点击目录，进入相关章节

第六章　离散系统z域分析

在连续系统中，为了避开解微分方程的困难，可以通过拉氏变换把微分方程转换为代数方程。出于同样的动机，也可以通过一种称为z变换的数学工具，把差分方程转换为代数方程。

6.1　z变换

一、从拉普拉斯到z变换

对连续信号进行均匀冲激取样后，就得到离散信号。

取样信号 $$f_S(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

两边取双边拉普拉斯变换，得

$$F_{Sb}(s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\,\mathrm{e}^{-kTs}$$

令$z = e^{sT}$，上式将成为复变量z的函数，用F(z)表示；$f(kT) \to f(k)$ ，得

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

称为序列$f(k)$的双边z变换

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

称为序列$f(k)$的单边z变换

若$f(k)$为因果序列，则单边、双边z 变换相等，否则不等。今后在不致混淆的情况下，统称它们为z变换。

$F(z) = Z[f(k)]$, $f(k)= Z^{-1}[F(z)]$ ； $f(k)\longleftrightarrow F(z)$

二、收敛域

z变换定义为一无穷幂级数之和，显然只有当该幂级数收敛，即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|<\infty$$

时，其z变换才存在。上式称为绝对可和条件，它是序列$f(k)$的z变换存在的充分条件。

收敛域的定义：

对于序列$f(k)$，满足 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|<\infty$

所有z值组成的集合称为z变换F(z)的收敛域。

（1）整个z平面收敛；

例1 求以下有限序列的z变换 (1) $f_1(k)=\delta(k)$ $\downarrow k=0$

(2) $f_2(k)=\{1, 2, 3, 2, 1\}$

解

(1) $F_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=1$

可见，其单边、双边z变换相等。与z 无关，所以其收敛域为整个z 平面。

(2) $f(k)$的双边z 变换为

$F(z) = z^2 + 2z + 3 + 2z^{-1} + z^{-2}$ 收敛域为$0<|z|<\infty$

$f(k)$的单边z 变换为

$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}=3+2z^{-1}+z^{-2}$ 收敛域为 $|z|>0$

对有限序列的z变换的收敛域一般为$0<|z|<\infty$，有时它在0或/和∞也收敛。

（2）部分z平面收敛；

例2　求因果序列 $f_y(k) = a^k \varepsilon(k) = \begin{cases} 0, & k<0 \\ a^k, & k \ge 0 \end{cases}$ 的z变换（式中a为常数）。

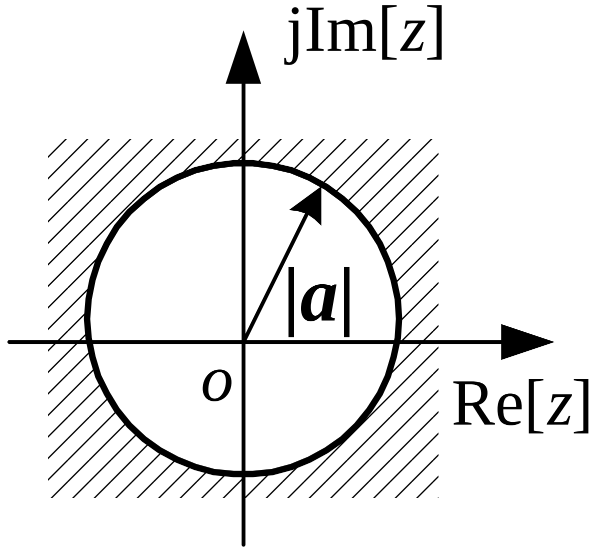
解：代入定义

$$F_y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} (az^{-1})^k = \lim_{N\to\infty} \frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-az^{-1}}$$

可见，仅当 $|az^{-1}|<1$，即 $|z|>|a|$ 时，其z变换存在。

$$F_y(z) = \frac{z}{z-a}$$

收敛域为 $|z|>|a|$



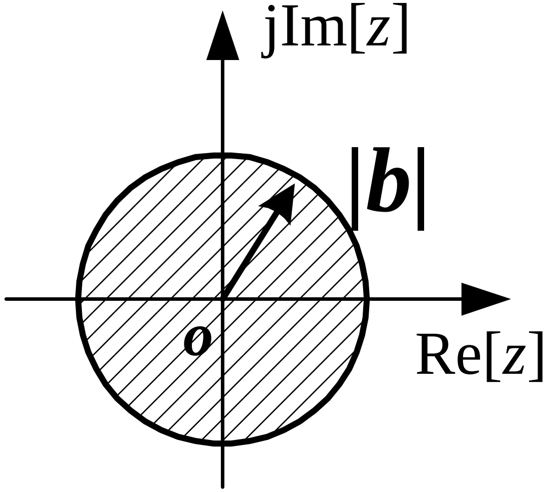
例3　求反因果序列 $f_f(k)=\begin{cases} b^k, & k<0 \\ 0, & k\ge 0 \end{cases} = b^k \varepsilon(-k-1)$ 的z变换。

解： $F_f(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}(bz^{-1})^k=\sum_{m=1}^{\infty}(b^{-1}z)^m=\lim_{N\to\infty}\dfrac{b^{-1}z-(b^{-1}z)^{N+1}}{1-b^{-1}z}$

可见，$|b^{-1}z|<1$，即 $|z|<|b|$ 时，其z变换存在，

$$F_f(z)=\frac{-z}{z-b}$$

收敛域为 $|z|<|b|$



例4 双边序列$f(k)=f_y(k)+f_f(k)=\begin{cases} b^k, & k<0 \\ a^k, & k\geq 0 \end{cases}$ $|a|<|b|$

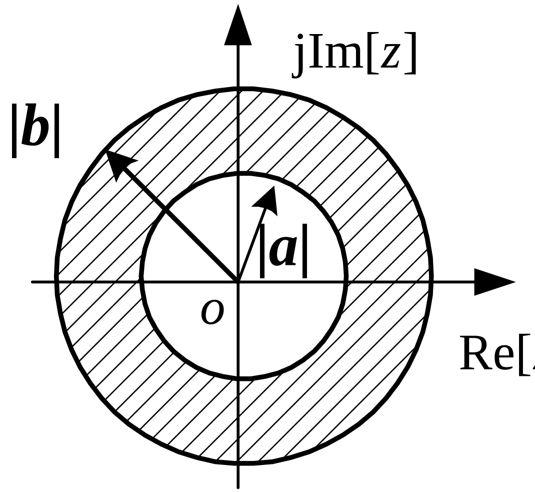
的z变换。

解：

$$F(z)=F_y(z)+F_f(z)$$

$$=\frac{-z}{z-b}+\frac{z}{z-a}$$

可见，其收敛域为 $|a|<|z|<|b|$



（3）整个z平面均不收敛；

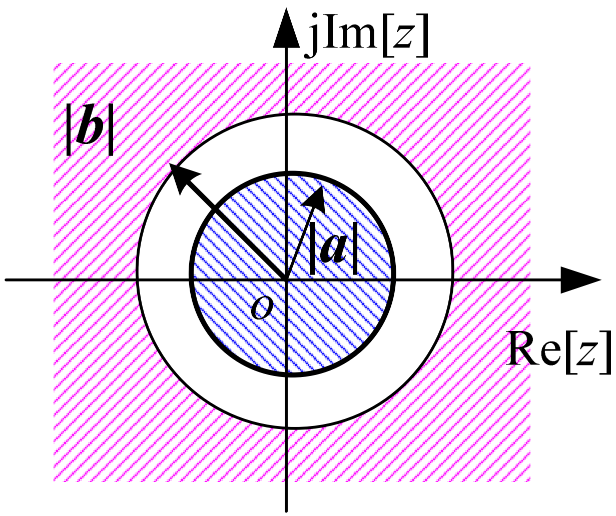
例5　双边序列$f(k)=f_y(k)+f_f(k)=\begin{cases} b^k, & k \geq 0 \\ a^k, & k < 0 \end{cases}$　$|a|<|b|$

的z变换。

解：

$$F_y(z)=\frac{z}{z-b} \qquad |z|>|b|$$

$$F_f(z)=\frac{-z}{z-a} \qquad |z|<|a|$$



序列的收敛域大致有以下几种情况：

（1）对于有限长的序列，其双边z变换在整个平面收敛；

（2）对因果序列，其z变换的收敛域为某个圆外区域；

（3）对反因果序列，其z变换的收敛域为某个圆内区域；

（4）对双边序列，其z变换(若存在) 收敛域为环状区域。

注意： 对双边z变换必须表明收敛域，否则其对应的原序列将不唯一。

例

$$f_1(k) = 2^k \varepsilon(k) \longleftrightarrow F_1(z) = \frac{z}{z-2} \quad , \quad |z| > 2$$

$$f_2(k) = -2^k \varepsilon(-k-1) \longleftrightarrow F_2(z) = \frac{z}{z-2} \quad , \quad |z| < 2$$

对单边z变换，其收敛域比较简单，一定是某个圆以外的区域。可以省略。

结论： 双边$F_b(z)$ + 收敛域 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ $f(k)$

单边$F(z)$ $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ $f(k)$

常用序列的z变换：

$$\delta(k) \longleftrightarrow 1 \text{，整个z平面}$$

$$f_1(k) = a^k \varepsilon(k) \longleftrightarrow F_1(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > a$$

$$f_2(k) = -a^k \varepsilon(-k-1) \longleftrightarrow F_2(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < a$$

