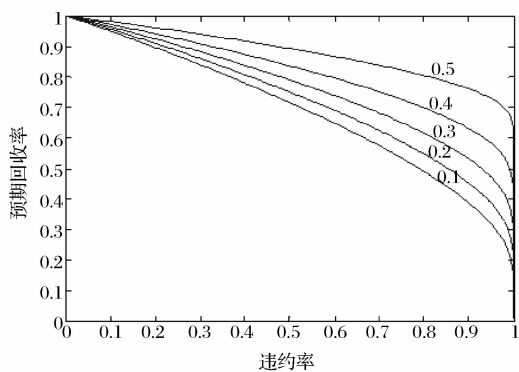


图 1 不同波动率下,违约概率对预期回收率的影响, B=0.1,0.2,0.3,0.4,0.5

由图 1 可知,随着违约概率 P_D 的增加,预期回收率对违约概率变得更加敏感,当违约概率足够大,趋向于 1 时,预期回收率会迅速趋向于 0,表明预期回收率对违约概率具有高度的负的依赖性。另外,债务人资产的波动性 B 越高,预期回收率 $E(R(P_D))$ 就整体越高,表明资产价值的波动性不但影响违约概率,对于回收率的整体变动具有系统性的影响,并且表现出较强的正相关性。无论是违约概率还是波动性,它们都对预期回收率具有内在的影响。这充分说明,回收率不应该被人为地设定为外生的,回收率的外生性设定会带来严重的模型风险。

3.3 对内生回收率的数值分析

在 MC 模拟中,我们考虑了方程(8)中的离散时间随机过程。由于我们只考虑在 T 时刻的债务的市场价值,因此在进行模拟时,我们直接取了一大步,即 $\Delta t = T$,故 $N = 1$ 。因此,市场价值的离散形式为:

$$V_k(T) = V(0)(1 + \mu T + \sqrt{c\sigma}\eta\sqrt{T} + \sqrt{1 - c\sigma}\epsilon_k$$

$$\sqrt{T}) \quad (22)$$

每次给定一个市场波动的实现值 η ,我们模拟 $K = 5000$ 次得到 5000 个不同的 ϵ_k 实现值。对于每一次模拟的运行,我们计算市场平均收益率 X_m ,违约概率 $P_D(X_m)$ 和预期回收率 $E(R(X_m))$ 。市场平均收益率 X_m 被定义为到期日 T 时刻的平均收益:

$$X_m = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\frac{V_k(T)}{V_0} - 1 \right) \quad (23)$$

对于足够大的 K 来说,异质项 ϵ_k 会达到平均水平,而市场平均收益率 X_m 由 η 的实现值单独的定义。这就是为什么我们利用市场平均收益率作为其他观测值的参数的原因。对于违约概率做如下估计:

$$P_D(X_m) \approx N_D(X_m) / K \quad (24)$$

其中 $N_D(X_m)$ 是违约次数,取值为事件 $V_k(T) < F$ 发生的次数。由方程(1),我们可以得到损失率:

$$L_k = \begin{cases} \frac{F - V_k}{F} & F > V_k \\ 0 & F \leq V_k \end{cases} \quad (25)$$

进而得到预期损失率:

$$E(L(X_m)) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K L_k = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\max(F - V_k, 0)}{F} \quad (26)$$

从而可以估计预期回收率为:

$$E(R(X_m)) = 1 - E(L(X_m)) \quad (27)$$

这里,我们假设违约的次数严格的非零,这对于足够大的组合规模 K 来说是合理的。对市场平均收益率项的实现值模拟 10^6 次,这样我们就可以得到市场平均收益率 X_m ,违约概率 $P_D(X_m)$ 和预期回收率 $E(R(X_m))$ 的不同的值。

不失一般性,假设市场价值的初始值为 $V_0 = 100$,零息债券的面值为 $F = 75$,到期日为 $T = 1$ (比如 1 年)。相关系数假设为 $c = 0.5$,这同股票价格的常见的相关性是一致的。扩散过程的参数设为 $\mu = 0.05, \sigma = 0.15$,这意味着每年的平均增长率 5% 和波动率 15%。对应的杠杆率 $F/V_0 = 75\%$ 。带入(22)可得:

$$V_k(1) = 100(1 + 0.05 + \sqrt{0.5} \cdot 0.15 \cdot \eta + \sqrt{1 - 0.5} \cdot 0.15 \cdot \epsilon_k)$$

