点击目录，进入相关章节

第二章　连续系统的时域分析

LTI连续系统的时域分析，归结为：建立并求解线性微分方程。由于在其分析过程涉及的函数变量均为时间*t*，故称为时域分析法。这种方法比较直观，物理概念清楚，是学习各种变换域分析法的基础。

2.1　LTI连续系统的响应

一、微分方程的经典解

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t)$$
$$= b_mf^{(m)}(t) + b_{m-1}f^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1f^{(1)}(t) + b_0f(t)$$

微分方程的经典解：

$y(t)$(完全解) = $y_h(t)$(齐次解) + $y_p(t)$(特解）

齐次解 是齐次微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=0$$

的解。**$y_h(t)$的函数形式**由上述微分方程的**特征根**确定。

（齐次解的函数形式见P41表2-1）

表2-1 不同特征根所对应的齐次解

特征根λ	齐次解$y_h(t)$
单实根	$Ce^{\lambda t}$
r重实根	$(C_{r-1}t^{r-1}+C_{r-2}t^{r-2}+\cdots+C_1t+C_0)e^{\lambda t}$
一对共轭复根$\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$	$e^{\alpha t}[C\cos(\beta t)+D\sin(\beta t)]$或$Ae^{\alpha t}\cos(\beta t-\theta)$，其中$Ae^{j\theta}=C+jD$
r重共轭复根	$[A_{r-1}t^{r-1}\cos(\beta t+\theta_{r-1})+A_{r-2}t^{r-2}\cos(\beta t+\theta_{r-2})+\cdots+A_0\cos(\beta t+\theta_0)]e^{\alpha t}$

特解 的函数形式与激励函数的形式有关。P41表2-2

齐次解的函数形式仅与系统本身的特性有关，而与激励f(t)的函数形式无关，称为系统的**固有响应**或**自由响应**；

特解的函数形式由激励确定，称为**强迫响应**。

表2-2 不同激励所对应的特解

激励 $f(t)$	特解 $y_p(t)$	
t^m	$P_m t^m + P_{m-1}t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0$	所有的特征根均不等于0；
	$t^r[P_m t^m + P_{m-1}t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0]$	有r重等于0的特征根；
$e^{\alpha t}$	$Pe^{\alpha t}$	α不等于特征根；
	$(P_1 t + P_0)e^{\alpha t}$	α等于特征单根；
	$(P_r t^r + P_{r-1}t^{r-1} + \cdots + P_1 t + P_0)e^{\alpha t}$	α等于r重特征根；
$\cos(\beta t)$或$\sin(\beta t)$	$P\cos(\beta t)+Q\sin(\beta t)$	所有的特征根均不等于$\pm j\beta$
	或$A\cos(\beta t-\theta)$，其中$Ae^{j\theta}=P+jQ$	

例 描述某系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$；

求（1）当$f(t) = 2e^{-t}$，$t\geqslant 0$；$y(0)=2$，$y'(0)= -1$时的全解；

（2）当$f(t) = e^{-2t}$，$t\geqslant 0$；$y(0)= 1$，$y'(0)=0$时的全解。

解: (1) 特征方程为 $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ 其特征根 $\lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = -3$。齐次解为

$$y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$$

由表2-2可知，当$f(t) = 2e^{-t}$时，其特解可设为

$$y_p(t) = Qe^{-t}$$

将其代入微分方程得

$$Qe^{-t} + 5(-Qe^{-t}) + 6Qe^{-t} = 2e^{-t}$$ 解得 Q=1

于是特解为 $y_p(t) = e^{-t}$

全解为： $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + e^{-t}$

其中 待定常数C_1, C_2由初始条件确定。

$$y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 2，\quad y'(0) = -2C_1 - 3C_2 - 1 = -1$$

解得 $C_1 = 3$，$C_2 = -2$

最后得全解 $y(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t}$，$t \geqslant 0$

（2）齐次解同上。当激励$f(t)=e^{-2t}$时，其指数与特征根之一相重。由表知：其特解为

$$y_p(t) = (Q_0 + Q_1 t)e^{-2t}$$

代入微分方程可得 $Q_1 e^{-2t} = e^{-2t}$

所以 $Q_1 = 1$ 但Q_0不能求得。

全解为： $y(t)= C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + te^{-2t} + Q_0e^{-2t}$

$$= (C_1+Q_0)e^{-2t} +C_2e^{-3t} + te^{-2t}$$

代入初始条件，得

$y(0) = (C_1+Q_0) + C_2=1$， $y'(0)= -2(C_1+Q_0) -3C_2+1=0$

解得 $C_1 + Q_0 = 2$,$C_2= -1$

全解为：$y(t) = 2e^{-2t} - e^{-3t} + te^{-2t}$, $t\geqslant 0$

讨论：因上式第一项的系数$C_1+Q_0= 2$，不能区分C_1和Q_0。

二、用系数匹配法求0+初始值

若输入f(t)是在t=0时接入系统，则确定待定系数C_i时用$t = 0_+$时刻的初始值，即$y^{(j)}(0_+)$ (j=0,1,2…，n-1)。

而$y^{(j)}(0_+)$包含了输入信号的作用，不便于描述系统的历史信息。

在t=0-时，激励尚未接入，该时刻的值$y^{(j)}(0_-)$反映了系统的历史情况而与激励无关。称这些值为初始状态或起始值。

通常，对于具体的系统，初始状态一般容易求得。这样为求解微分方程，就需要从已知的初始状态$y^{(j)}(0_-)$设法求得$y^{(j)}(0_+)$。下列举例说明。

例：描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

已知$y(0_-)=2$，$y'(0_-)= 0$，$f(t)= \varepsilon(t)$，求$y(0_+)$和$y'(0_+)$。

解：将输入$f(t)= \varepsilon(t)$代入上述微分方程得

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t) \qquad (1)$$

用系数匹配法分析：上式对于$t=0_-$也成立，在$0_-<t<0_+$区间等号两端$\delta(t)$项的系数应相等。

由于等号右端为$2\delta(t)$，故$y''(t)$应包含冲激函数，从而$y'(t)$在$t= 0$处将发生跃变，即$y'(0_+)\neq y'(0_-)$。