其中：a>0

$$\delta(k-m) \longleftrightarrow z^{-m}, \quad |z| > 0$$

$$\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$-\varepsilon(-k-1) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}, \quad |z| < 1$$

6.2 z变换的性质

本节讨论z变换的性质，若无特殊说明，它既适用于单边也适用于双边z变换。

一、线性

设 $f_1(k) \leftrightarrow F_1(z), \quad \alpha_1 < |z| < \beta_1$

$f_2(k) \leftrightarrow F_2(z), \quad \alpha_2 < |z| < \beta_2$

则：$a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k) \leftrightarrow a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$ a_1, a_2为任意常数

$$\max(\alpha_1, \alpha_2) < |z| < \min(\beta_1, \beta_2)$$

注：其收敛域至少是$F_1(z)$ 与$F_2(z)$收敛域的相交部分。

例1：$2\delta(k) + 3\varepsilon(k) \longleftrightarrow 2 + \dfrac{3z}{z-1}, \quad |z| > 1$

例2：$f(k)=2^{-|k|}$，求 $f(k)$的双边z变换 $F(z)$。

解：$$f(k)=2^{k}\varepsilon(-k-1)+2^{-k}\varepsilon(k)$$

$$Z[2^{k}\varepsilon(-k-1)]=-\frac{z}{z-2},\quad |z|<2$$

$$Z[2^{-k}\varepsilon(k)]=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}=\frac{2z}{2z-1},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$\therefore F(z)=\frac{2z}{2z-1}-\frac{z}{z-2}=\frac{-3z}{(2z-1)(z-2)},\quad \frac{1}{2}<|z|<2$$

二、移位（移序）特性 单边、双边差别大！

双边z变换的移位：

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$，$\alpha<|z|<\beta$，且对整数m>0，则

$$f(k\pm m) \longleftrightarrow z^{\pm m}F(z),\quad \alpha<|z|<\beta$$

证明：$Z[f(k+m)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k+m)z^{-k} \overset{n=k+m}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n}z^{m} = z^{m}F(z)$

单边z变换的移位：

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$，$|z|>\alpha$，且有整数m>0, 则

$$f(k-1) \longleftrightarrow z^{-1}F(z)+f(-1)$$

$$f(k-2) \longleftrightarrow z^{-2}F(z)+f(-2)+f(-1)z^{-1}$$

$$f(k-m) \longleftrightarrow z^{-m}F(z)+\sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k}$$

$$f(k+1) \longleftrightarrow zF(z) - f(0)z$$

$$f(k+2) \longleftrightarrow z^2F(z) - f(0)z^2 - f(1)z$$

$$f(k+m) \longleftrightarrow z^mF(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{m-k}$$

证明（右移）：

$$Z[f(k-m)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-m)z^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k} + \sum_{k=m}^{\infty} f(k-m)z^{-(k-m)}z^{-m}$$

上式第二项令**$k-m=n$**，则：

$$= \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k} + \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}z^{-m} = \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k} + z^{-m}F(z)$$

特例：若$f(k)$为因果序列，则 $f(k-m) \longleftrightarrow z^{-m}F(z)$

即： $f(k-m)\varepsilon(k-m) \longleftrightarrow z^{-m}F(z)$

例1： 求周期为N的有始周期性单位序列

$$\sum_{m=0}^{\infty}\delta(k-mN)$$

的z变换。

解：

$$\sum_{m=0}^{\infty}\delta(k-mN)\longleftrightarrow\sum_{m=0}^{\infty}z^{-mN}=\frac{1}{1-z^{-N}}=\frac{z^{N}}{z^{N}-1}\qquad |z|>1$$

例2： 求 $f(k)=k\,\varepsilon(k)$ 的单边z变换F(z).

解：

$$f(k+1)=(k+1)\varepsilon(k+1)=(k+1)\varepsilon(k)=f(k)+\varepsilon(k)$$

$$zF(z)-zf(0)=F(z)+\frac{z}{z-1}$$

$$F(z)=\frac{z}{(z-1)^{2}}$$

三、序列乘 a^k （$a^k f(k)$）: $a\neq0$（a可为实数、虚数、复数）（z域尺度变换）

设 $f(k)\leftrightarrow F(z),\ \alpha<|z|<\beta$,且有常数a

则 $a^k f(k)\leftrightarrow F(\frac{z}{a}),\ |a|\alpha<|z|<|a|\beta$

证明： $Z[a^k f(k)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k f(k)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)(\frac{z}{a})^{-k}=F(\frac{z}{a})$

若a=-1，有

$$(-1)^k f(k)\leftrightarrow F(-z)\qquad \alpha<|z|<\beta$$

例1： $a^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow ?$

解： $$\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{z}{z-1}$$

$$a^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a}-1}=\frac{z}{z-a}$$

例2： $\cos(\beta k)\varepsilon(k)\longleftrightarrow ?\quad \sin(\beta k)\varepsilon(k)\longleftrightarrow ?$

解： $$\cos(\beta k)\varepsilon(k)=\frac{1}{2}(e^{j\beta k}+e^{-j\beta k})\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{0.5z}{z-\mathrm{e}^{j\beta}}+\frac{0.5z}{z-\mathrm{e}^{-j\beta}}$$

$$\cos(\beta k)\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{z^2-z\cos\beta}{z^2-2z\cos\beta+1},|z|>1$$

$$\sin(\beta k)\varepsilon(k)=\frac{1}{2j}(e^{j\beta k}-e^{-j\beta k})\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{1}{2j}[\frac{0.5z}{z-\mathrm{e}^{j\beta}}-\frac{0.5z}{z-\mathrm{e}^{-j\beta}}]$$

$$\sin(\beta k)\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1},|z|>1$$

四、卷积性质：

设 $f_1(k) \leftrightarrow F_1(z), \quad \alpha_1 < |z| < \beta_1$

$f_2(k) \leftrightarrow F_2(z), \quad \alpha_2 < |z| < \beta_2$

对单边z变换，要求$f_1(k)$、$f_2(k)$为因果序列

则 $f_1(k) * f_2(k) \leftrightarrow F_1(z) \cdot F_2(z). \quad \max(\alpha_1, \alpha_2) < |z| < \min(\beta_1, \beta_2)$

注：其收敛域一般为$F_1(z)$与$F_2(z)$收敛域的相交部分。

证明：$\sum_{k=-\infty}^{\infty}[f_1(k) * f_2(k)]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}[\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i)]z^{-k}$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_2(k-i) z^{-k}] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) z^{-i} F_2(z)$$

$$= [\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) z^{-i}] F_2(z) = F_1(z) F_2(z)$$

例： $f(k)=k\varepsilon(k)$，求 $f(k)$ 的双边 z 变换 $F(z)$。

解： $f(k)=k\varepsilon(k)=\varepsilon(k)*\varepsilon(k-1)$

$$\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-1},\qquad |z|>1$$

$$\varepsilon(k-1)\leftrightarrow\frac{z^{-1}z}{z-1},\qquad |z|>1$$

$$\therefore F(z)=\frac{z}{(z-1)^2},\qquad |z|>1$$

五、序列乘k（z域微分）

设 $f(k) \leftrightarrow F(z), \quad \alpha < |z| < \beta$

则 $kf(k) \leftrightarrow (-z)\dfrac{d}{dz}F(z)$

$$k^2 f(k) \leftrightarrow (-z)\frac{d}{dz}[(-z)\frac{d}{dz}F(z)]$$

$$k^m f(k) \leftrightarrow \underbrace{(-z)\frac{d}{dz}(\cdots(-z)\frac{d}{dz}((-z)\frac{d}{dz}F(z))\cdots)}_{m次}, \quad \alpha < |z| < \beta$$

证明：$\because F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k}$

$$\therefore \frac{d}{dz}F(z) = \frac{d}{dz}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)(\frac{d}{dz}z^{-k})$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)(-kz^{-k-1})$$

$$(-z)\frac{d}{dz}F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}kf(k)z^{-k}$$

令 $F_1(z)=(-z)\frac{d}{dz}F(z)$，　　$f_1(k)=kf(k)$

则 $F_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_1(k)z^{-k}$

即：$F_1(z)=Z[f_1(k)]$

$$\boxed{kf(k)\leftrightarrow(-z)\frac{d}{dz}F(z)}$$

例： 求 $f(k)=k\varepsilon(k)$ 的双边 z 变换 $F(z)$。

解： $\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{z}{z-1}$

$$k\varepsilon(k)\longleftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right)=-z\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2}=\frac{z}{(z-1)^2},\qquad |z|>1$$

六、序列除(k+m)(z域积分)

若 $f(k) \leftrightarrow F(z),\quad \alpha < |z| < \beta$ ，设有整数m，且k+m>0

则 $\dfrac{f(k)}{k+m} \longleftrightarrow z^m \displaystyle\int_z^\infty \frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta,\quad \alpha < |z| < \beta$

证明： $F(z) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k}$

$$\int_z^\infty \frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta = \int_z^\infty \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\eta^{-k}}{\eta^{m+1}} d\eta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \int_z^\infty \eta^{-(k+m+1)} d\eta$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \frac{\eta^{-(k+m)}}{-(k+m)}\Bigg|_z^\infty = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(k)}{k+m} z^{-(k+m)} = z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(k)}{k+m} z^{-k}$$

$$= z^{-m} \mathscr{Z}\left[\frac{f(k)}{k+m}\right]$$

即 $$\frac{f(k)}{k+m} \longleftrightarrow z^m \int_z^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta, \quad \alpha < |z| < \beta$$

