5.1　拉普拉斯变换

一、从傅里叶变换到拉普拉斯变换

二、收敛域

三、(单边)拉普拉斯变换

5.2　拉普拉斯变换的性质

5.3　拉普拉斯变换逆变换

5.4　复频域分析

一、微分方程的变换解

二、系统函数

三、系统的s域框图

四、电路的s域模型

五、拉普拉斯变换与傅里叶变换

点击目录，进入相关章节

第五章 连续系统的s域分析

频域分析以虚指数信号$e^{j\omega t}$为基本信号，任意信号可分解为众多不同频率的虚指数分量之和。使响应的求解得到简化。物理意义清楚。但也有不足：

（1）有些重要信号不存在傅里叶变换，如$e^{2t}\varepsilon(t)$;

（2）对于给定初始状态的系统难于利用频域分析。

在这一章将通过把频域中的傅里叶变换推广到复频域来解决这些问题。

本章引入复频率 $s = \sigma + j\omega$,以复指数函数e^{st}为基本信号，任意信号可分解为不同复频率的复指数分量之和。这里用于系统分析的独立变量是复频率 s ， 故称为s域分析。所采用的数学工具为拉普拉斯变换。

5.1 拉普拉斯变换

一、从傅里叶到拉普拉斯变换

有些函数不满足绝对可积条件，求解傅里叶变换困难。为此，可用一衰减因子$e^{-\sigma t}$(σ为实常数）乘信号f(t)，适当选取σ的值，使乘积信号f(t) $e^{-\sigma t}$当$t\to\infty$时信号幅度趋近于0，从而使f(t) $e^{-\sigma t}$的傅里叶变换存在。

$$F_b(\sigma+j\omega)=\mathscr{F}[f(t)\,e^{-\sigma t}]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt$$

相应的傅里叶逆变换 为

$$f(t)\,e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_b(\sigma+j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_b(\sigma+j\omega)\,e^{(\sigma+j\omega)t}\,d\omega$$

令$s=\sigma+j\omega$, $d\omega=ds/j$，有

$$F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F_b(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$$

双边拉普拉斯变换对

$F_b(s)$称为f(t)的双边拉氏变换（或象函数），
f(t)称为$F_b(s)$ 的双边拉氏逆变换（或原函数）。

二、收敛域

只有选择适当的σ值才能使积分收敛，信号f(t)的双边拉普拉斯变换存在。

使 f(t)拉氏变换存在σ的取值范围称为$F_b(s)$的收敛域。

下面举例说明$F_b(s)$收敛域的问题。

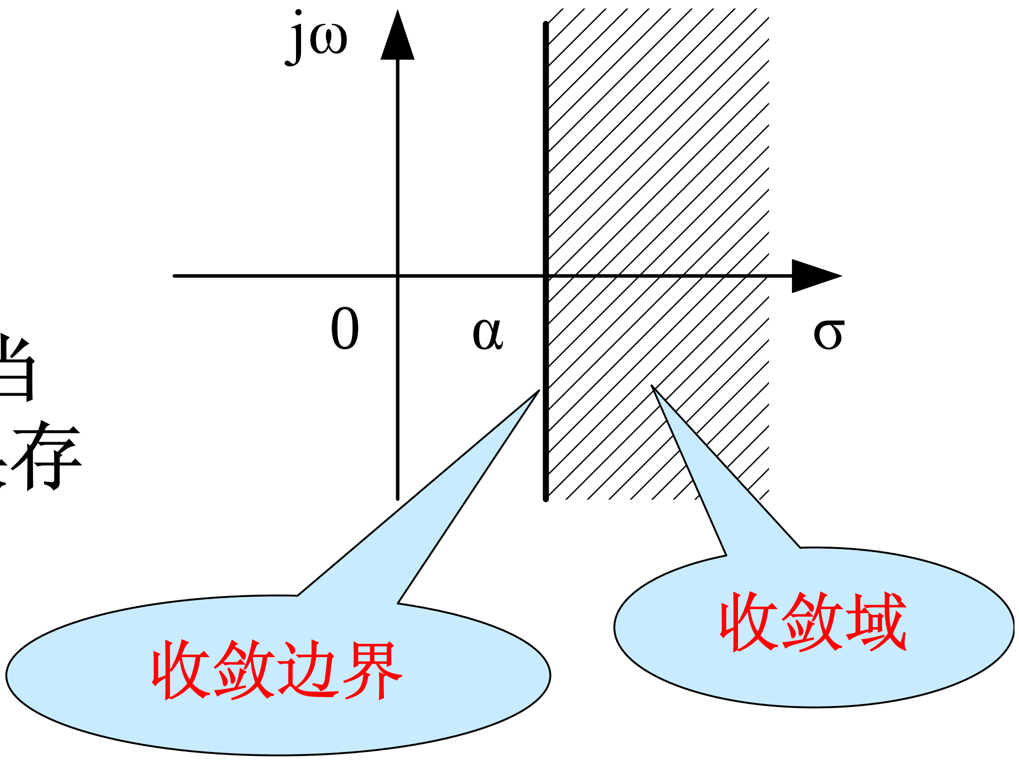
例1 因果信号$f_1(t)=e^{\alpha t}\varepsilon(t)$，求其拉普拉斯变换。

解

$$F_{1b}(s)=\int_0^{\infty}e^{\alpha t}e^{-st}\,dt=\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}\bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{(s-\alpha)}[1-\lim_{t\to\infty}e^{-(\sigma-\alpha)t}e^{-j\omega t}]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{s-\alpha}\ , & \mathrm{Re}[s]=\sigma>\alpha\\ \text{不定}\ , & \sigma=\alpha\\ \text{无界}\ , & \sigma<\alpha\end{cases}$$

可见，对于因果信号，仅当$\mathrm{Re}[s]=\sigma>\alpha$时，其拉氏变换存在。收敛域如图所示。



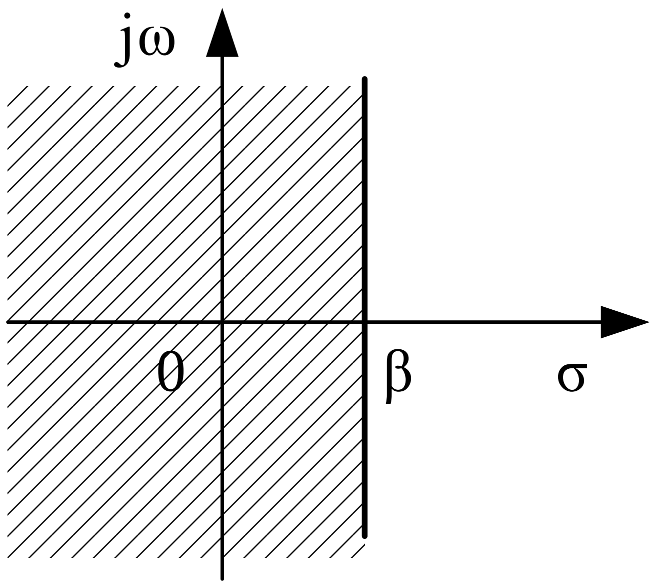
例2 反因果信号$f_2(t)= e^{\beta t}\varepsilon(-t)$，求其拉普拉斯变换。