模拟结果画在图 2 中,同时给出了预期回收率和预期损失率对违约概率的依赖性。

在图 2 中,左图显示了预期回收率 $E(R(X_m))$ 对违约概率 $P_D(X_m)$ 的依赖性,右图显示了预期损

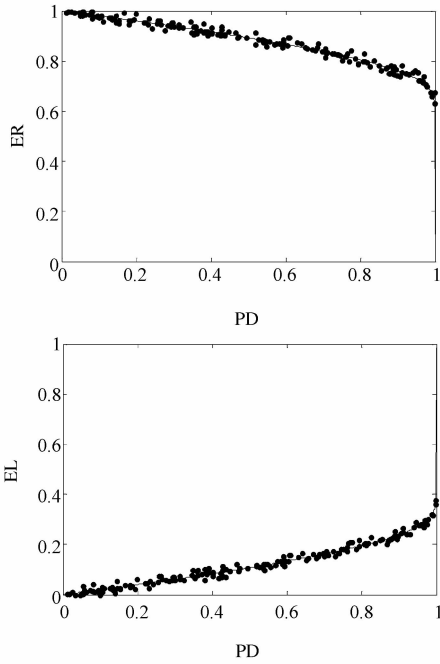


图2 预期回收率 ER 和预期损失率 EL 对违约概率 PD 的依赖性

失率 $E(L(X_m))$ 对违约概率 $P_D(X_m)$ 的依赖性,其中红色的散点表示 MC 模拟结果,蓝色的线表示分析结果。分析结果中的波动性 B 是由模拟结果获得的参数。在这两个例子中,我们分别观察到了在 MC 模拟和方程(21)中的分析结果之间的高度的一致性。而且对于高违约概率,对于均值的偏离是较小的。这一点同实际的回收率是相符的,在后面第五部分的实证分析中可以得到验证。由此可知,本文给出的基于因子扩散模型的回收率可以很好的刻画回收率函数的内生性特征。

4 基于内生回收率的信用风险度量

信用风险的度量需要计算三个基本核心的参数:违约概率(PD)、违约损失率(LGD)和违约风险敞口(EAD)。利用这三个基本参数,就可以得到任何组合债务潜在的信用损失 CL,从而进一步的根据信用损失的概率分布获得信用在险价值(Credit Value at Risk, C-VaR)和预期尾部损失(Expected Tail Loss, ETL)。

首先讨论信用损失 CL 的概率分布。对于具有 K 份合约的债务组合说,其潜在的信用损失为:

$$CL = \sum_{k=1}^K PD_k * EAD_k * LGD_k \quad (28)$$

其中 PD_k 、 EAD_k 和 LGD_k 分别为债务 k 的违约概率、违约风险敞口和违约损失率。对于齐次债务

组合,有 $CL = K * PD * EAD * LGD$ 。出于简化,记 $EAD = F, LGD = L$,故 K 份合约的齐次债务组合的潜在的信用损失为:

$$CL(X_m) = K * F * PD(X_m) * L(X_m) \quad (29)$$

下面给出信用损失 CL 的概率分布。由 CL 的表达式可知, K, F 都是常数,而 $PD(X_m)$ 和 $L(X_m)$ 都是市场平均收益率 X_m 的函数,因此, CL 的概率分布 $f_{CL}(l)dl$ 同市场平均收益率的概率分布 $f_{X_m}(x_m)dx_m$ 等价的,即

$$f_{CL}(l)dl \Leftrightarrow f_{X_m}(x)dx \quad (30)$$

故信用损失 CL 的概率分布函数为:

$$F_{CL}(l) = \int_{-1}^l f_{CL}(v)dv \Leftrightarrow \int_{-1}^x f_{X_m}(v)dv = F_{X_m}(x) \quad (31)$$

根据式子(12)可得:

$$f_{CL}(l) = \frac{1}{(l+1)\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \cdot \exp\left[-\frac{(\ln(l+1) - \mu T + \frac{1}{2}\sigma^2 T)^2}{2\sigma^2 T}\right] \quad (32)$$

即, $\ln(CL+1)$ 服从均值为 $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$, 方差为 $\sigma^2 T$ 的正态分布。