若m=0 ,且k>0，则

$$\frac{f(k)}{k} \longleftrightarrow \int_z^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} d\eta, \quad \alpha < |z| < \beta$$

例： 求序列 $\frac{1}{k+1}\varepsilon(k)$ 的z变换。

解： $\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}$

$$\frac{1}{k+1}\varepsilon(k) \longleftrightarrow z\int_z^{\infty} \frac{\eta}{(\eta-1)\eta^2} d\eta = z\int_z^{\infty} \left(\frac{1}{\eta-1} - \frac{1}{\eta}\right) d\eta = z\ln\left(\frac{\eta-1}{\eta}\right)\Big|_z^{\infty} = z\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

七、k域反转（仅适用双边z变换）

设 $f(k) \leftrightarrow F(z), \qquad \alpha < |z| < \beta$

则 $f(-k) \leftrightarrow F(z^{-1}), \qquad \dfrac{1}{\beta} < |z| < \dfrac{1}{\alpha}$

证明：
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(-k) z^{-k} \overset{-k=m}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) z^{m}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{k}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) (z^{-1})^{-k}$$
$$= F(z^{-1})$$

例1： $f(k)=\varepsilon(-k),\quad f(k)\leftrightarrow F(z)$，求 $F(z)$

解： $\varepsilon(k)\leftrightarrow \dfrac{z}{z-1},\quad |z|>1$

$$F(z)=\frac{z^{-1}}{z^{-1}-1}=\frac{1}{1-z},\quad |z|<1$$

例2： 已知 $a^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow \dfrac{z}{z-a},\ |z|>a$，求 $a^{-k}\varepsilon(-k-1)$ 的z变换。

解： $a^{k-1}\varepsilon(k-1)\longleftrightarrow \dfrac{z^{-1}z}{z-a}=\dfrac{1}{z-1},\quad |z|>a$

$$a^{-k-1}\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow \frac{1}{z^{-1}-a},\quad |z|<\frac{1}{a}$$

利用齐次性，k域和z域同时乘以a得

$$a^{-k}\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow \frac{a}{z^{-1}-a},\quad |z|<\frac{1}{a}$$

八、部分和

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$ ，$\alpha<|z|<\beta$，则

$$\sum_{i=-\infty}^{k} f(i) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}F(z)$$ ，$\max(\alpha,1)<|z|<\beta$

证明： $$f(k)*\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\varepsilon(k-i)=\sum_{i=-\infty}^{k} f(i) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}F(z)$$

例： 求序列(a为实数) $\sum_{i=0}^{k} a^{i}$ ($k\geq 0$)的z变换。

解： $$\sum_{i=0}^{k} a^{i}=\sum_{i=-\infty}^{k} a^{i}\varepsilon(i) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\frac{z}{z-a}$$ ，$|z|>\max(|a|,1)$

九、初值定理和终值定理

初值定理适用于右边序列，即适用于k<M(M为整数)时*f*(k)=0的序列。它用于由象函数直接求得序列的初值*f*(M), *f*(M+1), … 而不必求得原序列。

初值定理：

如果序列在k<M时，*f*(k)=0，它与象函数的关系为

$$f(k) \longleftrightarrow F(z)\,,\quad \alpha < |z| < \infty$$

则序列的初值

$$f(M) = \lim_{z\to\infty} z^m F(z)$$

对因果序列*f*(k)，

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

证明：

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}=\sum_{k=M}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

$$=f(M)z^{-M}+f(M+1)z^{-(M+1)}+f(M+2)z^{-(M+2)}+\ldots$$

两边乘z^M，得

$$z^M F(z)=f(M)+f(M+1)z^{-1}+f(M+2)z^{-2}+\ldots$$

上式取$z\to\infty$，得

$$f(M)=\lim_{z\to\infty} z^M F(z)$$

终值定理：

终值定理适用于右边序列，用于由象函数直接求得序列的终值，而不必求得原序列。

如果序列在k<M时，$f(k)=0$，它与象函数的关系为

$$f(k) \longleftrightarrow F(z)\,,\quad \alpha<|z|<\infty \text{且} 0\le\alpha<1$$

含单位圆

则序列的终值

$$f(\infty)=\lim_{k\to\infty} f(k)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z)$$

或

$$f(\infty)=\lim_{k\to\infty} f(k)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

证明： $\mathscr{Z}\left[f(k)-f(k-1)\right]=F(z)-z^{-1}F(z)=\sum_{k=M}^{\infty}\left[f(k)-f(k-1)\right]z^{-k}$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=M}^{N}\left[f(k)-f(k-1)\right]z^{-k}$$

$$\lim_{z\to1}(1-z^{-1})F(z)=\lim_{z\to1}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=M}^{N}\left[f(k)-f(k-1)\right]z^{-k}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\lim_{z\to1}\sum_{k=M}^{N}\left[f(k)-f(k-1)\right]z^{-k}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=M}^{N}\left[f(k)-f(k-1)\right]$$

$$=\lim_{N\to\infty}f(N)$$

$$=f(\infty)$$

6.3 逆z变换

一、逆z变换

设 $f(k) \leftrightarrow F(z)$

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k}, \quad \alpha<|z|<\beta$$

上式两边乘以 z^{n-1}，n为整数，在 $F(z)z^{n-1}$ 的收敛域内作围线积分：

$$\oint_c F(z) z^{n-1} dz=\oint_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k+n-1} dz=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \oint_c z^{-k+n-1} dz$$

柯西公式：$\oint_c z^m dz=\begin{cases}2\pi j, & m=-1 \\ 0, & m \neq -1\end{cases}$

$$\therefore \oint_c z^{-k+n-1} dz=\begin{cases}2\pi j, & -k+n-1=-1, \text{即} n=k \\ 0, & n \neq k\end{cases}$$

令 $n=k$，得：

$$2\pi j f(k) = \oint_c F(z) z^{k-1} dz,$$

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c F(z) z^{k-1} dz, \quad -\infty < k < \infty$$

上式称为 **F(z)** 的逆z变换.

Z逆变换的计算方法：

（1）反演积分法（留数法）；

（2）幂级数展开法；

（3）部分分式展开法；

（4）用 z 变换性质求逆 z 变换。

双边$F_b(z)$ + 收敛域 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ $f(k)$

单边$F(z)$ $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ $f(k)$

一般而言，双边序列$f(k)$可分解为因果序列$f_1(k)$和反因果序列$f_2(k)$两部分，即

$$f(k) = f_2(k) + f_1(k) = f(k)\varepsilon(-k-1) + f(k)\varepsilon(k)$$

相应地，其z变换也分为两部分

$$F(z) = F_2(z) + F_1(z),\quad \alpha < |z| < \beta$$

其中 $$F_1(z) = Z[f(k)\varepsilon(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k},\quad |z| > \alpha$$

$$F_2(z) = Z[f(k)\varepsilon(-k-1)] = \sum_{k=-\infty}^{-1} f(k)z^{-k},\quad |z| < \beta$$

已知象函数F(z)时，根据给定的收敛域不难由F(z)求得$F_1(z)$和$F_2(z)$，并分别求得它们所对应的原序列$f_1(k)$和$f_2(k)$，根据线性性质，将两者相加得到F(z) 所对应的原序列$f(k)$。

二、幂级数展开法

根据z变换的定义，因果序列和反因果序列的象函数分别是z^{-1}和z的幂级数。其系数就是相应的序列值。

例：已知象函数 $F(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}=\dfrac{z^2}{z^2-z-2}$

其收敛域如下，分别求其相对应的原序列$f(k)$。

$(1)\ \ |z|>2$；$(2)\ \ |z|<1$；$(3)\ 1<|z|<2$。

解：（1）由于F(z)的收敛域在半径为2的圆外，故$f(k)$为因果序列。用长除法将F(z)展开为z^{-1}的幂级数：

$$F(z)=\frac{z^2}{z^2-z-2}$$

$$\begin{array}{r|l} & 1+z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+\cdots \\ \hline z^2-z-2 & z^2 \\ & z^2-z-2 \\ \hline & z+2 \\ & z-1-2z^{-1} \\ \hline & 3+2z^{-1} \\ & \cdots \end{array}$$

$$=1+z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+\cdots$$

于是，得原序列：

$$f(k)=\{\ \underset{\uparrow k=0}{1},\ 1,\ 3,\ 5,\ \cdots\ \}$$

（2）由于F(z)的收敛域在半径为1的圆内，故*f*(k)为反因果序列。用长除法将F(z)（其分子、分母按z 的升幂排列）展开为z 的幂级数如下：

$$F(z)=\frac{z^2}{z^2-z-2}$$

$$=-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3-\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^5+\cdots$$

$$\begin{array}{r|l} & -\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3-\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^5+\cdots \\ \hline -2-z+z^2 & z^2 \\ & z^2+\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{2}z^4 \\ \hline & -\frac{1}{2}z^3+\frac{1}{2}z^4 \\ & -\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{4}z^5 \\ \hline & \frac{3}{4}z^4-\frac{1}{4}z^5 \\ & \cdots \end{array}$$