但$y'(t)$不含冲激函数，否则$y''(t)$将含有$\delta'(t)$项。由于$y'(t)$中不含$\delta(t)$，故$y(t)$在$t=0$处是连续的。

即 $$y(0_+) = y(0_-) = 2$$

对式(1)两端积分有

$$\int_{0-}^{0+} y''(t)dt + 3\int_{0-}^{0+} y'(t)dt + 2\int_{0-}^{0+} y(t)dt = 2\int_{0-}^{0+} \delta(t)dt + 6\int_{0-}^{0+} \varepsilon(t)dt$$

由于积分在无穷小区间[0-，0_+]进行的，且y(t)在t=0连续，故

$$\int_{0-}^{0+} y(t)dt = 0, \int_{0-}^{0+} \varepsilon(t)dt = 0$$

于是由上式得

$$[y'(0_+) - y'(0-)] + 3[y(0_+) - y(0-)]=2$$

考虑 $y(0_+) = y(0-)=2$，所以

$$y'(0_+) - y'(0-) = 2 \quad , \quad y'(0_+) = y'(0-) + 2 = 2$$

结论：当微分方程等号右端含有冲激函数（及其各阶导数）时，响应y(t)及其各阶导数中，有些在t=0处将发生跃变。但如果右端不含冲激函数时，则不会跃变。

三、零输入响应和零状态响应

$y(t) = y_x(t) + y_f(t)$ ，可以分别用经典法求解。

注意：对t=0时接入激励f(t)的系统，

初始值 $y_x^{(j)}(0_+), y_f^{(j)}(0_+)$ ($j = 0$，1，…，$n-1$)的计算：

$$y^{(j)}(0-)= y_x^{(j)}(0-)+ y_f^{(j)}(0-)$$

$$y^{(j)}(0_+)= y_x^{(j)}(0_+)+ y_f^{(j)}(0_+)$$

对于零输入响应，由于激励为零，故有

$$y_x^{(j)}(0_+)= y_x^{(j)}(0_-) = y^{(j)}(0_-)$$

对于零状态响应，在t=0-时刻激励尚未接入，故应有

$$y_f^{(j)}(0-)=0$$

$y_f^{(j)}(0_+)$的求法下面举例说明。

例1：描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

已知$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=0$，$f(t)=\varepsilon(t)$。求该系统的零输入响应和零状态响应。

解：（1）**零输入响应$y_x(t)$** 因为激励为0，故$y_x(t)$满足

$$y_x''(t) + 3y_x'(t) + 2y_x(t) = 0$$

$$y_x(0_+)= y_x(0_-)= y(0_-)=2$$

$$y_x'(0_+)= y_x'(0_-)= y'(0_-)=0$$

该齐次方程的**特征根**为-1，-2，故

$$y_x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$$

代入初始值并解得系数为$C_1=4$，$C_2=-2$，代入得

$$y_x(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t} \quad ,t > 0$$

（2）零状态响应 $y_f(t)$ 满足

$$y_f''(t) + 3y_f'(t) + 2y_f(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t)$$ 并有

$$y_f(0_-) = y_f'(0_-) = 0$$

由于上式等号右端含有 $\delta(t)$，故 $y_f''(t)$ 含有 $\delta(t)$，从而 $y_f'(t)$ 跃变，即 $y_f'(0_+) \neq y_f'(0_-)$，而 $y_f(t)$ 在 $t = 0$ 连续，即

$y_f(0_+) = y_f(0_-) = 0$，积分得

$$[y_f'(0_+) - y_f'(0_-)] + 3[y_f(0_+) - y_f(0_-)] + 2\int_{0_-}^{0_+} y_f(t)\,\mathrm{d}t = 2 + 6\int_{0_-}^{0_+} \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t$$

因此，$y_f'(0_+) = 2 - y_f'(0_-) = 2$

对 $t>0$ 时，有 $y_f''(t) + 3y_f'(t) + 2y_f(t) = 6$

不难求得其齐次解为 $D_1e^{-t} + D_2e^{-2t}$，其特解为常数3，

于是有 $y_f(t) = D_1e^{-t} + D_2e^{-2t} + 3$

代入初始值求得 $y_f(t) = -4e^{-t} + e^{-2t} + 3$，$t \geq 0$

2.2 冲激响应和阶跃响应

一、冲激响应

由单位冲激函数 $\delta(t)$所引起的零状态响应称为单位冲激响应，简称冲激响应，记为$h(t)$。$h(t)=T[\{0\}, \delta(t)]$

例1 描述某系统的微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$ 求其冲激响应$h(t)$。

解 根据$h(t)$的定义 有

$$h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = \delta(t)$$
$$h'(0_-) = h(0_-) = 0$$

先求$h'(0_+)$和$h(0_+)$。

因方程右端有δ(t)，故利用系数平衡法。h”(t)中含δ(t)，h’(t)含ε(t)，$h'(0_+)\neq h'(0-)$，h(t)在t=0连续，即$h(0_+)=h(0-)$。积分得

$$[h'(0_+) - h'(0-)] + 5[h(0_+) - h(0-)] + 6\int_{0-}^{0+} h(t)dt = 1$$

考虑$h(0_+)= h(0-)$，由上式可得

$$h(0_+)=h(0-)=0 \ , h'(0_+) =1 + h'(0-) = 1$$

对t>0时，有 $h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = 0$

故系统的冲激响应为一齐次解。

微分方程的特征根为-2，-3。故系统的冲激响应为

$$h(t)=(C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t})\varepsilon(t)$$

代入初始条件求得$C_1=1,C_2=-1$, 所以

$$h(t)=(e^{-2t} - e^{-3t})\varepsilon(t)$$

例2 描述某系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)= f''(t) + 2f'(t) + 3f(t)$$

求其冲激响应h(t)。

解 根据h(t)的定义 有

$$h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = \delta''(t)+ 2\delta'(t)+3\delta(t) \qquad (1)$$

$$h'(0_-) = h(0_-) = 0$$

先求$h'(0_+)$和$h(0_+)$。

由方程可知， h(t) 中含δ(t)