给定组合信用损失和市场平均收益率之间的函数关系, $CL(X_m) = K * F * PD(X_m) * L(X_m)$, 我们可以将市场平均收益率 X_m 的密度函数转换为信用损失 CL 的密度函数:

$$f_L(L) = \frac{1}{|L'(X_m)|} f_{X_m}(X_m) \quad (33)$$

图 3 给出了信用损失 CL 的理论损失分布的结果和 MC 结果的对比。

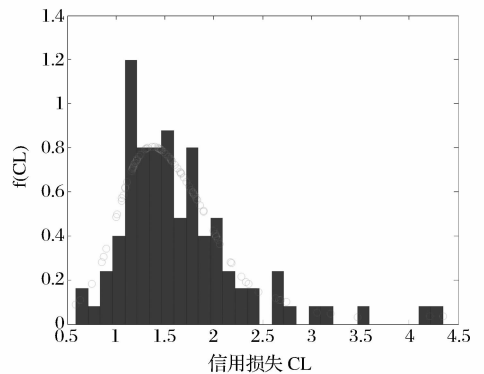


图3 信用损失的理论分布和 MC 模拟

从图 3 中,我们观察到信用损失的理论分布和 MC 模拟的高度的一致性,即使对于极端大的组合损失也是如此。下面利用上面推导的信用风险损失

分布来计算两个重要的信用风险度量指标。

在金融风险管理中, VaR 是目前各大金融机构主流的风险度量方法, 而且 VaR 的应用功能已经拓展到了弥补潜在损失所需要的经济资本、银行的资本充足率等资本要求的计算中, 但是, 作为风险管理的主流工具的 VaR 并不满足风险度量的一致性要求^[32], 事实上, 虽然 VaR 满足单调性、正齐次性和平移不变性, 但是它不满足次可加性, 因而无法充分体现资产组合的风险分散效应, 这也是本文引入预期尾部损失 ETL 作为对 VaR 信用风险度量指标补充的原因。

信用 VaR (Credit Value at Risk, C-VaR) 指的是在目标时间范围内 (本文假设为 1 年), 某一置信水平下的非期望信用损失。首先利用上面推出信用损失的分布函数 $f_{CL}(l)$, 在给定的置信水平 α 的条件下, 定义最差信用损失 (WCL), $1 - \alpha = \int_{WCL}^{\infty} f_{CL}(l) dl$, 然后, 信用 VaR 就可以用对预期信用损失的偏离程度来度量:

$$C - VaR = WCL - ECL \quad (34)$$

其中 ECL 表示预期信用损失, 有 $ECL = \int_{-\infty}^{\infty} f_{CL}(l) dl$ 。注意, 式子中所有的损失都定义为正值。那么, 用 $C - VaR_{\alpha}$ 表示置信水平为 α 的信用风险在险价值, 则有下式:

$$C - VaR_{\alpha} = F_{CL}^{-1}(1 - \alpha) - ECL \quad (35)$$

其中, $F_{CL}^{-1}(1 - \alpha)$ 表示的是信用损失的 $1 - \alpha$ 分位数。

预期尾部损失 (Expected Tail Loss, ETL) 是 Acebi 和 Tache^[33] 提出的风险度量方法, 它弥补了 VaR 方法不满足次可加性的缺陷, 是一个具有一致性的风险度量指标。如果 X 的分布函数 $F_X(x)$ 是连续的, 在给定置信水平 α 下, ETL 定义为:

$$ETL_{\alpha} = E[X | X \geq VaR_{\alpha}] = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{VaR_{\alpha}}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (36)$$

对于信用损失 CL 来说, 预期尾部损失 C-ETL 为:

$$ETL_{\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{C - VaR_{\alpha}}^{\infty} CL(l) f_{CL}(l) dl \quad (37)$$

下面利用 MC 技术进行数值计算。考虑一个由 500 个信用资产构成的同质的债务组合, 假设市场价值的初始值为 $V_0 = 100$, 零息债券的面值为 $F = 75$, 到期日为 $T = 1$ (比如 1 年)。假设任何两个资

产之间的相关系数为 $c = 0.5$, 这同股票价格的常见的相关性是一致的。扩散过程的参数设为 $\mu = 0.05$, $\sigma = 0.15$, 这意味着每年的平均增长率 5% 和波动率 15%。对应的杠杆率 $F/V_0 = 75\%$ 。表 1 给出基于 0.99 置信水平的预期信用损失 ECL, C-VaR 和 C-ETL 的数值计算的结果。