于是，得原序列：

$$f(k)=\left\{\cdots,\ \frac{5}{16},\ -\frac{3}{8},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{2},\ \underset{\uparrow k=-1}{0}\right\}$$

(3) F(z)的收敛域为1< |z| <2的环形区域，其原序列*f*(k)为双边序列。将F(z)展开为部分分式，有

$$F(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}z}{z-2},\qquad 1<|z|<2$$

根据给定的收敛域不难看出，上式第一项属于因果序列的象函数$F_1(z)$，第二项属于反因果序列的象函数$F_2(z)$，即

$$F_1(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1},\qquad |z|>1$$

$$F_2(z)=\frac{\frac{2}{3}z}{z-2},\qquad |z|<2$$

将它们分别展开为z -1及z的幂级数，有

$$F_1(z)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}-\frac{1}{3}z^{-3}+\cdots$$

$$F_2(z)=\cdots+\frac{1}{12}z^{3}-\frac{1}{6}z^{2}-\frac{1}{3}z$$

于是，得原序列：

$$f(k)=\left\{\cdots,\ -\frac{1}{12},\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{3},\ \underset{\uparrow k=0}{\frac{1}{3}},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \cdots\right\}$$

用上述方法求逆z变换，原序列通常难以写成闭合形式。

三、部分分式展开法

$$F(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\dots\dots+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots\dots+a_1 z+a_0}$$ 式中m≤n

（1）F(z)均为单极点，且不为0

$\frac{F(z)}{z}$ 可展开为：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_0}{z}+\frac{K_1}{z-z_1}+\dots\dots+\frac{K_n}{z-z_n}$$

式中各系数 $K_i=(z-z_i)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=z_i}$

所以： $F(z)=K_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i z}{z-z_i}$

根据给定的收敛域，将上式划分为$F_1(z)(|z|>\alpha)$和$F_2(z)(|z|<\beta)$两部分，根据已知的变换对，如

$$\delta(k) \leftrightarrow 1$$

$$a^k \varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-a}, \quad |z|>|a|$$

$$-a^k \varepsilon(-k-1) \longleftrightarrow \frac{z}{z-a}, \quad |z|<|a|$$

等，就可求得原函数。

例1： 已知象函数 $F(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$

其收敛域分别为：（1） $|z|>2$ (2) $|z|<1$ (3) $1<|z|<2$

解: 部分分式展开为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{(z+1)(z-2)}=\frac{\frac{1}{3}}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}}{z-2} \Rightarrow F(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{z+1}+\frac{2}{3}\frac{z}{z-2}$$

(1)当 $|z|>2$，$f(k)$为因果序列

$$f(k)=[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$$

(2) 当 $|z|<1$，$f(k)$为反因果序列

$$f(k)=[-\frac{1}{3}(-1)^k-\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(-k-1)$$

(3)当 $1<|z|<2$， $f(k)$为双边序列

$$f(k)=\frac{1}{3}(-1)^k\varepsilon(k)-\frac{2}{3}(2)^k\varepsilon(-k-1)$$

例2：已知象函数 $F(z)=\dfrac{z(z^3-4z^2+\frac{9}{2}z+\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z-1)(z-2)(z-3)}$ **,1< |z |<2**

的逆z变换。

解：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{K_2}{z-1}+\frac{K_3}{z-2}+\frac{K_4}{z-3}$$

$$F(z)=\frac{-z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{2z}{z-1}+\frac{-z}{z-2}+\frac{z}{z-3}$$

由收敛域可知，上式前两项的收敛域满足 |z |>1，后两项满足 |z |<2。

$$f(k)=-(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)+2\varepsilon(k)+(2)^k\varepsilon(-k-1)-(3)^k\varepsilon(-k-1)$$

(2) F(z)有共轭单极点

如 $z_{1,2}=c+jd=\alpha e^{\pm j\beta}$，则

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_1}{z-c-jd}+\frac{K_1^*}{z-c+jd}$$

令 $K_1=|K_1|e^{j\theta}$，得

$$F(z)=\frac{|K_1|e^{j\theta}z}{z-\alpha e^{j\beta}}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}z}{z-\alpha e^{-j\beta}}$$

若 $|z|>\alpha$，则 $f(k)=2|k_1|\alpha^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(k)$

若 $|z|<\alpha$，则 $f(k)=-2|k_1|\alpha^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(-k-1)$

例： $F(z)=\dfrac{z}{z^2-4z+8}$， $f(k)\leftrightarrow F(z)$

（1） $|z|>2\sqrt{2}$ **，求** $f(k)$

（2） $|z|<2\sqrt{2}$ **，求** $f(k)$

解： $$F(z)=\frac{z}{[z-(2+j2)][z-(2-j2)]}$$

$$=-j\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z-(2+j2)}+j\frac{1}{4}\frac{z}{z-(2-j2)}$$

$$=\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{z}{(z-2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}})}+\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}\frac{z}{(z-2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})}$$

（1）$|z|>2\sqrt{2}$,　$f(k)$为因果序列

$$f(k)=[\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}(2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{2}})^k+\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}(2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{2}})^k]\varepsilon(k)$$

$$=\frac{1}{4}(2\sqrt{2})^k[e^{j(\frac{\pi}{4}k-\frac{\pi}{2})}+e^{-j(\frac{\pi}{4}k-\frac{\pi}{2})}]\varepsilon(k)$$

$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^k\cos(\frac{\pi}{4}k-\frac{\pi}{2})\varepsilon(k)$$

（2）$|z|<2\sqrt{2}$,　$f(k)$为反因果序列

$$f(k)=-\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^k\cos(\frac{\pi}{4}k-\frac{\pi}{2})\varepsilon(-k-1)$$

(3) F(z)有重极点

$$F(z)=F_a(z)+F_b(z)=\frac{K_{11}z}{(z-a)^r}+\frac{K_{12}z}{(z-a)^{r-1}}+....+\frac{K_{1r}z}{(z-a)}+F_b(z)$$

$$K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}[(z-a)^r\frac{F(z)}{z}]\Big|_{z=a}$$

F(z)展开式中含$\frac{z}{(z-a)^r}$项(r>1)，则逆变换为：

若|z|>a ,对应原序列为因果序列：

$$\frac{k(k-1).....(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}\varepsilon(k)$$

以|z|>a为例：

当r=2时，为 $ka^{k-1}\varepsilon(k)$

当r=3时，为 $\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)$

可这样推导记忆：

$$Z[a^k\varepsilon(k)]=\frac{z}{z-a}$$

两边对a求导得：$Z[ka^{k-1}\varepsilon(k)]=\frac{z}{(z-a)^2}$

再对a求导得：$Z[k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)]=\frac{2z}{(z-a)^3}$

故：$Z[\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)]=\frac{z}{(z-a)^3}$

例： 已知象函数 $F(z)=\dfrac{z^3+z^2}{(z-1)^3}$ ，|z|>1。求原函数。

解：

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^2+z}{(z-1)^3}=\frac{K_{11}}{(z-1)^3}+\frac{K_{12}}{(z-1)^2}+\frac{K_{13}}{z-1}$$

$$K_{11}=(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=1}=2;\qquad K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\right]\bigg|_{z=1}=3;$$

$$K_{13}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\right]\bigg|_{z=1}=1.$$

$$F(z)=\frac{2z}{(z-1)^3}+\frac{3z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}$$

$$f(k)=\left[\frac{2}{2!}k(k-1)+3k+1\right]\varepsilon(k)=(k+1)^2\varepsilon(k)$$

四、用性质求逆z变换

例1：$F(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$，$|z|>3$ 求逆变换 $f(k)$ 。

解：

方法1：
$$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{z(z-2)(z-3)}=\frac{\frac{1}{6}}{z}+\frac{-\frac{1}{2}}{z-2}+\frac{\frac{1}{3}}{z-3}$$

$$F(z)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\frac{z}{z-2}+\frac{1}{3}\frac{z}{z-3}$$

$$f(k)=\frac{1}{6}\delta(k)-(\frac{1}{2}\times 2^{k}-\frac{1}{3}\times 3^{k})\varepsilon(k)$$

$$=\frac{1}{6}\delta(k)-(2^{k-1}-3^{k+1})\varepsilon(k)$$

方法2：

$$F(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{-1}{z-2}+\frac{1}{z-3}$$

$$=z^{-1}\left(\frac{-z}{z-2}+\frac{z}{z-3}\right)$$

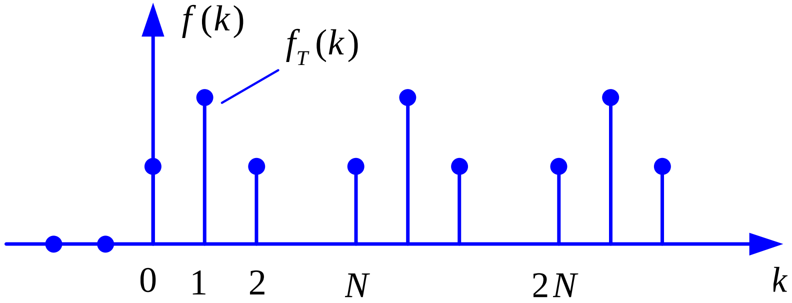
$$f(k)=-2^{k-1}\varepsilon(k-1)+3^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$=(3^{k-1}-2^{k-1})\varepsilon(k-1)$$