故令 $h(t) = a\delta(t) + p_1(t)$ 　[$p_i(t)$ 为不含δ(t) 的某函数]

$$h'(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + p_2(t)$$

$$h''(t) = a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t)+ p_3(t)$$

代入式(1)，有

$$a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t) + p_3(t) + 5[a\delta'(t) + b\delta(t) + p_2(t)] + 6[a\delta(t) + p_1(t)] = \delta''(t) + 2\delta'(t) + 3\delta(t)$$

整理得

$$a\delta''(t) + (b+5a)\delta'(t) + (c+5b+6a)\delta(t) + p_3(t) + 5p_2(t) + 6p_1(t) = \delta''(t) + 2\delta'(t) + 3\delta(t)$$

利用 $\delta(t)$ 系数匹配，得 $a=1$， $b=-3$， $c=12$

所以 $h(t) = \delta(t) + p_1(t)$ （2）

$h'(t) = \delta'(t) - 3\delta(t) + p_2(t)$ （3）

$h''(t) = \delta''(t) - 3\delta'(t) + 12\delta(t) + p_3(t)$ （4）

对式(3)从0-到0+积分得 $h(0_+) - h(0_-) = -3$

对式(4)从0-到0+积分得 $h'(0_+) - h'(0_-) = 12$

故 $h(0_+) = -3$， $h'(0_+) = 12$

对t>0时，有 $h''(t) + 6h'(t) + 5h(t) = 0$

微分方程的特征根为–2，–3。故系统的冲激响应为

$$h(t)= C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}\ ,\quad t>0$$

代入初始条件$h(0_+) = -3$，$h'(0_+) =12$

求得$C_1=3$，$C_2= -6$, 所以

$$h(t)= 3e^{-2t} - 6e^{-3t}\quad , t > 0$$

结合式(2)得

$$h(t)= \delta(t) + (3e^{-2t} - 6e^{-3t})\varepsilon(t)$$

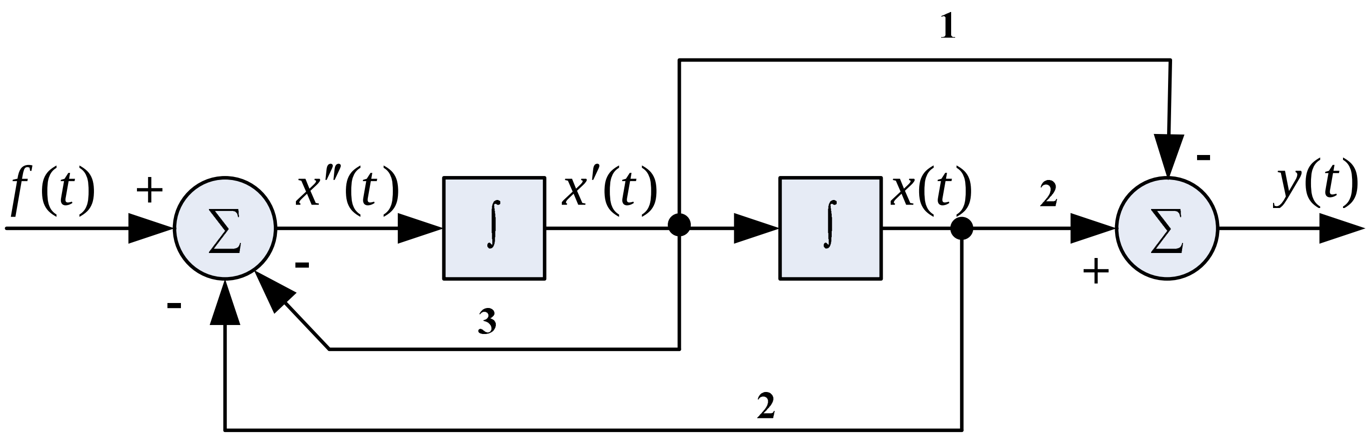
二、阶跃响应

由于 $\delta(t)$ 与 $\varepsilon(t)$ 为微积分关系，故

$g(t)= T[\varepsilon(t)，\{0\}]$

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad ,h(t)=\frac{\mathrm{d}\,g(t)}{\mathrm{d}t}$$

例3 如图所示的LTI系统，求其阶跃响应及冲激响应。



解：（1）列写系统的微分方程

设图中右端积分器的输出为$x(t)$，则其输入为$x'(t)$，左端积分器的输入为$x''(t)$。左端加法器的输出

$$x''(t)=-3x'(t)-2x(t)+f(t)$$

即

$$x''(t)+3x'(t)+2x(t)=f(t) \qquad (1)$$

右端加法器的输出

$$y(t) = -x'(t) + 2x(t)$$

所以，系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = -f'(t) + 2f(t) \qquad (2)$$

（2）求阶跃响应

设式（1）所描述的系统的阶跃响应为$g_1(t)$，则式（2）所描述的系统的阶跃响应为

$$g(t) = -g_1'(t) + 2g_1(t)$$

$g_1(t)$满足方程

$$\begin{cases} g_1''(t) + 3g_1'(t) + 2g_1(t) = \varepsilon(t) & (3) \\ g_1(0_-) = g_1'(0_-) = 0 \end{cases}$$

其特征根$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$,其特解为0.5，于是得

$$g_1(t)=(C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+0.5)\varepsilon(t)$$

式（3）等号右端只有$\varepsilon(t)$，故除了$g_1''(t)$外，$g(t)$和$g'(t)$均连续，即有

$$g_1(0_+)=g_1'(0_+)=0$$

代入上式，有

$$g_1(0_+)=C_1+C_2+0.5=0$$

$$g_1'(0_+)=-C_1-2C_2=0$$

可解得：$C_1=-1$，$C_2=0.5$

于是

$$g_1(t)=(-e^{-t}+0.5e^{-2t}+0.5)\varepsilon(t)$$

其一阶导数

$$g_1'(t)=(-e^{-t}+0.5e^{-2t}+0.5)\delta(t)+(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

于是

$$g(t)=-g_1'(t)+2g_1(t)=(-3e^{-t}+2e^{-2t}+1)\varepsilon(t)$$

（3）求冲激响应

设式（1）所描述的系统的冲激响应为$h_1(t)$，则式（2）所描述的系统的冲激响应为

$$h(t)=-h_1'(t)+2h_1(t)$$

$h_1(t)$满足方程

$$\begin{cases} h_1''(t)+3h_1'(t)+2h_1(t)=\delta(t) \\ h_1(0_-)=h_1'(0_-)=0 \end{cases} \qquad (4)$$