解:

$$F_{2b}(s)=\int_{-\infty}^{0}e^{\beta t}e^{-st}\mathrm{d}t=\left.\frac{e^{-(s-\beta)t}}{-(s-\beta)}\right|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{-(s-\beta)}[1-\lim_{t\to-\infty}e^{-(\sigma-\beta)t}e^{-j\omega t}]$$

$$=\begin{cases}\text{无界}, & \mathrm{Re}[s]=\sigma.>\beta\\ \text{不定}, & \sigma=\beta\\ \dfrac{1}{-(s-\beta)}, & \sigma<\beta\end{cases}$$

可见，对于反因果信号，仅当**Re[s]=σ<β**时，其拉氏变换存在。收敛域如图所示。



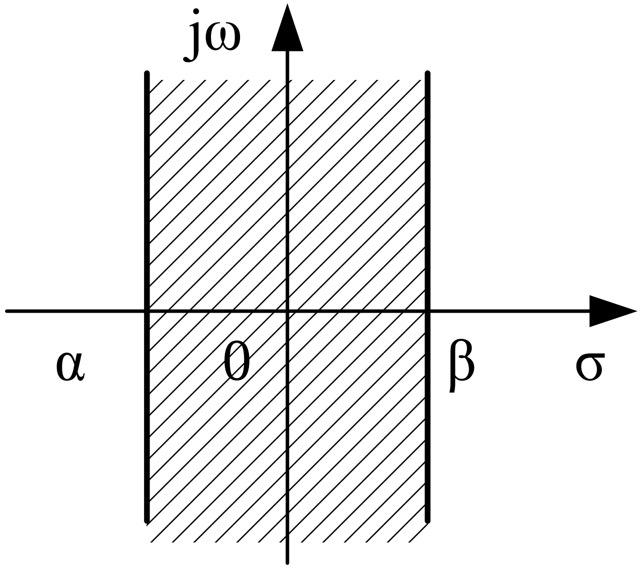
例3 双边信号求其拉普拉斯变换。

$$f_3(t) = f_1(t) + f_2(t) = \begin{cases} e^{\beta t}, & t < 0 \\ e^{\alpha t}, & t > 0 \end{cases}$$

求其拉普拉斯变换。

解：其双边拉普拉斯变换 $F_b(s)=F_{b1}(s)+F_{b2}(s)$

仅当β>α时，其收敛域为 α<Re[s]<β的一个带状区域，如图所示。



例4 求下列信号的双边拉氏变换。

$f_1(t)= e^{-3t}\varepsilon(t) + e^{-2t}\varepsilon(t)$

$f_2(t)= -e^{-3t}\varepsilon(-t) - e^{-2t}\varepsilon(-t)$

$f_3(t)= e^{-3t}\varepsilon(t) - e^{-2t}\varepsilon(-t)$

解

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s)=\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}[s]=\sigma > -2$$

$$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s)=\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}[s]=\sigma < -3$$

$$f_3(t) \longleftrightarrow F_3(s)=\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s+2} \qquad -3 < \sigma < -2$$

可见，象函数相同，但收敛域不同。双边拉氏变换必须标出收敛域。

结论：

1、对于双边拉普拉斯变换而言，F(S)和收敛域一起，
可以唯一地确定f(t)。 即：

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} F(S)+\text{收敛域}$$

2、收敛域：

（1）部分s平面收敛；

（2）整个s平面均收敛；

（3）整个s平面均不收敛。

3、不同的信号可以有相同的F(S)，但它们的收敛域不同；
不同信号如果有相同的收敛域，则它们的F(S)必然不同！

定义：对于给定的f(t)，把凡是满足下式的s组成的点集，称作f(t)的绝对收敛域：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)e^{-\sigma t}\right|dt<\infty$$

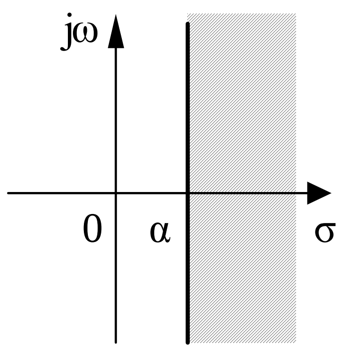
收敛域的确定方法（因为：s=σ+jw）：
求解适合于如下条件的所有σ值或范围：

$$\lim_{t\to\infty}\left|f(t)\right|e^{-\sigma t}=0$$

$$f_1(t)=(e^{-at}-e^{at})\varepsilon(t) \qquad f_2(t)=\begin{cases} e^{-at}, t>0 \\ e^{at}, t<0 \end{cases} \qquad f_3(t)=(-e^{-at}+e^{at})\varepsilon(-t)$$

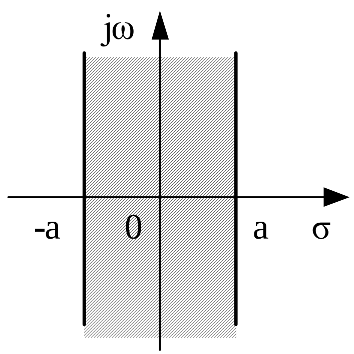
注意：以上3个信号，具有相同的F(S), 但收敛域不同：

$$F(S)=\frac{2a}{a^2-S^2} \qquad a>0$$



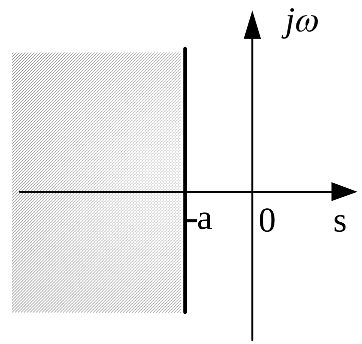
$\sigma > a$

(a) 因果信号



$-a < \sigma < a$

(b) 双边信号



$\sigma < -a$

(c) 反因果信号

通常遇到的信号都有初始时刻，不妨设其初始时刻为坐标原点。这样，**t<0**时，**f(t)=0**。从而拉氏变换式写为

$$F(s)=\int_{0-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

称为单边拉氏变换。简称拉氏变换。其收敛域一定是**Re[s]>α**，可以省略。本课程主要讨论单边拉氏变换。

三、单边拉氏变换

$$F(s)\overset{\text{def}}{=}\int_{0-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$f(t)\overset{\text{def}}{=}\left[\frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s\right]\varepsilon(t)$$

简记为**F(s)=**$\mathscr{L}$**[f(t)]**

f(t)=$\mathscr{L}^{-1}$**[F(s)]**

或

f(t)←→ F(s)