$$=(3^{k-1}-2^{k-1})[\varepsilon(k)-\delta(k)]$$

$$=\frac{1}{6}\delta(k)-(2^{k-1}-3^{k+1})\varepsilon(k)$$

例2、因果周期信号 $f(k)$ 如图，求 $f(k)$ 的单边 z 变换 $F(z)$。



解： 设第一周期内信号为 $f_T(k)$，则 $f(k)$ 可表示为

$$f(k)=f_T(k)+f_T(k-N)+f_T(k-2N)+\cdots=\sum_{m=0}^{\infty} f_T(k-mN)$$

设 $f_T(k)\leftrightarrow F_T(z)$, $\quad f(k)\leftrightarrow F(z)$

$$F(z)=F_T(z)+z^{-N}F_T(z)+z^{-2N}F_T(z)+\cdots$$

$$=F_T(z)(1+z^{-N}+z^{-2N}+\cdots)$$

$$=\frac{F_T(z)}{1-z^{-N}} \qquad |z|>1$$

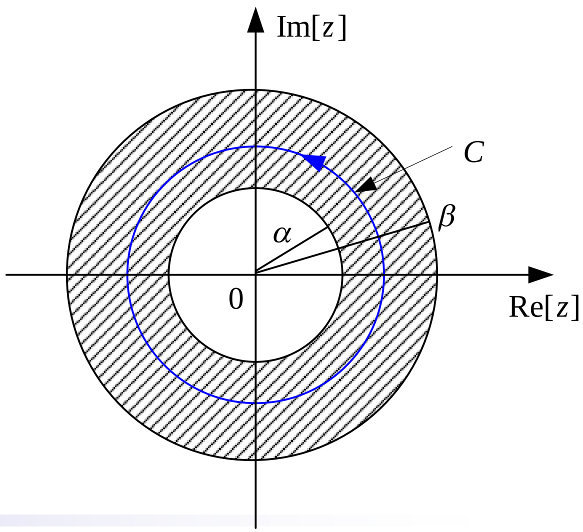
五、反演积分法（留数法）*

$$f(k) \leftrightarrow F(z) \qquad \alpha < |z| < \beta$$

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z) z^{k-1} dz \qquad -\infty < k < \infty$$

根据复变函数理论中的留数定理，因果序列$f_1(k)$等于积分路径C内$F(z)z^{k-1}$的极点留数之和，即：

$$f_1(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \sum\limits_{C\text{内极点}} \underset{z_i}{\mathrm{Res}}\left[F(z) z^{k-1}\right] & k \ge 0 \end{cases}$$



根据复变函数理论中的留数定理，反因果序列$f_2(k)$等于积分路径C外部区域内$F(z)z^{k-1}$的极点留数之和并取负号，即：

$$f_2(k)=\begin{cases}0 & k\geq 0\\ -\sum\limits_{C\text{外极点}} \underset{z_i}{\mathrm{Res}}\left[F(z)z^{k-1}\right] & \mathrm{k}<0\end{cases}$$

$f(k)$等于$f_1(k)$与$f_2(k)$之和，即：

$$f(k)=f_1(k)+f_2(k)=\begin{cases}\sum\limits_{C\text{内极点}} \underset{z_i}{\mathrm{Res}}\left[F(z)z^{k-1}\right] & k\geq 0\\ -\sum\limits_{C\text{外极点}} \underset{z_i}{\mathrm{Res}}\left[F(z)z^{k-1}\right] & \mathrm{k}<0\end{cases}$$

$F(z)$为有理分式时，$F(z)z^{k-1}$的极点留数为：

若$F(z)z^{k-1}$在$z=z_i$有一阶极点，则

$$\operatorname*{Res}_{z_i}[F(z)z^{k-1}]=(z-z_i)F(z)z^{k-1}\Big|_{z=z_i}$$

若$F(z)z^{k-1}$在$z=z_i$有r重极点，则

$$\operatorname*{Res}_{z_i}[F(z)z^{k-1}]=\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}[(z-z_i)^r F(z)z^{k-1}]\Big|_{z=z_i}$$

例： 已知$F(z)=\dfrac{4z}{(z-1)^2(z-3)}, 1<|z|<3$,求原函数$f(k)$。

解：

$$F(z)z^{k-1}=\frac{4z^k}{(z-1)^2(z-3)}$$

$$z_1=1, \qquad z_2=3$$

$$\underset{z_1}{\mathrm{Res}}[F(z)z^{k-1}]=\frac{d}{dz}[(z-1)^2F(z)z^{k-1}]\Big|_{z=1}=\frac{d}{dz}[\frac{4z^k}{z-3}]\Big|_{z=1}$$

$$=-(2k+1)$$

$$\underset{z_2}{\mathrm{Res}}[F(z)z^{k-1}]=(z-3)F(z)z^{k-1}\Big|_{z=3}$$

$$=3^k$$

$$f(k)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{C\text{内极点}}\underset{z_i}{\mathrm{Res}}\left[F(z)z^{k-1}\right] & k\ge 0\\ \displaystyle-\sum_{C\text{外极点}}\underset{z_i}{\mathrm{Res}}\left[F(z)z^{k-1}\right] & \mathrm{k}<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-(2k+1) & k\ge 0\\ -3^k & k<0\end{cases}$$

$$=-(2k+1)\varepsilon(k)-3^k\varepsilon(-k-1)$$

6.4　离散系统的z域分析

单边z变换将系统的初始条件自然地包含于其代数方程中，可求得零输入、零状态响应和全响应。

一、差分方程的z域解

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} f(k-j)$$

设$f(k)$在k=0时接入，系统初始状态为y(-1),y(-2),…y(-n)。

取单边z变换得：

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}[z^{-i}Y(z)+\sum_{k=0}^{i-1} y(k-i)z^{-k}] = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j}[z^{-j}F(z)]$$

$$[\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}z^{-i}]Y(z)+\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}[\sum_{k=0}^{i-1} y(k-i)z^{-k}] = (\sum_{j=0}^{m} b_{m-j}z^{-j})F(z)$$

$$Y(z)=\frac{M(z)}{A(z)}+\frac{B(z)}{A(z)}F(z)=Y_x(z)+Y_f(z)$$

令 $$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{B(z)}{A(z)}$$ 称为系统函数。

h(k)←→H(z)

例1： 若某系统的差分方程为

$$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)+2f(k-2)$$

已知y(–1)=2，y(–2)= –1/2，$f(k)=\varepsilon(k)$。求系统的$y_x(k)$、$y_f(k)$、y(k)。

解： 方程取z变换，得：

$$Y(z)-[z^{-1}Y(z)+y(-1)]-2[z^{-2}Y(z)+y(-2)+y(-1)z^{-1}]=F(z)+2z^{-2}F(z)$$

整理得：

$$Y(z)=\frac{(1+2z^{-1})y(-1)+2y(-2)}{1-z^{-1}-2z^{-2}}+\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}F(z)$$

$$=\frac{z^2+4z}{z^2-z-2}+\frac{z^2+2}{z^2-z-2}\frac{z}{z-1}$$

$$Y_x(z)=\frac{z^2+4z}{(z-2)(z+1)}=\frac{2z}{z-2}+\frac{-z}{z+1}\rightarrow y_x(k)=[2(2)^k-(-1)^k]\varepsilon(k)$$

$$Y_f(z)=\frac{2z}{z-2}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}-\frac{3}{2}\frac{z}{z-1}\rightarrow y_f(k)=[2^{k+1}+\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{3}{2}]\varepsilon(k)$$

例2： 某系统，已知当输入$f(k)=(-\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)$时，其零状态响应

$$y_f(k)=[\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^k+4(-\frac{1}{3})^k-\frac{9}{2}(-\frac{1}{2})^k]\varepsilon(k)$$

求系统的单位序列响应$h(k)$和描述系统的差分方程。

解： $$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{z^2+2z}{z^2-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}}=\frac{3z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{-2z}{z+\frac{1}{3}}$$

$$h(k)=\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^k-2\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right]\varepsilon(k)$$

系统的差分方程为：

$$y(k)-\frac{1}{6}y(k-1)-\frac{1}{6}y(k-2)=f(k)+2f(k-1)$$

例3： (求LTI系统差分方程的3种响应)

已知离散系统的方程为：

$$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k-2)$$

$$y(-1)=1,\quad y(-2)=0,\quad f(k)=\varepsilon(k)$$

求：$y(k),\quad y_x(k),\quad y_f(k).$

解： 1、求完全响应 $y(k)$：

由单边z变换的右移性质：

$$f(k-m)\leftrightarrow z^{-m}F(z)+\sum_{k=0}^{m-1}f(k-m)z^{-k},$$

根据右移性质，对系统差分方程取单边z变换，得

$$Y(z)+3[z^{-1}Y(z)+\sum_{k=0}^{0}y(k-1)z^{-k}]+2[z^{-2}Y(z)+\sum_{k=0}^{1}y(k-2)z^{-k}]=z^{-2}F(z)$$

由上式得：

$$Y(z)(1+3z^{-1}+2z^{-2})=(-3-2z^{-1})y(-1)-2y(-2)+z^{-2}F(z)$$

$$Y(z)=\frac{(-3-2z^{-1})y(-1)-2y(-2)}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}+\frac{z^{-2}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}F(z)$$

$$=\frac{-3z^{3}+z^{2}+3z}{(z+1)(z-1)(z+2)},\quad F(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{1}{6}\frac{z}{(z-1)}+\frac{1}{2}\frac{z}{(z+1)}-\frac{11}{3}\frac{z}{(z+2)},\quad |z|>2$$

$$y(k)=\frac{1}{6}\times1^{k}+\frac{1}{2}\times(-1)^{k}-\frac{11}{3}(-2)^{k},\quad k\geq0$$