其特征根$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$，其特解为0，于是得

$$\mathrm{h}_1(t)=(C_3e^{-t}+C_4e^{-2t})\varepsilon(t)\qquad(5)$$

由系数平衡法，(4)式中$\mathrm{h}_1''(t)$应包含冲激函数，从而$\mathrm{h}_1'(t)$在$t=0$处将跃变，即$\mathrm{h}_1'(0_+)\neq\mathrm{h}_1'(0_-)$。但$\mathrm{h}_1'(t)$不含冲激函数，否则$\mathrm{h}_1''(t)$将含$\delta'(t)$项。由于$h_1'(t)$含有阶跃函数，故$h(t)$在$t=0$处连续。对(4)式等号两端积分(从$0_-$到$0_+$),得

$$[\mathrm{h}_1'(0_+)-\mathrm{h}_1'(0_-)]+3[\mathrm{h}_1(0_+)-\mathrm{h}_1(0_-)]=1$$

考虑到$h(t)$在$t=0$处连续。将$\mathrm{h}_1'(0_-)$，$\mathrm{h}_1(0_-)$代入上式得

$$\mathrm{h}_1'(0_+)-\mathrm{h}_1'(0_-)=1$$

$$\mathrm{h}_1(0_+)-\mathrm{h}_1(0_-)=0$$

即

$$h_1(0_+)=h_1(0_-)=0$$
$$h_1'(0_+)=h_1'(0_-)+1=1$$

代入(5)式，有

$$h_1(0_+)=C_3+C_4=0$$
$$h_1'(0_+)=-C_3-2C_4=1$$

可解得：$C_3=1$，$C_4=-1$

于是

$$h_1(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

其一阶导数

$$h_1'(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\delta(t)+(-e^{-t}+2e^{-2t})\varepsilon(t)=(-e^{-t}+2e^{-2t})\varepsilon(t)$$

于是

$$h(t)=-h_1'(t)+2h_1(t)=(3e^{-t}-4e^{-2t})\varepsilon(t)$$

刚才已经求得：

$$g(t)=(-3e^{-t}+2e^{-2t}+1)\varepsilon(t)$$

验证结论（解法II）：

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}\,g(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

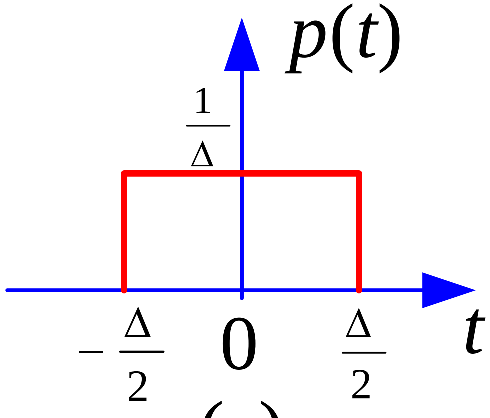
2.3 卷积积分

一、信号的时域分解与卷积积分

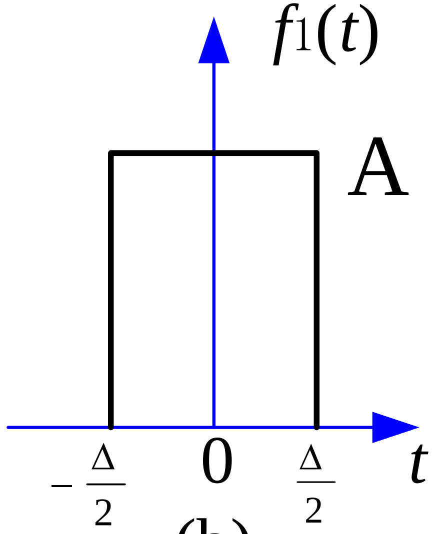
1. 信号的时域分解

(1) 预备知识

问 $f_1(t) = ?\ p(t)$



(a)



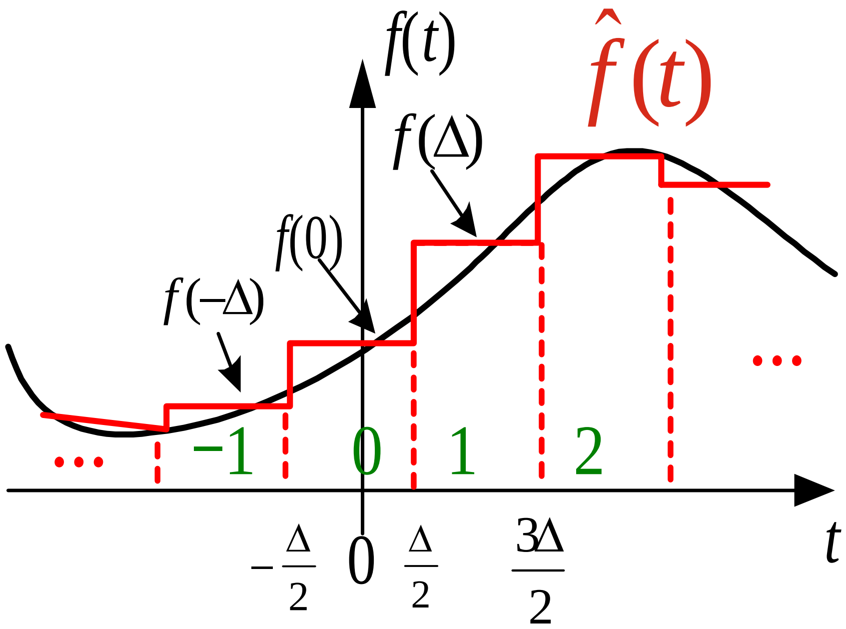
(b)

直观看出

$$f_1(t) = \frac{A}{\frac{1}{\Delta}} p(t) = A\Delta\ p(t)$$

（2）任意信号分解

“0”号脉冲高度**f(0)**，宽度为△，用**p(t)**表示为：**f(0) △ p(t)**



“1”号脉冲高度**f(△)**，宽度为△，用**p(t－△)**表示为：

f(△) △ p(t－△)