四、常见函数的拉普拉斯变换

1、$\delta(t) \longleftrightarrow 1$， $\sigma > -\infty$

2、$\varepsilon(t)$或1 $\longleftrightarrow 1/s$， $\sigma > 0$

3、指数函数$e^{-s_0 t} \longleftrightarrow \dfrac{1}{s+s_0}$ $\sigma > -\mathrm{Re}[s_0]$

$$t \longleftrightarrow 1/s^2$$

$$\cos\omega_0 t = (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2 \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\sin\omega_0 t = (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})/2j \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

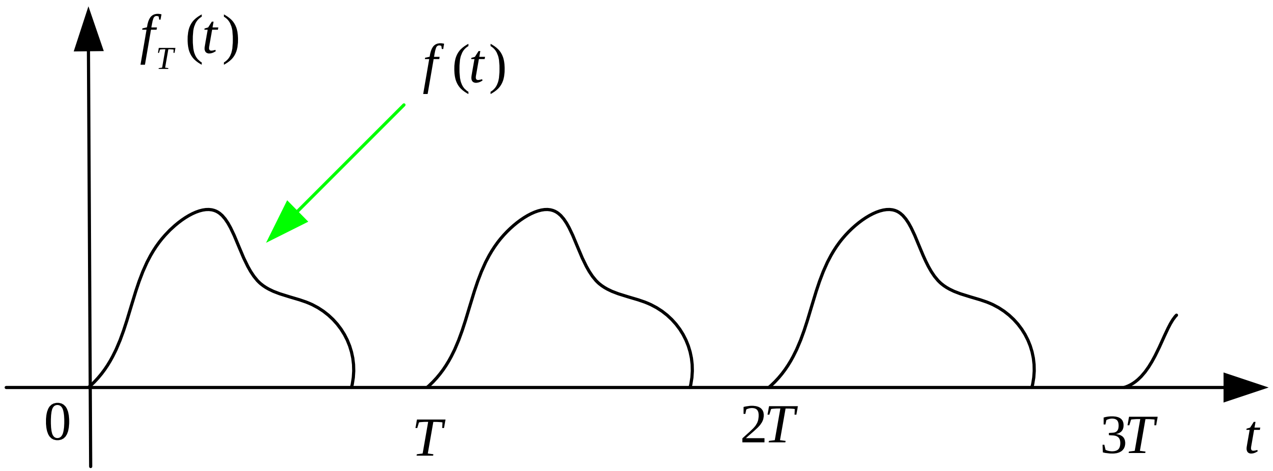
4、周期信号$f_T(t)$

$$F_T(s)=\int_0^{\infty} f_T(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{T} f_T(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_T^{2T} f_T(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\ldots..$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} f_T(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

令$t=t+nT$

$$\underset{=}{\;}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-nsT}\int_0^{T} f_T(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^{T} f_T(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

“周期信号” 的F(s):



若　$f(t) \leftrightarrow F(s)$

则　$f_T(t) \leftrightarrow \dfrac{F(s)}{1-e^{-sT}}$

特例： $\delta_T(t) \longleftrightarrow 1/(1 - e^{-sT})$

5.2 拉普拉斯变换性质

0、引言

利用常用信号的拉普拉斯变换对和拉普拉斯变换的性质，可以求解复杂信号的拉氏变换和反变换。

常用信号的拉普拉斯变换对 $f(t) \longleftrightarrow F(s)$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$\varepsilon(t) \longleftrightarrow 1/s$$

$$t^n \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

常用信号的拉普拉斯变换对（续） f(t) ←→ F(s)

$$e^{-at}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$$

$$t^{n}e^{-at}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

$$\cos(\beta t)\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^{2}+\beta^{2}}$$

$$\sin(\beta t)\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\beta}{s^{2}+\beta^{2}}$$

一、线性性质

若　$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s) \quad \mathrm{Re}[s] > \sigma_1, \qquad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s) \quad \mathrm{Re}[s] > \sigma_2$

则　$af_1(t) + a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad \mathrm{Re}[s] > \max(\sigma_1, \sigma_2)$

例　$\boldsymbol{f(t) = \delta(t) + \varepsilon(t) \longleftrightarrow 1 + 1/s, \quad \sigma > 0}$

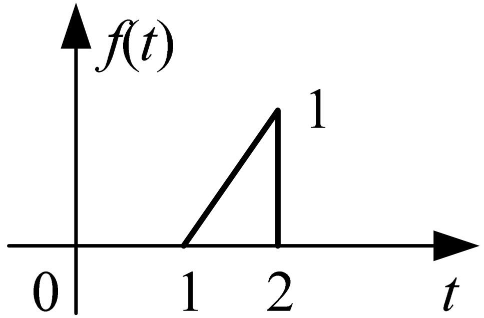
二、尺度变换

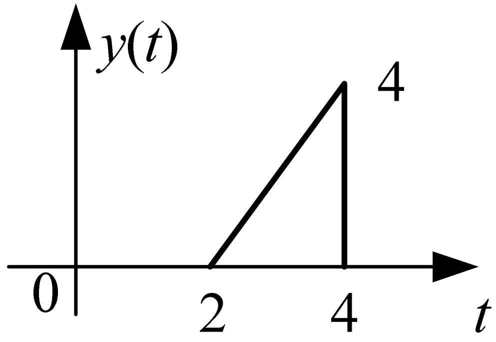
若　$f(t) \longleftrightarrow F(s) \qquad \mathrm{Re}[s] > \sigma_0$　　且有实数$a > 0$

则　$f(at) \longleftrightarrow \dfrac{1}{a} F(\dfrac{s}{a}) \qquad \mathrm{Re}[s] > a\sigma_0$

例：如图信号*f*(*t*)的拉氏变换 $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s^2}(1-e^{-s}-s\,e^{-s})$

求图中信号*y*(*t*)的拉氏变换*Y*(s)。





解： $y(t)=4f(0.5t)$

$$Y(s)=4\times 2F(2s)$$

$$=\frac{8e^{-2s}}{(2s)^2}(1-e^{-2s}-2s\,e^{-2s})$$

$$=\frac{2e^{-2s}}{s^2}(1-e^{-2s}-2s\,e^{-2s})$$

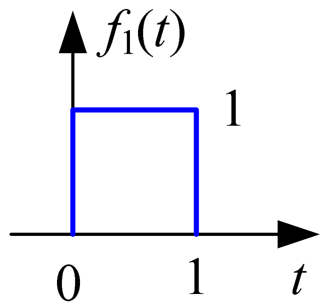
三、时移（延时）特性

若 $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ $\quad \mathrm{Re}[s] > \sigma_0$ $\quad$ 且有实常数$t_0 > 0$