表 1 ECL、C-VaR 和 ETL 的数值模拟和解析结果

	模拟结果	解析结果
ECL	7.3843	7.3569
C-VaR	1.3028	1.2849
C-ETL	2.3814	2.3685

注: 置信水平 $\alpha = 0.99$

从表 1 可以看出, 对于预期信用损失 (ECL), 信用在险价值 (C-VaR) 和预期尾部损失 (ETL), 解析结果同模拟结果高度一致, 这说明本文所给出的基于内生性回收率的信用风险的度量模型, 能够很好的对信用风险进行度量。

5 内生性回收率的实证检验

由于国内还没有长期完整的债券信用违约数据库, 本文使用了山东大学金融实验室提供的部分国外的债券信用评级数据。我们对于 2000 年 1 月 1 日到 2011 年 12 月 31 日的债券信用评级数据, 根据每一个债务人的违约风险进行排序, 从而构建出同质的信用组合。在我们的分析中, 我们考虑了组合内不同到期日和相应的回收率的违约概率。

我们测算了 2000 年 1 月 1 日到 2010 年 12 月 31 日的 1 年期债券的违约概率和回收率。第一段时期从 2000 年 1 月 1 日到 2000 年 12 月 31 日。第二段为 2000 年 2 月 1 日到 2001 年 2 月 31 日, 以此类推, 最后一段时期为 2011 年 1 月 1 日到 2011 年 12 月 31 日。

由于违约事件是稀有事件, 为了尽可能的获得更多的违约数据, 我们考虑了初始评级较低的投机级信用资产组合, 这些评级表明相关的信用资产是高风险的。我们统计估算了评级为 Caa1, Caa2 和 Caa3 的优先担保债券的违约概率和回收率, 如图 4。

从图 4 可以看出, 违约概率 PD 和违约回收率 RR 二者之间表现出了高度的负相关。实际的数据表明, 回收率同违约概率之间是具有内在的联系的, 而不是像大多数文献所给出的独立性假设, 故回收率是具有内生性的特制的。

下面我们选择了特定评级的债券组成我们的组合, 假设它们在构成组合的相同时刻发行的。理论



图4 评级为 Caa1, Caa2 和 Caa3 的优先担保债券的违约概率和回收率

的预期回收率是根据式子(21)计算的,这实际上是对潜在的随机过程实现值的一个平均。因此,我们对实际回收率的数据进行平均来描述预期回收率,然后观察两者的接近程度。为此,我们将实际的违约率数据等分成 30 组,然后计算每组的回收率,最后进行平均得到整个资产组合的平均回收率。计算结果画在图 5 中。

率,利用(21)计算模型给出,圆圈表示利用实际回收率的数据进行平均来描述预期回收率。在利用(21)计算进行理论计算时,参数 B 是利用组合的损失数据通过最小二乘法估算而得。估算结果为 $B = 0.635$ 和 $B = 0.882$,分别对应着两年期和四年期。我们发现到期日越长,B 越大,这同前面给出的理论关系完全一致,即 $B = \sqrt{(1-c)\sigma^2 T}$ 。从图 5 中,我们可以看出,随着违约率的增加,平均回收率是递减的。

我们用这些数据来检验本文的内生性回收率模型,从图 5 可以发现模型的理论结果同实际的数据高度的一致。内生性回收率模型能够更好的描述经验数据。该模型可以作为现存的违约概率模型的一个很好的补充。实际的债务人的资本结构比 Merton 模型框架内的更加复杂,而且违约通常在到期日之前就发生了。另外,如果我们已经知道违约概率的分布,也可以利用方程(37)来描述组合损失分布。

6 结语

违约和回收率之间的交互性对大额的信用组合损失具有关键的影响。然而在现有的信用风险模型中,违约概率和回收率经常被独立的模型化。本文基于经典的扩散过程,推导了违约和回收率之间的函数关系。该函数关系是由一个单参数决定的。MC 模拟实验直观的揭示了违约以及参数如何影响该内生回收率的变化。在内生回收率框架下,本文计算了度量信用风险的两个重要的指标 Credit-VaR 和 ETF 指标。最后利用实际数据检验了本文所提出的内生回收率信用风险模型的有效性,结果表明内生回收率信用风险模型可以更好的描述历史违约率的变化过程。