“−1”号脉冲高度**f(−△)**、宽度为△，用**p(t＋△)**表示为：**f(－△) △ p(t＋△)**

$$\hat{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)\Delta p(t-n\Delta)$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\hat{f}(t)=f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

2. 任意信号作用下的零状态响应

根据h(t)的定义： $\delta(t) \longrightarrow h(t)$

由时不变性： $\delta(t-\tau) \longrightarrow h(t-\tau)$

由齐次性： $f(\tau)\,\delta(t-\tau) \longrightarrow f(\tau)\,h(t-\tau)$

由叠加性： $\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=\,f(t)} \longrightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=\,y_f(t)}$

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$ **卷积积分**

3. 卷积积分的定义

已知定义在区间（ – ∞， ∞）上的两个函数$f_1(t)$和$f_2(t)$，则定义积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

为$f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积积分，简称卷积；记为

$$f(t)= f_1(t)*f_2(t)$$

注意：积分是在虚设的变量τ下进行的， τ为积分变量，t为参变量。结果仍为t 的函数。

$$\boxed{y_f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)*h(t)}$$

例1：$f(t) = e^{t}$，$(-\infty<t<\infty)$，$h(t) = (6e^{-2t} - 1)\,\varepsilon(t)$，求$y_f(t)$。

解：$y_f(t) = f(t) * h(t)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}[6e^{-2(t-\tau)} - 1]\varepsilon(t-\tau)\,d\tau$$

当$t < \tau$，即 $\tau > t$时，$\varepsilon(t - \tau) = 0$

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau}[6e^{-2(t-\tau)} - 1]\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} (6e^{-2t}e^{3\tau} - e^{\tau})\,d\tau$$

$$= e^{-2t}\int_{-\infty}^{t} (6e^{3\tau})\,d\tau - \int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\,d\tau$$

$$= e^{-2t}\cdot 2e^{3\tau}\Big|_{-\infty}^{t} - e^{\tau}\Big|_{-\infty}^{t} = 2e^{-2t}\cdot e^{3t} - e^{t} = e^{t}$$

二、卷积的图解法

演示

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

卷积过程可分解为**四步**：

（1）换元：　t换为 τ →得 $f_1(\tau)$，　$f_2(\tau)$

（2）反转平移：由$f_2(\tau)$反转→ $f_2(-\tau)$右移t → $f_2(t-\tau)$

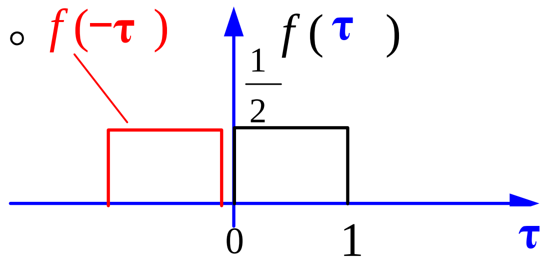
（3）乘积：　$f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)$

（4）积分：　τ 从 $-\infty$到∞对乘积项积分。

注意：t为参变量。

下面举例说明。

例2 $f(t)$, $h(t)$ 如图所示，求 $y_f(t)= h(t) * f(t)$。

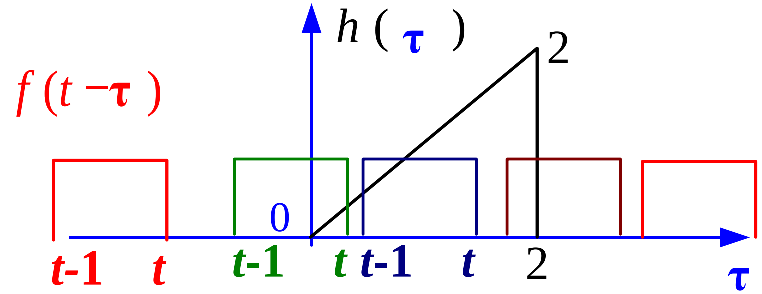


[解] 采用图解法求卷积。

$h(t)$函数形式复杂 ⟶ 换元为$h(\tau)$。

$f(t)$换元 ⟶ $f(\tau)$

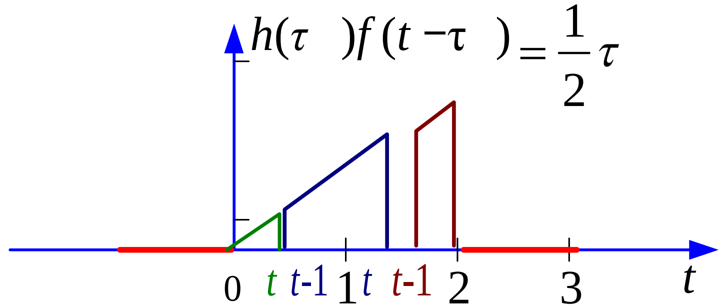
$f(\tau)$反折 ⟶ $f(-\tau)$平移t ⟶ $f(t-\tau)$



① $t<0$时，$f(t-\tau)$向左移

$f(t-\tau)h(\tau)=0$，故 $y_f(t)=0$

② $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$f(t-\tau)$向右移



$$y_f(t)=\int_0^t \tau\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{4}t^2$$

③ $1\leqslant t\leqslant 2$时

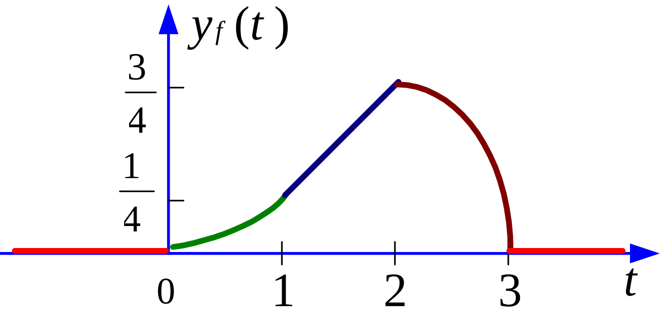
$$y_f(t)=\int_{t-1}^{t} \tau\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}$$