2、求零输入响应 $y_x(k)$： $y_x(-1)=y(-1)=1,\quad y_x(-2)=y(-2)=0$

$y_x(k)$的方程：$y_x(k)+3y_x(k-1)+2y_x(k-2)=0$

根据右移性质，对 $y_x(k)$ 的方程取单边 z 变换，得：

$$Y_x(z)+3[z^{-1}Y_x(z)+\sum_{k=0}^{0}y_x(k-1)z^{-k}]+2[z^{-2}Y_x(z)+\sum_{k=0}^{1}y_x(k-2)z^{-k}]=0$$

由上式得：

$$Y_x(z)=\frac{(-3-2z^{-1})y_x(-1)-2y_x(-2)}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{-3z^2-2z}{(z+1)(z+2)},\quad |z|>2$$

$$=\frac{z}{z+1}-\frac{4z}{z+2}$$

$$y_x(k)=(-1)^k-(-2)^{k+2},\quad k\geq 0$$

3、求零状态响应 $y_f(k)$: $f(k)=\varepsilon(k)$, $y_f(-1)=y_f(-2)=0$

$y_f(k)$的方程：$y_f(k)+3y_f(k-1)+2y_f(k-2)=f(k-2)$

由右移性质，对 $y_f(k)$ 的方程取单边 z 变换，得

$$Y_f(z)+3z^{-1}y_f(z)+2z^{-2}Y_f(z)=z^{-2}F(z)$$

$$Y_f(z)=\frac{z^{-2}}{(1+3z^{-1}+2z^{-2})}F(z),\quad F(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{z}{(z+1)(z-1)(z+2)},\quad |z|>2$$

$$=\frac{1}{6}\frac{z}{(z-1)}-\frac{1}{2}\frac{z}{(z+1)}+\frac{1}{3}\frac{z}{(z+2)},$$

$$y_f(k)=[\frac{1}{6}\times 1^k-\frac{1}{2}(-1)^k+\frac{1}{3}(-2)^k]\varepsilon(k)$$

说明：前向差分方程的解法：

（1）用左移性质：$f(k+m) \leftrightarrow z^m F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{m-k}$，

初始条件：对 $y(k)$： $y(0)$、$y(1)$、 $\cdots$

对 $y_x(k)$： $y_x(0)$、$y_x(1)$、 $\cdots$

（2）转变为由后向差分方程，用右移性质求解，

初始条件：对 $y(k)$： $y(-1)$、$y(-2)$、 $\cdots$

对 $y_x(k)$： $y_x(-1)$、$y_x(-2)$、 $\cdots$

若初始条件不适用，则用递推法由相应的差分方程递推得到需要的初始条件。

二、系统函数H(z):

1、定义：$H(z)=\dfrac{Y_f(z)}{F(z)}$

$$Y_f(z)=Z[y_f(k)],\quad F(z)=Z[f(k)]$$

2、物理意义：

$$H(z)=Z[h(k)]$$

3、计算：

（1）$H(z)=\dfrac{Y_f(z)}{F(z)}$

（2）$H(z)=Z[h(k)]$

（3）由系统差分方程求 $H(z)$

例: 已知：$y_f(k)+a_1 y_f(k-1)+a_0 y_f(k-2)=b_1 f(k-1)+b_0 f(k-2)$;

求：$H(z)$。

解: 由于是零状态响应，对方程取z变换，得:

$$Y_f(z)+a_1 z^{-1}Y_f(z)+a_0 z^{-2}Y_f(z)=b_1 z^{-1}F(z)+b_0 z^{-2}F(z)$$

$$(1+a_1 z^{-1}+a_0 z^{-2})Y_f(z)=(b_1 z^{-1}+b_0 z^{-2})F(z)$$

$$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{b_1 z^{-1}+b_0 z^{-2}}{1+a_1 z^{-1}+a_0 z^{-2}}$$

$$=\frac{b_1 z+b_0}{z^2+a_1 z+a_0}$$

4、应用：

（1）求 $y_f(k)=Z^{-1}[Y_f(z)],\ Y_f(z)=H(z)F(z);$

（2）求 $h(k)=Z^{-1}[H(z)];$

（3）求 $f(k)=Z^{-1}[F(z)],\ F(z)=\dfrac{Y_f(z)}{H(z)};$

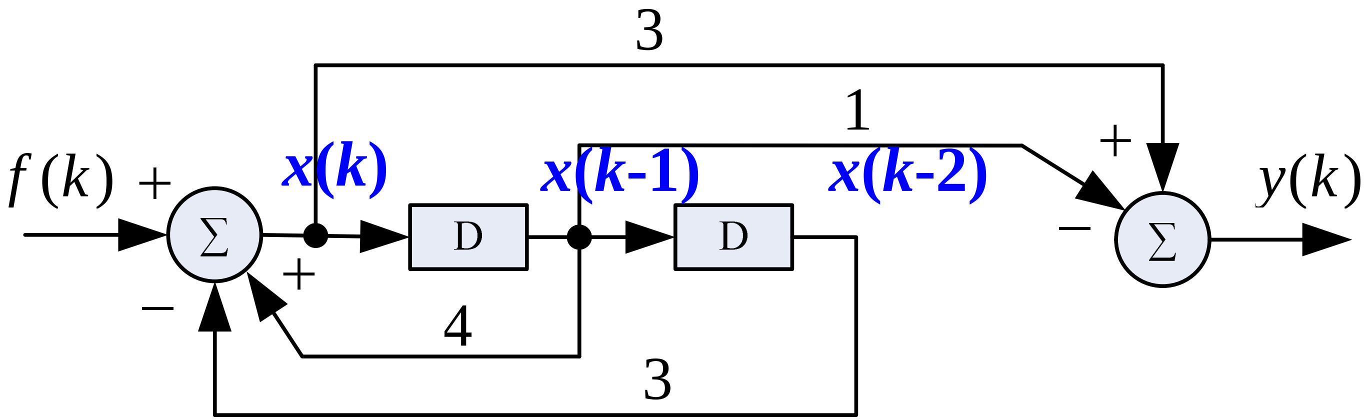
（4）表示系统特性：频率特性、稳定性等。

三、系统的z域框图：

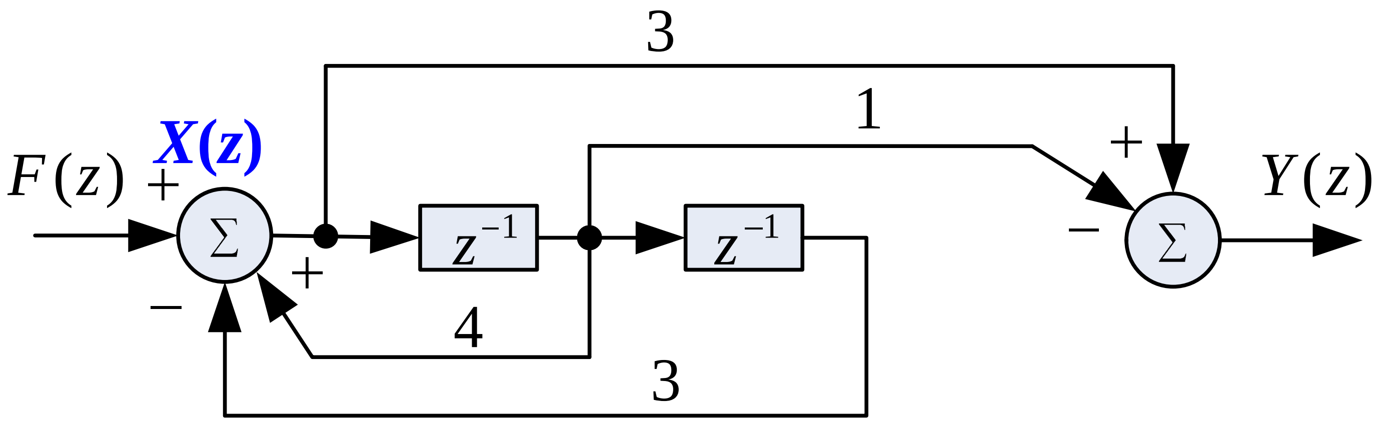
基本运算部件的z域模型

名　称	k 域 模 型	z 域 模 型
数乘器（标量乘法器）	$f(k) \to \boxed{a} \to af(k)$ 或 $f(k) \xrightarrow{a} af(k)$	$F(z) \to \boxed{a} \to aF(z)$ 或 $F(z) \xrightarrow{a} aF(z)$
加法器	$f_1(k) \xrightarrow{+} \Sigma$, $f_2(k) \xrightarrow{\pm} \Sigma$, $\Sigma \to f_1(k) \pm f_2(k)$	$F_1(z) \xrightarrow{+} \Sigma$, $F_2(z) \xrightarrow{\pm} \Sigma$, $\Sigma \to F_1(z) \pm F_2(z)$
迟延单元	$f(k) \to \boxed{D} \to f(k-1)$	$F(z) \to \boxed{z^{-1}} \xrightarrow{+} \Sigma$, $f(-1) \xrightarrow{+} \Sigma$, $\Sigma \to z^{-1}F(z) + f(-1)$
迟延单元（零状态）	$f(k) \to \boxed{D} \to f(k-1)$	$F(z) \to \boxed{z^{-1}} \to z^{-1}F(z)$