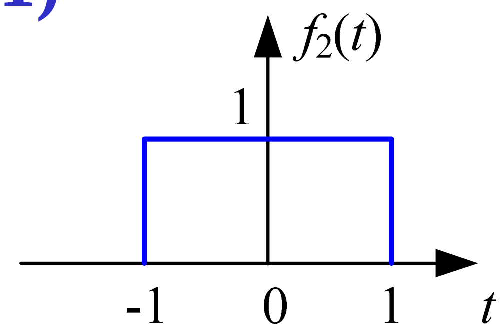
则 $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0}F(s)$ $\quad \mathrm{Re}[s] > \sigma_0$

与尺度变换相结合

$$f(at-t_0)\varepsilon(at-t_0) \longleftrightarrow \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{t_0}{a}s}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad a>0, t_0 \geq 0$$



例1:求如图信号的单边拉氏变换。



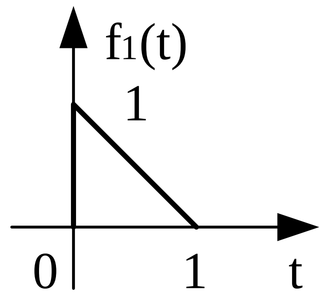
解： $f_1(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)$， $f_2(t) = \varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)$

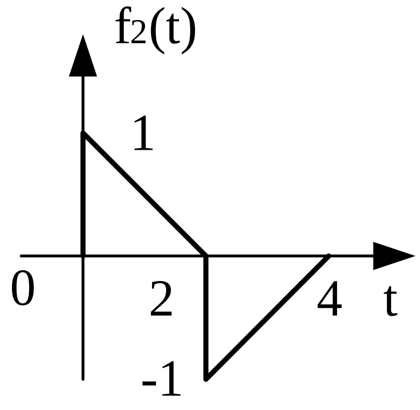
$$F_1(s) = \frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-s})$$

$$F_2(s) = F_1(s)$$

例2:已知$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s)$,

求$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s)$





解：$f_2(t) = f_1(0.5t) - f_1[0.5(t-2)]$

$f_1(0.5t) \longleftrightarrow 2F_1(2s)$

$f_1[0.5(t-2)] \longleftrightarrow 2F_1(2s)e^{-2s}$

$f_2(t) \longleftrightarrow 2F_1(2s)(1-e^{-2s})$

例3:求$f(t)= e^{-2(t-1)}\varepsilon(t) \longleftrightarrow F(s)=?$

四、复频移（s域平移）特性

若 $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ $\mathrm{Re}[s] > \sigma_0$ 且有复常数 $s_a = \sigma_a + j\omega_a$

则 $f(t)e^{s_a t} \longleftrightarrow F(s - s_a)$ $\mathrm{Re}[s] > \sigma_0 + \sigma_a$

例1:已知因果信号$f(t)$的象函数 $F(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$

求$e^{-t}f(3t-2)$的象函数。

解: $e^{-t}f(3t-2) \longleftrightarrow \dfrac{s+1}{(s+1)^2+9}e^{-\frac{2}{3}(s+1)}$

例2:$f(t)=\cos(2t-\pi/4) \longleftrightarrow F(s)=$?

解: $\cos(2t-\pi/4) = \cos(2t)\cos(\pi/4) + \sin(2t)\sin(\pi/4)$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{s^2+4}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{s+2}{s^2+4}$$

五、时域的微分特性（微分定理）

若 $f(t) \longleftrightarrow F(s) \qquad \mathrm{Re}[s] > \sigma_0$

则 $f'(t) \longleftrightarrow sF(s) - f(0_-)$

$$f''(t) \longleftrightarrow s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$$

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^nF(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-1-m} f^{(m)}(0_-)$$

若$f(t)$为因果信号，则 $f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^nF(s)$

例1: $\delta^{(n)}(t) \longleftrightarrow ?$

例2: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos 2t\varepsilon(t)] \longleftrightarrow ?$ **例3:** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos 2t] \longleftrightarrow ?$

六、时域积分特性（积分定理）

若 $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ $\mathrm{Re}[s] > \sigma_0$， 则

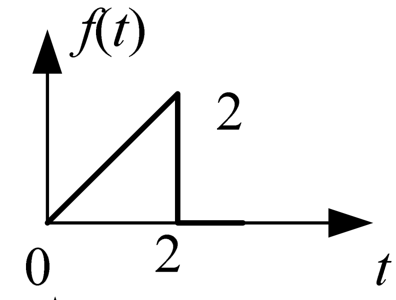
$$\left(\int_{0-}^{t}\right)^n f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow \frac{1}{s^n}F(s)$$

$$f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow s^{-1}F(s) + s^{-1}f^{(-1)}(0_-)$$

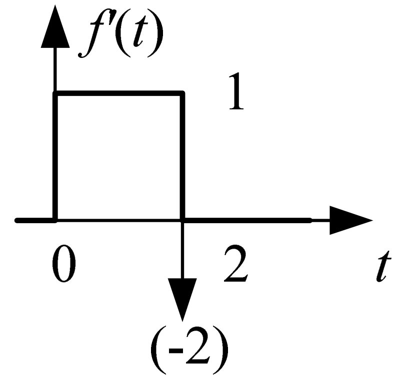
例1: $t^2\varepsilon(t) \longleftrightarrow ?$ $\int_0^t \varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = t\varepsilon(t)$

$$\left(\int_0^t\right)^2 \varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t x\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \frac{t^2}{2}\varepsilon(t) \qquad t^2\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{2}{s^3}$$

例2:已知因果信号*f*(t)如图 ,求F(s)



解：对$f(t)$求导得$f'(t)$，如图



$$\int_{0-}^{t} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(t) - f(0_-)$$

由于$f(t)$是因果信号，故$f(0_-) = 0$

$$f(t) = \int_{0-}^{t} f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f'(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2) - 2\delta(t-2) \longleftrightarrow F_1(s) = \frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-2s}) - 2\,\mathrm{e}^{-2s}$$

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{s} = \frac{1}{s^2}(1-\mathrm{e}^{-2s}) - \frac{2}{s}\mathrm{e}^{-2s}$$

结论：若*f*(t)为因果信号，已知 $f^{(n)}(t) \longleftrightarrow F_n(s)$

则：$f(t) \longleftrightarrow \dfrac{F_n(s)}{s^n}$

七、卷积定理

时域卷积定理

若因果信号 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s)\ \ \mathrm{Re}[s]>\sigma_1,\ f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s)\ \ \mathrm{Re}[s]>\sigma_2$

则 $f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(s)F_2(s)$

复频域（s域）卷积定理

$$f_1(t)\,f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\eta)F_2(s-\eta)\,\mathrm{d}\eta$$

例1： $t\ \varepsilon(t) \longleftrightarrow ?$

例2： 已知 $F(s)=\dfrac{1}{s(1-\mathrm{e}^{-2s})} \longleftrightarrow ?\qquad \varepsilon(t)*\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-2n)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon(t-2n)$