④ $2\leqslant t\leqslant 3$ 时

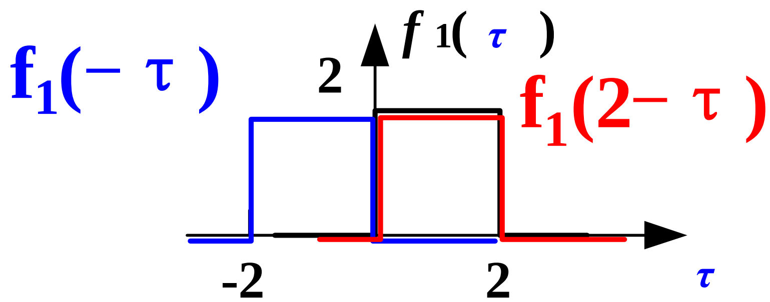
$$y_f(t)=\int_{t-1}^{2} \tau\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}$$

⑤ $3\leqslant t$ 时

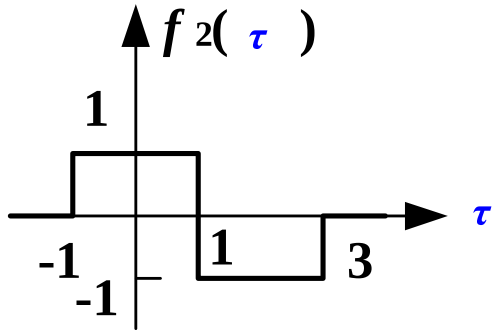
$f(t-\tau)h(\tau)=0$，故 $y_f(t)=0$



图解法一般比较繁琐，但若只求某一时刻卷积值时还是比较方便的。确定积分的上下限是关键。



例3：$f_1(t)$、$f_2(t)$如图所示，已知$f(t) = f_2(t) * f_1(t)$，求$f(2) = ?$



解：$f(2)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_1(2-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

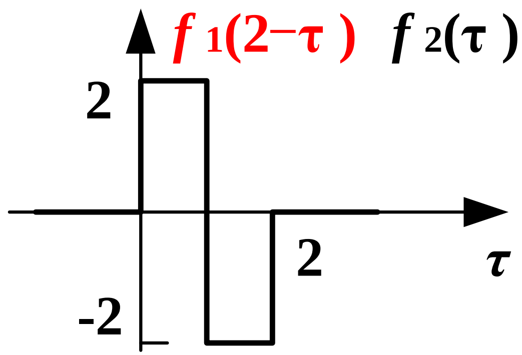
（1）换元

（2）$f_1(\tau)$得$f_1(-\tau)$

（3）$f_1(-\tau)$右移2得$f_1(2-\tau)$

（4）$f_1(2-\tau)$乘$f_2(\tau)$

（5）积分，得$f(2) = 0$（面积为0）



2.4 卷积积分的性质

卷积积分是一种数学运算，它有许多重要的性质（或运算规则），灵活地运用它们能简化卷积运算。下面讨论均设卷积积分是收敛的（或存在的）。

一、卷积代数

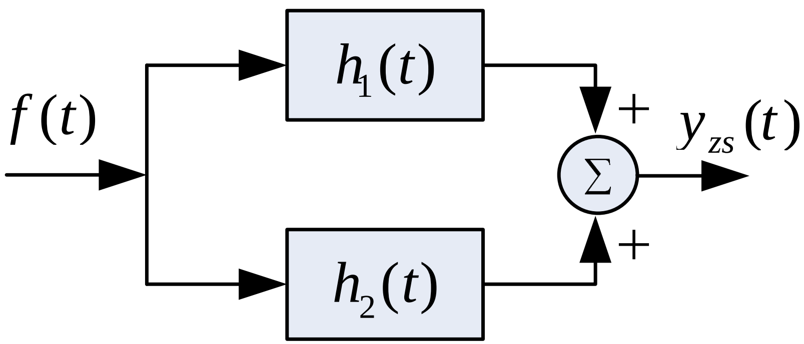
1 满足乘法的三律：

（1）交换律： $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

（2）分配律： $f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$

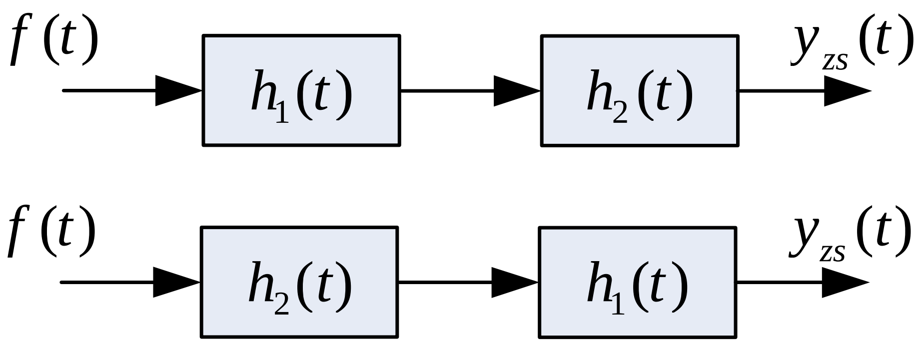
（3）结合律： $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)]=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

2. 复合系统的冲激响应



$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)$$

(a) 并联



$$h(t)=h_1(t)*h_2(t)=h_2(t)*h_1(t)$$

(b) 级联

二、奇异函数的卷积特性

1. $f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=f(t)$

证： $\delta(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f(t)$

$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

2. $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$

证： $\delta'(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f'(t)$

$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$

3. $f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\varepsilon(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=t\,\varepsilon(t)$

三、卷积的微积分性质

1. $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{\mathrm{d}^n f_1(t)}{\mathrm{d}t^n}*f_2(t)=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}^n f_2(t)}{\mathrm{d}t^n}$$

证：上式= $\delta^{(n)}(t)*[f_1(t)*f_2(t)]$

$= [\delta^{(n)}(t)*f_1(t)]*f_2(t) = f_1^{(n)}(t)*f_2(t)$

2. $$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau=[\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau]*f_2(t)=f_1(t)*[\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)\mathrm{d}\tau]$$

证：上式= $\varepsilon(t)*[f_1(t)*f_2(t)]$

$= [\varepsilon(t)*f_1(t)]*f_2(t) = f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)$