例1：求图示LTI因果系统的单位序列响应。



解： 画出z域框图：



由右边加法器可得： $X(z)=F(z)+4z^{-1}X(z)-3z^{-2}X(z)$

由左边加法器可得： $Y(z)=3X(z)-z^{-1}X(z)$

系统函数为：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{Y(z)}{X(z)}\frac{X(z)}{F(z)}=\frac{3-z^{-1}}{1-4z^{-1}+3z^{-2}}=\frac{z(3z-1)}{z^2-4z+3}$$

由部分分式展开得：

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{3z-1}{z^2-4z+3}=\frac{4}{z-3}+\frac{-1}{z-1}\Rightarrow H(z)=\frac{-z}{z-1}+\frac{4z}{z-3}$$

所以系统的单位序列响应为：

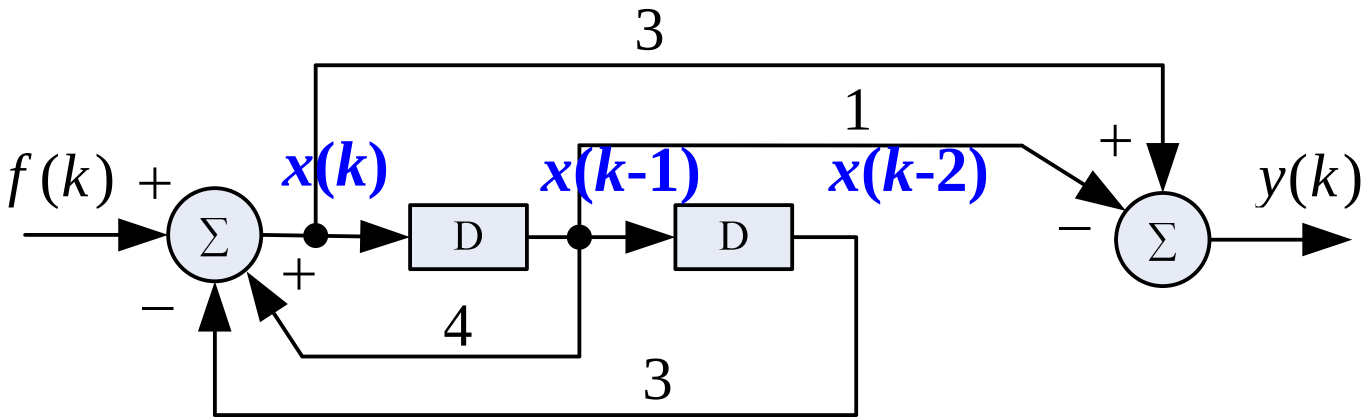
$$h(k)=[-1+4(3)^k]\varepsilon(k)$$

$$H(z)=\frac{-z}{z-1}+\frac{4z}{z-3}$$

所以系统的单位序列响应为：

$$h(k)=[-1+4(3)^{k}]\varepsilon(k)$$

例2：求图示LTI因果系统的单位序列响应。 例1经典解法



解： 设一中间变量$x(k)$，则左边的加法器输出为：

$$x(k) = f(k) + 4x(k-1) - 3x(k-2)$$

整理得：$x(k) - 4x(k-1) + 3x(k-2) = f(k) \qquad (1)$

右边加法器输出为：

$$y(k) = 3x(k) - x(k-1)$$

所以，图示系统的差分方程为：

$$y(k)-4y(k-1)+3y(k-2)=3f(k)-f(k-1) \qquad (2)$$

k≥2时，**(2)**式的零状态响应化为齐次方程：

$$h(k)-4h(k-1)+3h(k-2)=0 \qquad (3)$$

初始状态：

$$h(-1)=h(-2)=0$$

由**(2)**得： $h(k)=4h(k-1)-3h(k-2)+3\delta(k)-\delta(k-1)$

迭代得：

$$h(0)=4h(-1)-3h(-2)+3=3$$

$$h(1)=4h(0)-3h(-1)-1=11$$

（3）式的特征根为：

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

所以： $h(k) = [C_1(1)^k + C_2(3)^k]\varepsilon(k)$

代入初始条件得：

$$h(0) = C_1 + C_2 = 3$$

$$h(1) = C_1 + 3C_2 = 11$$

解得： $C_1 = -1, C_2 = 4$

由于**$h(0)$,$h(1)$**作为初始值代入，因而方程的解也满足**k=0**和**k=1**。所以系统的单位序列响应为：

$$h(k) = [-1 + 4(3)^k]\varepsilon(k)$$

四、s域与z域的关系

复变量s与z的关系：

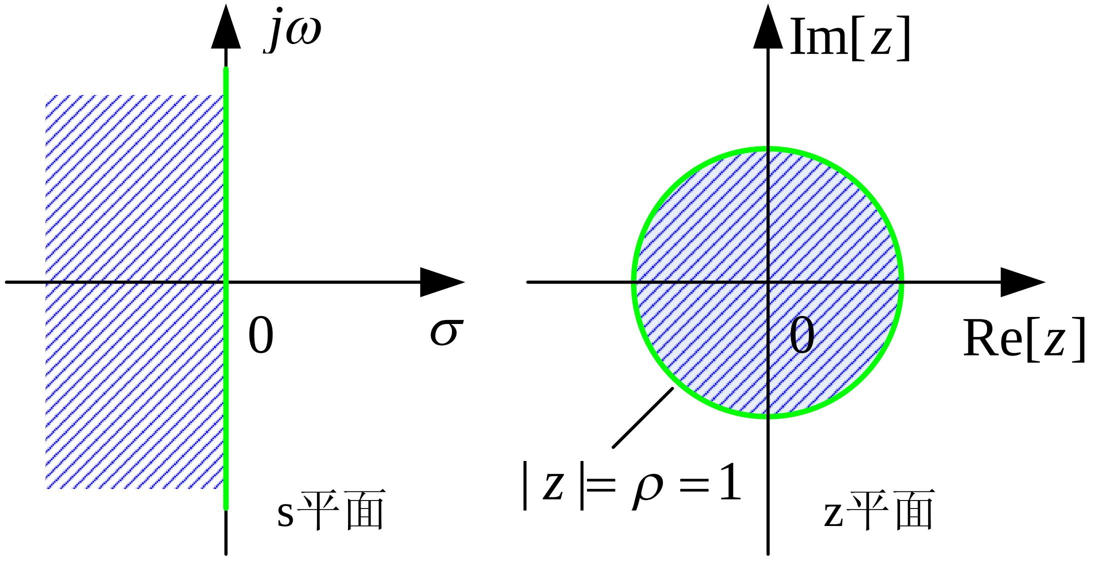
$$\begin{cases} z = e^{sT} \\ s = \dfrac{1}{T}\ln z \end{cases}$$

z平面与s平面的映射关系

设 s=$\sigma + j\omega$， $z = \rho e^{j\theta}$

又$z = e^{sT}$， 其中T为序列时间间隔$\left(\dfrac{2\pi}{\omega_s}\right)$

则 $\rho e^{j\theta} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$， 即$\begin{cases} \rho = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T \end{cases}$



s平面的左半平面（σ<0)--->z平面的单位圆内部（|z|=ρ<1)

s平面的jω轴（σ=0)--->z平面的单位圆（|z|=ρ=1)

s平面的右半平面（σ>0)--->z平面的单位圆外部（|z|=ρ>1)

s平面上实轴（ω=0)--->z平面的正实轴（θ=0)

s平面上的原点（σ=0，ω=0）---->z平面上z=1的点（ρ=1，θ=0）

z 平面到 s 平面的映射是多值的。在z平面上的一点 $z=\rho e^{j\theta}$ 映射到s平面将是无穷多点，即

$$s=\frac{1}{T}\ln z=\frac{1}{T}\ln\rho+j\frac{\theta+2m\pi}{T},\qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

五、离散系统的频率响应：

1、LTI离散系统对正弦序列的响应：

设系统输入 $f(k) = A\cos\Omega Tk,\ -\infty < k < \infty$

初始时刻 $k_0 = -\infty$

响应为 $y(k)$

$f(k)$表示为：$f(k) = \dfrac{A}{2}(e^{j\Omega Tk} + e^{-j\Omega Tk})$

（1）系统对$e^{j\Omega Tk}$的响应：

设输入 $f(k) = e^{j\Omega Tk}$，响应为 $y_1(k)$

则 $y_1(k) = h(k) * e^{j\Omega Tk}$

即 $y_1(k)=h(k)*e^{j\Omega Tk}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{j\Omega T(k-m)}$

$$=e^{j\Omega Tk}\sum_{m=0}^{\infty}h(m)e^{-j\Omega Tm},(h(k)为因果信号)$$

$$=e^{j\Omega Tk}\sum_{m=0}^{\infty}h(m)(e^{j\Omega T})^{-m}$$

设 $H(z)=Z[h(k)]$ 的收敛域含单位圆，令z为：

$$z=re^{j\theta}=e^{j\Omega T}$$

则 $y_1(k)=e^{j\Omega Tk}[\sum_{m=0}^{\infty}h(m)z^{-m}]\Big|_{z=e^{j\Omega T}}$

$$=e^{j\Omega Tk}H(z)\big|_{z=e^{j\Omega T}}=e^{j\Omega Tk}H(e^{j\Omega T})$$

（2）系统对 $e^{-j\Omega Tk}$ 的响应：

设输入 $f(k)=e^{-j\Omega Tk}$，响应为 $y_2(k)$

则 $y_2(k)=h(k)*e^{-j\Omega Tk}$

$$=e^{-j\Omega Tk}H^*(z)\big|_{z=e^{j\Omega T}}$$

$$=e^{-j\Omega Tk}H^*(e^{j\Omega T})$$

其中，$H(z)$ 的收敛域含单位圆。

（3）系统对正弦序列的响应：

系统输入 $f(k)=A\cos(\Omega Tk)=\dfrac{A}{2}(e^{j\Omega Tk}+e^{-j\Omega Tk})$

响应为 $y(k)$

由系统的线性性质，得：

$$y(k)=\frac{A}{2}[y_1(k)+y_2(k)]$$

$$=\frac{A}{2}[e^{j\Omega Tk}H(e^{j\Omega T})+e^{-j\Omega Tk}H^*(e^{j\Omega T})]$$