例3： 已知$F(s)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-sT}}=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-sT}}{1-\mathrm{e}^{-s2T}} \longleftrightarrow ?$

八、s域微分和积分

若 $f(t) \longleftrightarrow F(s)$　　$\mathrm{Re}[s] > \sigma_0$，　　则

$$(-t)f(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s} \qquad (-t)^n f(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n}$$

$$\frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_s^{\infty} F(\eta)d\eta$$

例1： $t^2 e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow ?$

解： $e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s+2}$

$$t^2 e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{1}{s+2}\right) = \frac{2}{(s+2)^3}$$

例2：$\dfrac{\sin t}{t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow ?$

$$\sin t\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s^2+1}$$

$$\frac{\sin t}{t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \int_s^{\infty} \frac{1}{\eta^2+1}\mathrm{d}\eta = \arctan\eta\Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan\frac{1}{s}$$

例3：$\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2t}}{t} \longleftrightarrow ?$

$$1-\mathrm{e}^{-2t} \longleftrightarrow \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{1-e^{-2t}}{t} \longleftrightarrow \int_s^{\infty} \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_1+2}\right)\mathrm{d}s_1 = \ln\frac{s_1}{s_1+2}\Big|_s^{\infty} = \ln\frac{s+2}{s}$$

九、初值定理和终值定理

初值定理和终值定理常用于由$F(s)$直接求$f(0_+)$和$f(\infty)$，而不必求出原函数$f(t)$。

初值定理

设函数$f(t)$不含$\delta(t)$及其各阶导数（即F(s)为真分式，若F(s)为假分式化为真分式），则

$$f(0_+) = \lim_{t\to 0_+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

终值定理

若$f(t)$当$t\to\infty$时存在，并且 $f(t) \leftrightarrow F(s)$，$\mathrm{Re}[s]>\sigma_0$，$\sigma_0<0$，则

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

例1： $F(s)=\dfrac{2s}{s^2+2s+2}$

$$f(0+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{2s^2}{s^2+2s+2}=2$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to0}sF(s)=\lim_{s\to0}\frac{2s^2}{s^2+2s+2}=0$$

例2： $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+2s+2}$

$$F(s)=1-\frac{2s+2}{s^2+2s+2}$$

$$f(0+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{-2s^2-2s}{s^2+2s+2}=-2$$

5.3 拉普拉斯逆变换

直接利用定义式求反变换---复变函数积分，比较困难。
通常的方法: （1）查表法
（2）利用性质 （3） 部分分式展开 -----结合

若象函数F(s)是s的有理分式，可写为

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots.+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

若m≥n （假分式）,可用多项式除法将象函数F(s)分解为有理多项式P(s)与有理真分式之和。

$$F(s)=P(s)+\frac{B(s)}{A(s)}$$

$$F(s)=\frac{s^4+8s^3+25s^2+31s+15}{s^3+6s^2+11s+6}=s+2+\frac{2s^2+3s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$$

由于**L⁻¹[1]=δ(t)**，**L⁻¹[sⁿ]=δ⁽ⁿ⁾(t)**，故多项式**P(s)**的拉普拉斯逆变换由冲激函数及其各阶导数构成。

下面主要讨论象函数为有理真分式的情形。

部分分式展开法

若**F(s)**是**s**的实系数有理真分式（**m<n**），则可写为

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+....+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s+a_0}$$

式中**A(s)**称为系统的**特征多项式**，方程**A(s)=0**称为**特征方程**，它的根称为**特征根**，也称为系统的**固有频率**（或自然频率）。**n**个特征根p_i称为**F(s)**的**极点**。

（1）F(s)为单极点（单根）

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+....+\frac{K_i}{s-p_i}+...+\frac{K_n}{s-p_n}$$

$$K_i=(s-p_i)F(s)\Big|_{s=p_i} \qquad L^{-1}[\frac{1}{s-p_i}]=\mathrm{e}^{p_i t}\varepsilon(t)$$

特例：F(s)包含共轭复根时($p_{1,2}=-\alpha\pm \mathrm{j}\beta$)

$$F(s)=\frac{B(s)}{D(s)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}=\frac{B(s)}{D(s)(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)}$$

$$=\frac{K_1}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{K_2}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}+F_2(s)$$

$$K_1=[(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)F(s)]\big|_{s=-\alpha+\mathrm{j}\beta}=|K_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=A+\mathrm{j}B \qquad K_2=K_1^*$$

$$F_1(s)=\frac{K_1}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{K_2}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}=\frac{|K_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{|K_1|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}$$

$$f_1(t)=2|K_1|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\varepsilon(t)$$

若写为$k_{1,2}=A\pm jB$, $f_1(t)=2e^{-\alpha t}[A\cos(\beta t)-B\sin(\beta t)]\varepsilon(t)$

例1: 已知 $F(s)=\dfrac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$， 求其逆变换。

解：部分分式分解法 $F(s)=\dfrac{k_1}{s}+\dfrac{k_2}{s+1}+\dfrac{k_3}{s+3}$ （$m<n$）

其中 $k_1=sF(s)\big|_{s=0}$

$$=\left.\frac{10(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=0}=\frac{100}{3}$$

$$k_2 = (s+1)F(s)\big|_{s=-1} = \left.\frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+3)}\right|_{s=-1} = -20$$

$$k_3 = (s+3)F(s)\big|_{s=-3} = \left.\frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)}\right|_{s=-3} = -\frac{10}{3}$$

$$\therefore\ F(s) = \frac{100}{3s} - \frac{20}{s+1} - \frac{10}{3(s+3)}$$

$$\therefore\ f(t) = \left(\frac{100}{3} - 20\mathrm{e}^{-t} - \frac{10}{3}\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

例2： 已知 $F(s)=\dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$，

求其逆变换

解：长除法 $F(s)$

$$
\because\ \begin{array}{r}
s+2 \\
s^2+3s+2\overline{\big)\,s^3+5s^2+9s+7} \\
\underline{s^3+3s^2+2s} \\
2s^2+7s+7 \\
\underline{2s^2+6s+4} \\
s+3
\end{array}
$$

分式分解法 $F(s) = s + 2 + \dfrac{k_1}{s+1} + \dfrac{k_2}{s+2}$

其中 $k_1 = (s+1)\cdot \left.\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-1} = 2$

$$k_2 = \left.\frac{s+3}{s+1}\right|_{s=-2} = -1$$

$$\therefore F(s) = s + 2 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\therefore f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + (2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