3. 在$f_1(-\infty)=0$或$f_2^{(-1)}(\infty)=0$的前提下，

$f_1(t)*f_2(t) = f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)$

例1： $f_1(t) = 1$， $f_2(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$， 求 $f_1(t) * f_2(t)$

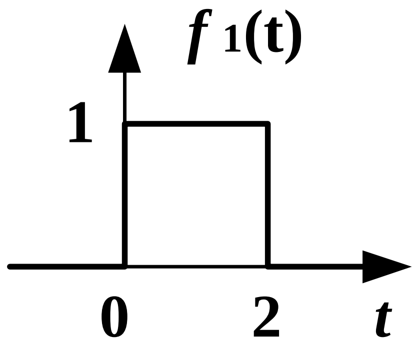
解：通常复杂函数放前面，代入定义式得

$$f_2(t) * f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}\,\varepsilon(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty} e^{-\tau}\,d\tau = -e^{-\tau}\Big|_0^{\infty} = 1$$

注意：套用 $f_1(t) * f_2(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t)$

$= 0 * f_2^{(-1)}(t) = 0$ 显然是错误的。

例2： $f_1(t)$ 如图, $f_2(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$， 求 $f_1(t) * f_2(t)$



解法一： $f_1(t) * f_2(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t)$

$f_1'(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$

$$f_2^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}\,\varepsilon(\tau)\,d\tau = \left[\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau\right]\varepsilon(t) = -e^{-\tau}\Big|_0^t \cdot \varepsilon(t) = (1 - e^{-t})\varepsilon(t)$$

$f_1(t) * f_2(t) = (1 - e^{-t})\,\varepsilon(t) - [1 - e^{-(t-2)}]\,\varepsilon(t-2)$

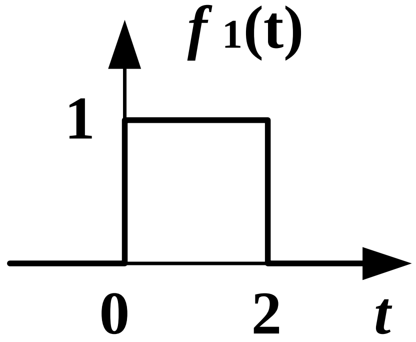
四、卷积的时移特性

若 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$，

则 $f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = f_1(t-t_1-t_2) * f_2(t)$

$= f_1(t) * f_2(t-t_1-t_2) = f(t-t_1-t_2)$

前例：$f_1(t)$ 如图, $f_2(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$，求$f_1(t) * f_2(t)$



解：　$f_1(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$

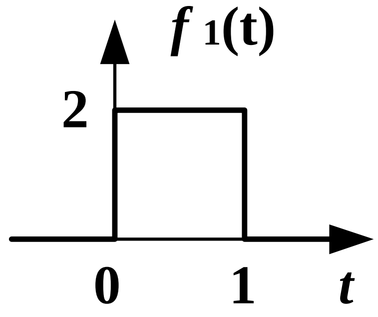
$f_1(t) * f_2(t) = \varepsilon(t) * f_2(t) - \varepsilon(t-2) * f_2(t)$

$\varepsilon(t) * f_2(t) = f_2^{(-1)}(t)$

利用时移特性，有 $\varepsilon(t-2) * f_2(t) = f_2^{(-1)}(t-2)$

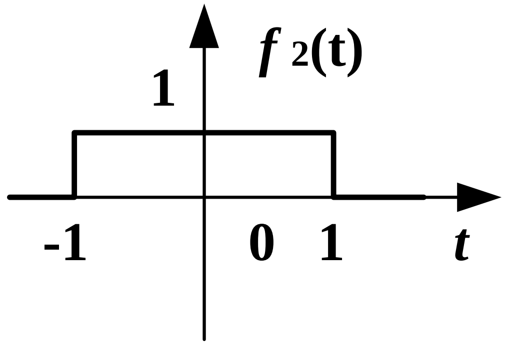
$f_1(t) * f_2(t) = (1-e^{-t})\varepsilon(t) - [1-e^{-(t-2)}]\varepsilon(t-2)$

例：$f_1(t), f_2(t)$如图，求$f_1(t)* f_2(t)$



解：$f_1(t) = 2\,\varepsilon(t) - 2\,\varepsilon(t-1)$

$f_2(t) = \varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)$



$$f_1(t)* f_2(t)$$

$$= 2\,\varepsilon(t)*\varepsilon(t+1) - 2\,\varepsilon(t)*\varepsilon(t-1)$$

$$-2\,\varepsilon(t-1)*\varepsilon(t+1) - 2\,\varepsilon(t-1)*\varepsilon(t-1)$$

由于 $\varepsilon(t)*\varepsilon(t) = t\,\varepsilon(t)$

据时移特性，有

$$f_1(t)* f_2(t) = 2\,(t+1)\,\varepsilon(t+1) - 2\,(t-1)\,\varepsilon(t-1)$$

$$-2\,t\,\varepsilon(t) - 2\,(t-2)\,\varepsilon(t-2)$$

常见的卷积公式

$$K * f(t) = K \bullet [f(t)\text{波形的净面积值}]$$

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

$$f(t) * \delta'(t) = f'(t) * \delta(t) = f'(t)$$

$$f(t) * \varepsilon(t) = f(t) * \delta^{(-1)}(t) = f^{(-1)}(t) * \delta(t) = f^{(-1)}(t)$$

$$\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = t\varepsilon(t)$$

$$e^{-at}\varepsilon(t) * e^{-at}\varepsilon(t) = te^{-at}\varepsilon(t)$$

$$e^{-a_1 t}\varepsilon(t) * e^{-a_2 t}\varepsilon(t) = \frac{1}{a_2 - a_1}(e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t})\varepsilon(t) \qquad (a_1 \neq a_2)$$

$$\varepsilon(t) * e^{-at}\varepsilon(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\varepsilon(t)$$

$$f(t) * \delta_T(t) = f(t) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t - mT)$$

五、相关函数

为比较某信号与另一延时 τ 的信号之间的相似度，需要引入相关函数的概念。相关函数是鉴别信号的有力工具，被广泛应用于雷达回波的识别，通信同步信号的识别等领域。相关函数也称为相关积分，它与卷积的运算方法类似。