设 $H(e^{j\Omega T})=|H(e^{j\Omega T})|e^{j\varphi(\Omega T)}$

则 $H^*(e^{j\Omega T})=|H(e^{j\Omega T})|e^{-j\varphi(\Omega T)}$

一般情况：

$f(k)=A\cos(\Omega Tk+\theta)$

$y(k)=A|H(e^{j\Omega T})|\cos(\Omega Tk+\theta+\varphi(\Omega T))$

$$y(k)=\frac{A}{2}|H(e^{j\Omega T})|[e^{j(\Omega Tk+\varphi(\Omega T))}+e^{-j(\Omega Tk+\varphi(\Omega T))}]$$

$$=A|H(e^{j\Omega T})|\cos(\Omega Tk+\varphi(\Omega T)),\quad -\infty<k<\infty$$

$y(k)$ 称LTI离散系统的正弦稳态响应。

2、LTI离散系统的频率响应：

若LTI因果离散系统得系统函数H(z)得收敛域包含单位圆，$(|z|>\alpha, \alpha<1)$， 则 $H(e^{j\Omega T})$称为LTI因果离散系统的频率响应。其中

$$H(e^{j\Omega T}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega T}}$$

$$H(e^{j\Omega T}) = |H(e^{j\Omega T})| e^{j\varphi(\Omega T)}$$

$|H(e^{j\Omega T})|$称为系统的幅频响应；

$\varphi(\Omega T)$ 称为系统的相频响应；

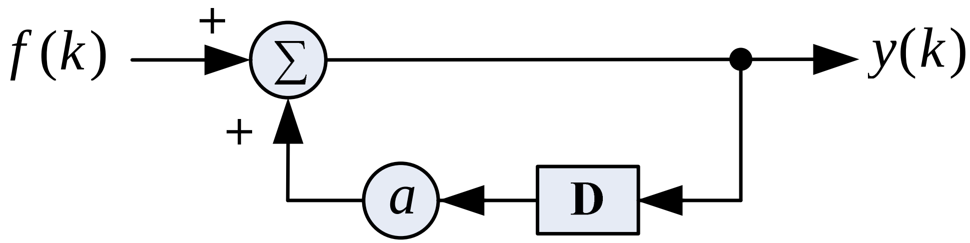
说明：

（1） $H(e^{j\Omega T})$ 是 ΩT 的周期函数，周期为 2π ；

（2） $H(e^{j\Omega T})$是 ΩT 的连续函数；

（3） $H(e^{j\Omega T})$ 表示系统对不同频率 ΩT 的正弦序列的稳态响应特性。

例1：已知离散系统如图所示，$0<\alpha<1$，求$H(e^{j\Omega T})$。



解：系统差分方程为：

$$y(k)-ay(k-1)=f(k),\quad f(k)\text{ 为因果信号}$$

系统函数 $H(z)$：

$$y_f(k)-ay_f(k-1)=f(k)$$

$$Y_f(z)-az^{-1}Y_f(z)=F(z)$$

$$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a},\quad |z|>a$$

因为 $0<a<1$，所以 $H(z)$ 的收敛域含单位圆，系统的频率响应为：

$$H(e^{j\Omega T}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega T}} = \frac{e^{j\Omega T}}{e^{j\Omega T}-a}$$

$$|H(e^{j\Omega T})| = \frac{1}{|e^{j\Omega T}-a|} = \frac{1}{|\cos\Omega T + j\sin\Omega T - a|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\cos\Omega T - a)^2 + \sin^2\Omega T}}$$

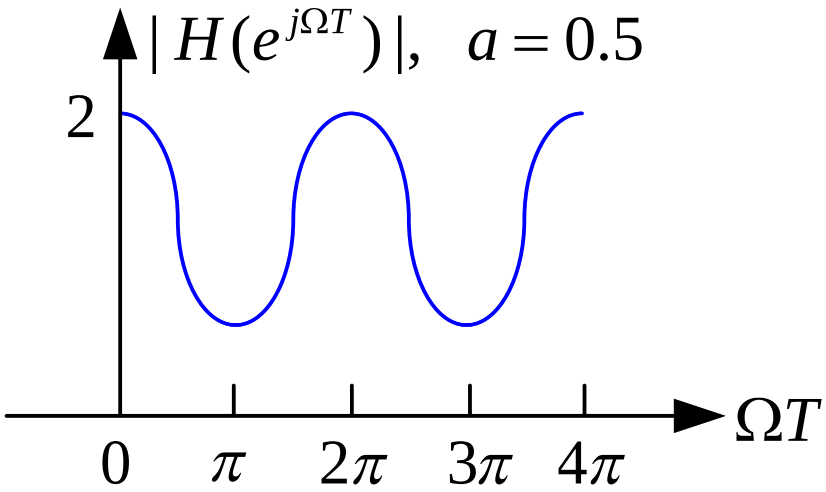
$$= \frac{1}{\sqrt{(1+a^2) - 2a\cos\Omega T}}$$

幅频响应曲线：（ΩT 称数字角频率）

$$\Omega T=0,\quad |H(e^{j\Omega T})|=\frac{1}{1-a}$$

$$\Omega T=\pi,\quad |H(e^{j\Omega T})|=\frac{1}{1+a}$$

$$\Omega T=2\pi,\quad |H(e^{j\Omega T})|=\frac{1}{1-a}$$



例2： 已知离散系统的输入 $f(k)$ 为

$$f(k)=9+9\cos(\frac{\pi}{4}k)+9\cos(\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{4}),\quad -\infty<k<\infty$$

系统函数为 $H(z)=\frac{1}{2z+1},\ |z|>\frac{1}{2}$，求稳态响应 $y(k)$。

解： 因为 $|z|>\frac{1}{2}$，所以 $H(z)$收敛域包含单位圆。

$$H(e^{j\Omega T})=\frac{1}{2e^{j\Omega T}+1}$$

（1） 设 $f_1(k)=9=9\cos(\Omega Tk),\quad \Omega T=0$

$$H(e^{j\Omega T})=\frac{1}{3}$$

设系统对 $f_1(k)$的响应为 $y_1(k)$，则

$$y_1(k)=9|H(e^{j\Omega T})|\cos[\Omega Tk+\varphi(\Omega T)]=9\times\frac{1}{3}=3,\quad \Omega T=0$$

（2） 设 $f_2(k)=9\cos(\frac{\pi}{4}k)$, $\Omega T=\frac{\pi}{4}$

$$H(e^{j\Omega T})=\frac{1}{2e^{j\frac{\pi}{4}}+1}=0.36\angle-30.3^\circ$$

设系统对 $f_2(k)$ 的响应为 $y_2(k)$，则

$$y_2(k)=9|H(e^{j\Omega T})|\cos[\Omega Tk+\varphi(\Omega T)],\quad \Omega T=\frac{\pi}{4}$$

$$=9\times0.36\cos(\frac{\pi}{4}k-30.3^\circ)$$

$$=3.24\cos(\frac{\pi}{4}k-30.3)$$

（3）设 $f_3(k)=9\cos(\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{4}),\quad \Omega T=\frac{\pi}{2}$

$$H(e^{j\Omega T})=\frac{1}{2e^{j\frac{\pi}{2}}+1}=\frac{1}{1+j2}=0.45\angle-63.4^\circ$$

设系统对 $f_3(k)$ 的响应为 $y_3(k)$，则

$$y_3(k)=9\,|H(e^{j\Omega T})|\cos[\Omega Tk+\frac{\pi}{4}+\varphi(\Omega T)),\quad \Omega T=\frac{\pi}{2},$$

$$=9\times0.45\cos[\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{4}-63.4^\circ)$$

$$=4.05\cos(\frac{\pi}{2}k-18.4^\circ)$$

(4) 设系统对 $f(k)$ 的响应为 $y(k)$：

$$y(k) = y_1(k) + y_2(k) + y_3(k)$$

$$= 3 + 3.24\cos(\frac{\pi}{4}k - 30.3^\circ) + 4.05\cos(\frac{\pi}{2}k - 18.4^\circ)$$

$$-\infty < k < \infty$$

3、借助DTFT求离散系统的频率响应

$$H(e^{j\theta}) = H(z)|_{z=e^{j\theta}}$$