例3　已知 $F(s)=\dfrac{s^2+3}{(s^2+2s+5)(s+2)}$，　求其逆变换

解：$F(s)=\dfrac{s^2+3}{(s+1+j2)(s+1-j2)(s+2)}$

$$=\frac{k_1}{s+1-j2}+\frac{k_2}{s+1+j2}+\frac{k_0}{s+2}$$

$$p_{1,2}=-\alpha\pm j\beta,\ (\alpha=1,\beta=2)$$

其中 $k_1=\left.\dfrac{s^2+3}{(s+1+j2)(s+2)}\right|_{s=-1+j2}=\dfrac{-1+j2}{5}$

即 $k_{1,2} = A \pm jB$，$(A = -\frac{1}{5},\quad B = \frac{2}{5})$

$$k_0 = \left.\frac{s^2+3}{(s+1+j2)(s+1-j2)}\right|_{s=-2} = \frac{7}{5}$$

$$\therefore F(s) = \frac{-\frac{1}{5}+j\frac{2}{5}}{s+1+j2} + \frac{-\frac{1}{5}-j\frac{2}{5}}{s+1-j2} + \frac{7}{5(s+2)}$$

$$\because \alpha = 1,\ \beta = 2 \qquad A = -\frac{1}{5},\quad B = \frac{2}{5}$$

$$\therefore f(t) = \left\{2e^{-t}\left[-\frac{1}{5}\cos(2t) - \frac{2}{5}\sin(2t)\right] + \frac{7}{5}e^{-2t}\right\}\varepsilon(t)$$

例4： 求象函数F(s)的原函数$f(t)$。

$$F(s)=\frac{s^3+s^2+2s+4}{s(s+1)(s^2+1)(s^2+2s+2)}$$

解：A(s)=0有6个单根，它们分别是$s_1=0$，$s_2=-1$，$s_{3,4}=\pm j1$，$s_{5,6}=-1\pm j1$，故

$$F(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s-j}+\frac{K_4}{s+j}+\frac{K_5}{s+1-j}+\frac{K_6}{s+1+j}$$

$K_1=sF(s)|_{s=0}=2$，　$K_2=(s+1)F(s)|_{s=-1}=-1$

$K_3=(s-j)F(s)|_{s=j}=j/2=(1/2)e^{j(\pi/2)}$ ，$K_4=K_3^*=(1/2)e^{-j(\pi/2)}$

$K_5=(s+1-j)F(s)|_{s=-1+j}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{3}{4}\pi}$　　$K_6=K_5^*$

$$f(t)=[2-e^{-t}+\cos(t+\frac{\pi}{2})+\sqrt{2}\,e^{-t}\cos(t+\frac{3\pi}{4})]\varepsilon(t)$$

（2）F(s)有重极点（重根）

若A(s) = 0在s = p_1处有r重根，

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K_{11}}{(s-p_1)^r}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^{r-1}}+\ldots.+\frac{K_{1r}}{(s-p_1)}$$

$$K_{11}=\left[(s-p_1)^r F(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$K_{12}=\frac{d}{ds}\left[(s-p_1)^r F(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1r}=\frac{1}{(r-1)!}\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}s^{r-1}}\left[(s-p_1)^r F(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$L[t^n\varepsilon(t)]=\frac{n!}{s^{n+1}} \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{(s-p_1)^{n+1}}\right]=\frac{1}{n!}t^n\,\mathrm{e}^{p_1 t}\,\varepsilon(t)$$

举例： 已知$F(s)=\dfrac{s-2}{s(s+1)^3}$，　求其逆变换。

解： $$F(s)=\frac{k_{11}}{(s+1)^3}+\frac{k_{12}}{(s+1)^2}+\frac{k_{13}}{(s+1)}+\frac{k_2}{s}$$

令 $$F_1(s)=(s+1)^3F(s)=\frac{s-2}{s}$$

其中 $$k_{11}=F_1(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$=\frac{s-2}{s}\Bigg|_{s=-1}=3$$

$$k_{12}=\frac{d}{ds}F_1(s)\Bigg|_{s=p_1}$$

$$=\frac{s-(s-2)\cdot 1}{s^2}\Bigg|_{s=-1}=2$$

$$k_{13}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}F_1(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{-4s}{s^4}\Big|_{s=-1}=2$$

$$k_2=sF(s)\Big|_{s=0}$$

$$=\frac{s-2}{(s+1)^3}\Big|_{s=0}=-2$$

$$\therefore\ F(s)=\frac{3}{(s+1)^3}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)}-\frac{2}{s}$$

$$\therefore\ f(t)=(\frac{3}{2}t^2\,\mathrm{e}^{-t}+2t\,\mathrm{e}^{-t}+2\,\mathrm{e}^{-t}-2)\varepsilon(t)$$

5.4　复频域分析

一、微分方程的变换解

描述n阶系统的微分方程的一般形式为

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_i f^{(j)}(t)$$

系统的初始状态为y(0-) ,y'(0-),…，　$y^{(n-1)}$(0-)。

取拉普拉斯变换

$$y^{(i)}(t) \longleftrightarrow s^i Y(s) - \sum_{p=0}^{i-1} s^{i-1-p} y^{(p)}(0_-)$$

若$f(t)$在$t=0$时接入，则$f^{(j)}(t) \longleftrightarrow s^j F(s)$

$$[\sum_{i=0}^{n} a_i s^i]Y(s) - \sum_{i=0}^{n} a_i[\sum_{p=0}^{i-1} s^{i-1-p} y^{(p)}(0-)] = [\sum_{j=0}^{m} b_j s^j]F(s)$$

$$Y(s) = \frac{M(s)}{A(s)} + \frac{B(s)}{A(s)}F(s) = Y_x(s) + Y_f(s)$$

例1 描述某LTI系统的微分方程为

y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2f(t)

已知初始状态**y(0-)=1**，**y'(0-)=-1**，激励**f(t)=5costε(t)**，求系统的全响应**y(t)**。

解： 取拉氏变换得

$$Y(s) = \frac{sy(0\_) + y'(0\_) + 5y(0\_)}{s^2 + 5s + 6} + \frac{2}{s^2 + 5s + 6}F(s)$$

$$F(s) = \frac{5s}{s^2 + 1}$$

$$Y(s)=Y_x(s)+Y_f(s)=\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}+\frac{2}{(s+2)(s+3)}\frac{5s}{s^2+1}$$

$$=\frac{2}{s+2}+\frac{-1}{s+3}+\frac{-4}{s+2}+\frac{3}{s+3}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}}}{s-j}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}}{s+j}$$

$$y(t)=[2e^{-2t}-e^{-3t}-4e^{-2t}+3e^{-3t}+\sqrt{2}\cos(t-\frac{\pi}{4})]\varepsilon(t)$$

二、系统函数

系统函数**H(s)**定义为 $H(s)\overset{\text{def}}{=}\frac{Y_f(s)}{F(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}$