本文的研究仅仅考虑了信用风险度量中经典的结构模型,对于更多的结构模型也可以利用本文的思路进行拓展。显然本文所提出的内生性回收率模型可以用在任何其他的违约概率模型中,它可以改进现有的一系列信用风险模型。

此外本文没有考虑信用风险的定价问题,相信本文的内生性回收率也可以用于信用风险产品(比如,传统的风险债券和信用衍生品 CDS,以及结构化产品 CDO 分券等)的定价中,这也是作者下一步研究的思路和方向。

参考文献:

[1] Merton R C. On the pricing of corporate debt: The risk

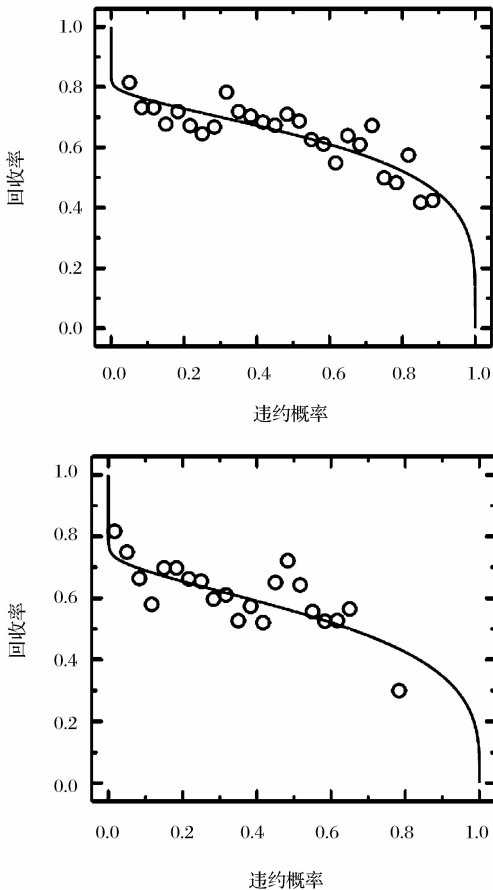


图5 两年期和四年期违约概率与平均损失及回收率

在图 5 中,实线表示模型给出的理论预期回收

- structure of interest rates[J]. *The Journal of Finance*, 1974, 29(2): 449—470.
- [2] Black F, Cox J C. Valuing corporate securities; Some effects of bond indenture provisions[J]. *The Journal of Finance*, 1976, 31(2): 351—367.
- [3] Jokivuolle E, Peura S. A model for estimating recovery rate and collateral haircuts for bank loans [J]. *European Financial Management*, 2003, 9(3):611—627
- [4] Giesecke K. Credit risk modeling and valuation: An introduction[J]. *Ssrn Electronic Journal*, 2004:1—67.
- [5] Asvanunt A, Staal A. The corporate default probability model in Barclays Capital POINT Platform (POINT CDP)[M]. *Portfolio Modeling*, Barclays Capital, 2009.
- [6] Asvanunt A, Staal A. The POINT Conditional Recovery Rate (CRR) Model[M]. *Portfolio Modeling*, Barclays Capital, 2009.
- [7] Jarrow R A, Turnbull S M. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk[J]. *The Journal of Finance*, 1995, 50(1): 53—85.
- [8] Jarrow R A, Lando D, Turnbull S M. A Markov model for the term structure of credit risk spreads[J]. *Review of Financial Studies*, 1997, 10(2): 481—523.
- [9] Duffie D, Singleton K J. Modeling term structures of defaultable bonds [J]. *Review of Financial Studies*, 1999, 12(4): 687—720.
- [10] Houweling P, Vorst A C F. An empirical comparison of default swap pricing models[J]. *Journal of labor Economics*, 2015, 33(2): 269—296.
- [11] Frye J. Depressing recoveries[J]. *Risk-London-Risk Magazine Limited*, 2000, 13(11): 108—111.
- [12] Pykhtin M. Recovery rates: Unexpected recovery risk [J]. *Risk-London-Risk Magazine Limited*, 2003, 16(8): 74—79.
- [13] Andersen L, Sidenius J. Extensions to the Gaussian copula; Random recovery and random factor loadings [J]. *Journal of Credit Risk Volume*, 2004, 1(1): 29—70.
- [14] 黄大海. 违约贷款回收率: 基于国外实证研究的分析 [J]. *上海金融*, 2006, (10): 55—58.
- [15] 王国栋, 詹原瑞. 信用风险中回收率分布的双 Beta 模型[J]. *中国管理科学*, 2011, 19(6): 10—14.
- [16] 汪飞星, 姚磊. 聚合信用风险模型的改进和研究[J]. *价值工程*, 2013, 32(5): 168—169.
- [17] 陈暮紫, 陈浩, 马宇超, 等. 基于广义 Beta 回归的不良贷款回收率模型[J]. *数理统计与管理*, 2011, 30(5): 810—823.
- [18] Carty L V, Lieberman D. Defaulted bank loan recoveries[J]. *Working Paper*, Moody's Investors Service, 1996.
- [19] Frye J. Collateral damage detected[J]. *Emerging Issues*, 2000 (Sep).
- [20] Bakshi G, Madan D B, Zhang F X. Understanding the role of recovery in default risk models; Empirical comparisons and implied recovery rates[R]. *Financial and Economics Board of Governors of the Federal Reserve System (US)*, 2001.
- [21] Hu Y T, Perraudin W. The dependence of recovery rates and defaults[R]. *Discussion Series, Birbeck College and Bank of Working Paper*, England, 2002.