它只与系统的结构、元件参数有关，而与激励、初始状态无关。 **h(t)<--> H(s)**

例 已知当输入 $f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$ 时，某LTI系统的零状态响应

$y_f(t)=(3e^{-t}-4e^{-2t}+e^{-3t})\varepsilon(t)$

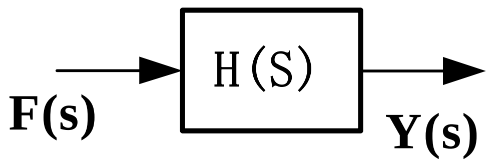
求该系统的冲激响应和描述该系统的微分方程。

解：
$$H(s)=\frac{Y_f(s)}{F(s)}=\frac{2(s+4)}{(s+2)(s+3)}=\frac{4}{s+2}+\frac{-2}{s+3}=\frac{2s+8}{s^2+5s+6}$$

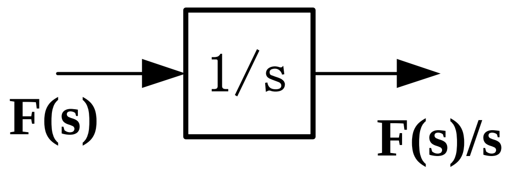
$$h(t)=(4e^{-2t}-2e^{-3t})\varepsilon(t)$$

微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2f'(t)+8f(t)$

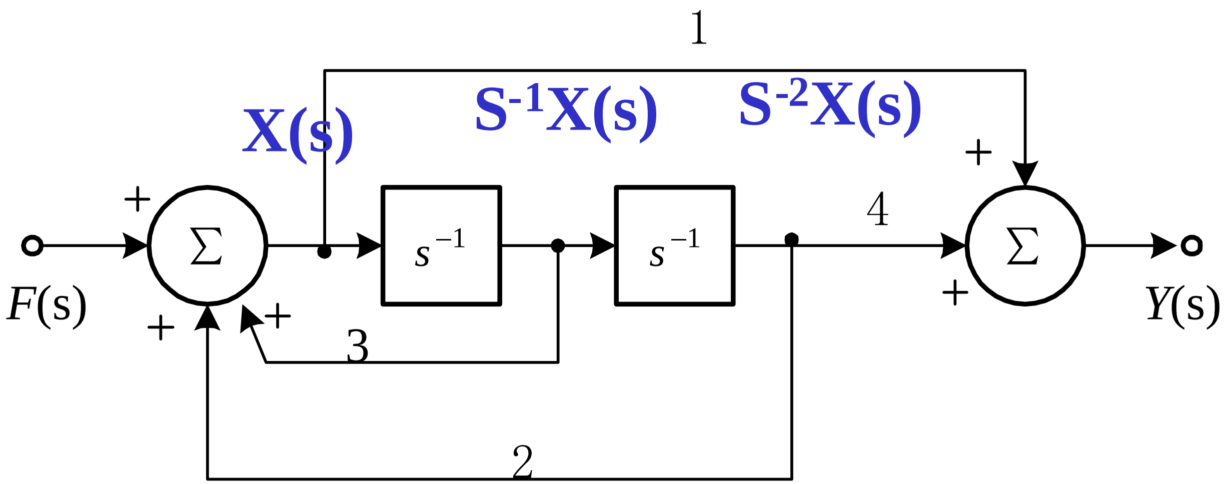
三、系统的s域框图



积分器的系统框图：



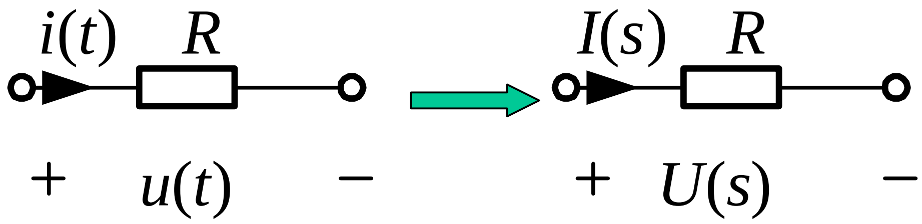
例：已知系统框图如图所示：



求H(s)。

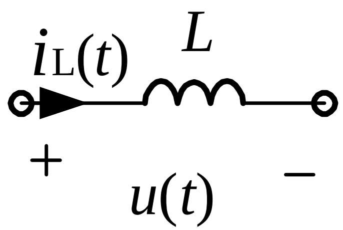
四、电路的s域模型

对时域电路取拉氏变换



1、电阻 **u(t)= R *i*(t)** → **U(s)= R I(s)**

2、电感

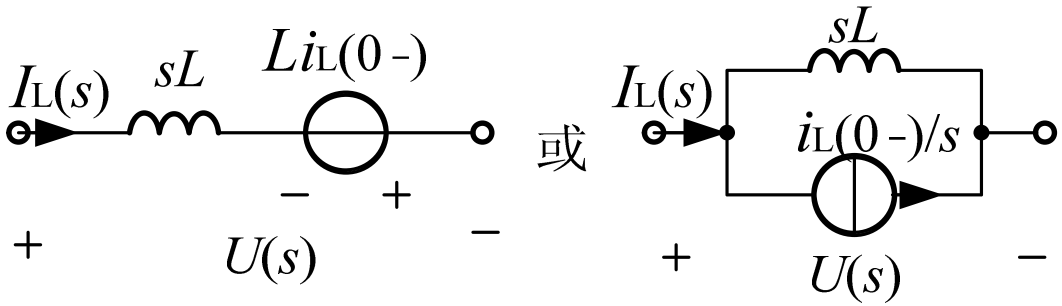


$$u(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

↓

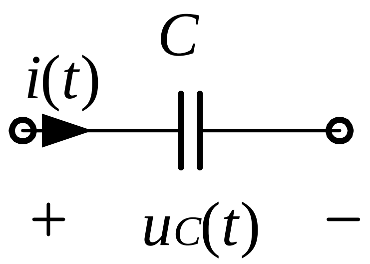
$$U(s)=sLI_L(s)-Li_L(0_-)$$

$$I_L(s)=\frac{1}{sL}U(s)+\frac{i_L(0_-)}{s}$$



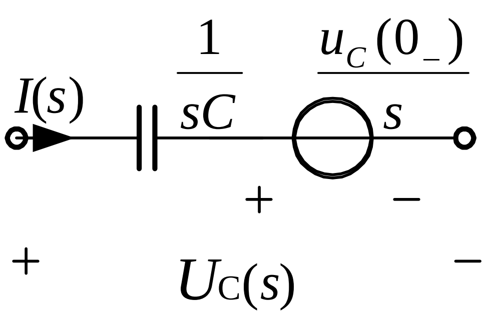
3、电容

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

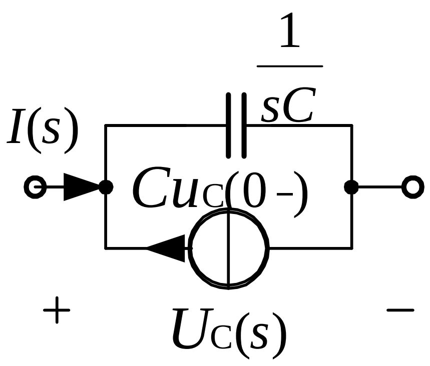


$$I(s)=sCU_C(s)-Cu_C(0\_)$$

$$U_C(s)=\frac{1}{sC}I(s)+\frac{u_C(0\_)}{s}$$



或



4、电源的S域模型

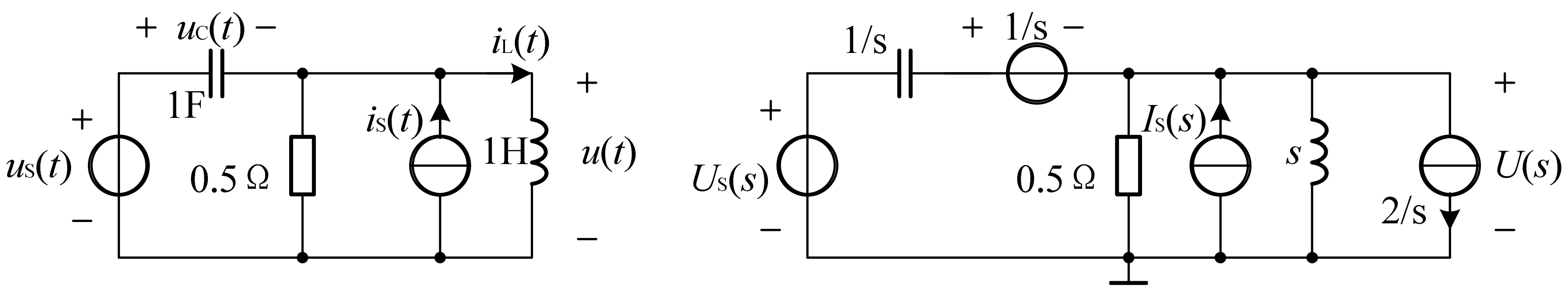
$u_s(t)$，$i_s(t)$ → $U_s(s)$，$I_s(s)$

5、 S域的KCL，KVL

节点： $\sum_k i_k(t)=0 \xleftrightarrow{L} \sum_k I_k(S)=0$

回路： $\sum_k u_k(t)=0 \xleftrightarrow{L} \sum_k U_k(S)=0$

例： 如图所示电路，已知$u_S(t)=\varepsilon(t)$ V，$i_S(t)=\delta(t)$，起始状态$u_C(0_-)=1$V，$i_L(0_-)=2$A，求电压$u(t)$。



(a) (b)

五、单边拉氏变换与傅里叶变换的关系

$$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \qquad \mathbf{Re[s]>\sigma_0}$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

要讨论其关系，***f*(t)**必须为因果信号。

根据收敛坐标σ_0的值可分为以下三种情况：

（1）$\sigma_0>0$，**F(jω)**不存在。

例：$f(t)=e^{2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow F(s)=1/(s-2)$ ，$\sigma>2$；

其傅里叶变换不存在。

(2)$\sigma_0<0$，即F(s)的收敛域包含jω轴，则$f(t)$的傅里叶变换存在，并且 $F(j\omega)=F(s)\big|_{s=j\omega}$

如 $f(t)=e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow F(s)=1/(s+2)$ ，$\sigma>-2$；

则 $F(j\omega)=1/(j\omega+2)$

（3）$\sigma_0=0$，即F(s)的收敛边界为jω轴，

$$F(j\omega)=\lim_{\sigma\to 0}F(s)$$

如$f(t)=\varepsilon(t) \longleftrightarrow F(s)=1/s$

$$F(j\omega)=\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma+j\omega}=\lim_{\sigma\to 0}\frac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2}+\lim_{\sigma\to 0}\frac{-j\omega}{\sigma^2+\omega^2}$$

$$=\pi\delta(\omega)+1/j\omega$$

设A(s)=0有N个虚根（单根） $j\omega_1$， $j\omega_2$， ……， $j\omega_N$。将F(s)展开成部分分式，并把它分为两部分，其中极点在左半开平面的部分令为$F_a(s)$：

$$F(s)=F_a(s)+\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i}{s-j\omega_i}$$

取其拉普拉斯逆变换：

$$f(t)=f_a(t)+\sum_{i=1}^{N}K_i e^{j\omega_i t}\varepsilon(t)$$

由于$e^{j\omega_i t}\varepsilon(t)$傅立叶变换为：$\pi\delta(\omega-\omega_i)+\dfrac{1}{j\omega-j\omega_i}$

取其傅立叶变换：

$$\mathscr{F}[f(t)]=F(j\omega)=F_a(s)\Big|_{s=j\omega}+\sum_{i=1}^{N}K_i[\pi\delta(\omega-\omega_i)+\frac{1}{j\omega-j\omega_i}]$$

$$\mathscr{F}[f(t)] = F(j\omega) = F_a(s)\big|_{s=j\omega} + \sum_{i=1}^{N} K_i[\pi\delta(\omega-\omega_i) + \frac{1}{j\omega - j\omega_i}]$$

$$= F_a(s)\big|_{s=j\omega} + \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{j\omega - j\omega_i} + \sum_{i=1}^{N} \pi K_i \delta(\omega-\omega_i)$$

$$F(j\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega} + \sum_{i=1}^{N} \pi K_i \delta(\omega-\omega_i)$$

例： 已知$\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$的象函数为$F(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$，求其傅里叶变换。

解：

$$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2} = \frac{\frac{1}{2}}{s+j\omega_0} + \frac{\frac{1}{2}}{s-j\omega_0}$$

$$F(j\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega} + \sum_{i=1}^{2} \pi K_i \delta(\omega-\omega_i) = \frac{j\omega}{-\omega^2+\omega_0^2} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

如果F(s)在$j\omega_1$处有r重极点，其余极点全左半开平面，F(s)的部分分式展开为：

$$F(s)=F_a(s)+\frac{K_{11}}{(s-j\omega_1)^r}+\frac{K_{12}}{(s-j\omega_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{1r}}{s-j\omega_1}$$

$$K_{11}=\left[(s-j\omega_1)^r F(s)\right]\Big|_{s=j\omega_1}$$

$$K_{1r}=\frac{1}{(r-1)!}\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}s^{r-1}}\left[(s-j\omega_1)^r F(s)\right]\Big|_{s=j\omega_1}$$

如果$F_a(s)$ 极点全左半开平面，F(s)对应的傅立叶变换为：

$$F(j\omega)=F(s)\Big|_{s=j\omega}+\frac{\pi K_{11}(j)^{r-1}}{(r-1)!}\delta^{(r-1)}(\omega-\omega_i)+\frac{\pi K_{12}(j)^{r-2}}{(r-2)!}\delta^{(r-2)}(\omega-\omega_i)$$

$$+\cdots+\pi K_{1r}\delta(\omega-\omega_i)$$