- [22] Cantor R, Hamilton D T, Ou S. Default and recovery rates of corporate bond issuers [R]. *Working Paper*, Moodys Investors Services, 2002.
- [23] Carey M, Gordy M. Systematic risk in recoveries on defaulted debt [R]. *Working Paper Federal Reserve Board*, 2003.
- [24] Altman E I, Brady B, Restiand A, et al. The link between default and recovery rates: Theory, empirical evidence and implications [J]. *Journal of Business*, 2005, (78): 2203—2228.
- [25] Hamilton D T. Default and recovery rates of corporate bond issuers: 2000 [R]. *Working Paper*, Moody's Investors Service, 2001.
- [26] Hu Yen-Ting, Perraudin W. The dependence of recovery rate and defaults[R]. *Working Paper*, Birbeck College and Bank of England, 2002.
- [27] Hull J C, White A D. Valuation of a CDO and an nth to default CDS without monte carlo simulation[J]. *The Journal of Derivative*, 2004, 12(2): 8—23.
- [28] Das S R, Hanouna P. Implied recovery[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2009, 33(11): 1837—1857.
- [29] Guo Xin, Jarrow R A, Zeng Yan. Modeling the recovery rate in a reduced form model[J]. *Mathematical Finance*, 2009, 19(1): 73—97.
- [30] Chava S, Stefanescu C, Turnbull S. Modeling the loss distribution[J]. *Management Science*, 2011, 57(7): 1267—1287.
- [31] 陆懋祖. 高等时间序列经济计量学[M]. 上海: 上海人民出版社, 1999.
- [32] 孙立娟. 风险定量分析[M]. 北京: 北京大学出版社, 2011.
- [33] Acerbi C, Tasche D. On the coherence of expected shortfall[J]. *Journal of Banking & Finance*, 2002, 26(7): 1487—1503.

Endogenous Recovery Rate and Credit Risk Measurement

WU Jian-hua¹, WANG Xin-jun², ZHANG Ying¹

(1. School of Mathematical Sciences, University of Jinan, Jinan 250022, China;

2. School of Economics, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract: In credit risk models, exogenous recovery rate may neglect the impact on the tail of the loss distribution, and the exogenous specify of the recovery rate leads to the possible model risk. This paper incorporates the factor diffusion process into the structure model of default, derives the inherent relation between the recovery rate and the default probability and analyzes the dependence of expected recovery rate on the expected default probability by using the MC technology. The result shows there are strong negative correlation between expected recovery rates and default probability. Furthermore, the volatility of the asset value has positive compact on the correlation. In the framework of the endogenous recovery rate, the probability distribution of the credit loss is derived, and two index, Credit VaR and ETF, which is the measurement of the credit risk are computed. Finally, the performance of the endogenous recovery rate is tested-based on credit risk model using the market data, which shows that the model can well-character the evolution of the history default probability and recovery rates.

Key words: endogenous recovery rate; factor diffusion process; credit risk measurement; numerical simulation; empirical analysis