实函数$f_1(t)$和$f_2(t)$，如为能量有限信号，它们之间的互相关函数定义为：

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\,f_2(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t+\tau)\,f_2(t)dt$$

$$R_{21}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)\,f_2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\,f_2(t+\tau)dt$$

可见，互相关函数是两信号之间时间差τ的函数。需要注意，一般$R_{12}(\tau)\neq R_{21}(\tau)$。不难证明，它们之间的关系是

$$\left.\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= R_{21}(-\tau) \\ R_{21}(\tau) &= R_{12}(-\tau) \end{aligned}\right\}$$

如果$f_1(t)$和$f_2(t)$是同一信号，即$f_1(t)=f_2(t)=f(t)$，这时无需区分R_{12}与R_{21}，用$R(\tau)$表示，称为自相关函数。即：

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)f(t)dt$$

容易看出，对自相关函数有：

$$R(\tau)=R(-\tau)$$

可见，实函数$f(t)$的自相关函数是时移τ的偶函数。

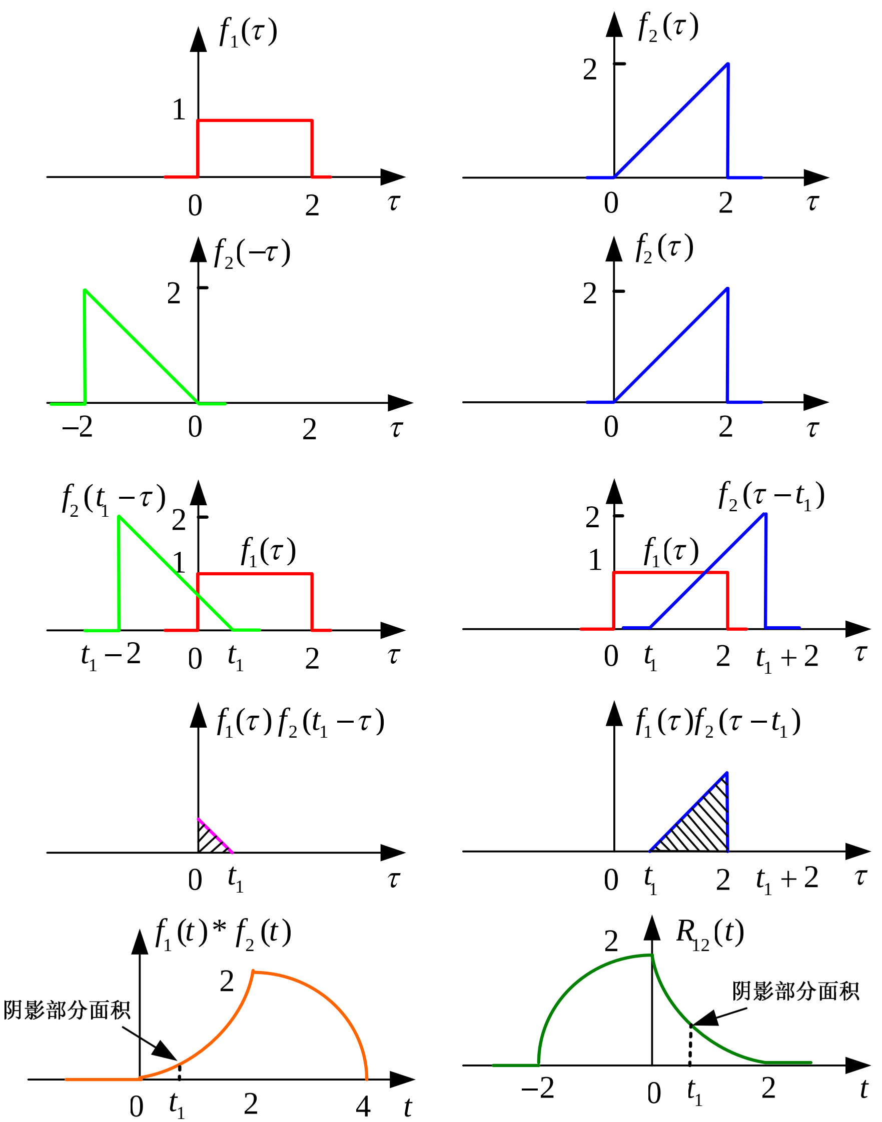
函数$f_1(t)$和$f_2(t)$卷积的表达式为：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

为了便于与互相关函数进行比较，我们将互相关函数定义式中的变量t和τ进行互换，可将实函数$f_1(t)$和$f_2(t)$的互相关函数写为：

$$R_{12}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(\tau-t)d\tau$$

比较以上两式可见，卷积积分和相关函数的运算方法有许多相似之处。两种运算的不同之处仅在于，卷积运算开始时需要将$f_2(\tau)$进行反折为$f_2(-\tau)$，而相关运算则不需反折，仍为$f_2(\tau)$。其他的移位、相乘和积分的运算方法相同。


$f_1(\tau)$
1
0
2
τ
$f_2(\tau)$
2
0
2
τ
$f_2(-\tau)$
2
−2
0
2
τ
$f_2(\tau)$
2
0
2
τ
$f_2(t_1-\tau)$
2
1
$f_1(\tau)$
t_1-2
0
t_1
2
τ
$f_2(\tau-t_1)$
2
1
$f_1(\tau)$
0
t_1
2
t_1+2
τ
$f_1(\tau)f_2(t_1-\tau)$
0
t_1
τ
$f_1(\tau)f_2(\tau-t_1)$
0
t_1
2
t_1+2
τ
$f_1(t)*f_2(t)$
2
阴影部分面积
0
t_1
2
4
t
$R_{12}(t)$
2
阴影部分面积
−2
0
t_1
2
t

(a) 卷积 (b) 相关

根据卷积的定义

$$f_1(t) * f_2(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2[-(t-\tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\tau - t)d\tau$$

可见

$$R_{12}(t) = f_1(t) * f_2(-t)$$

由上式可知，若$f_1(t)$和$f_2(t)$均为实偶函数，则卷积与相关完全相同。

求卷积是本章的重点与难点。

求解卷积的方法可归纳为：

（1）利用定义式，直接进行积分。对于容易求积分的函数比较有效。如指数函数，多项式函数等。

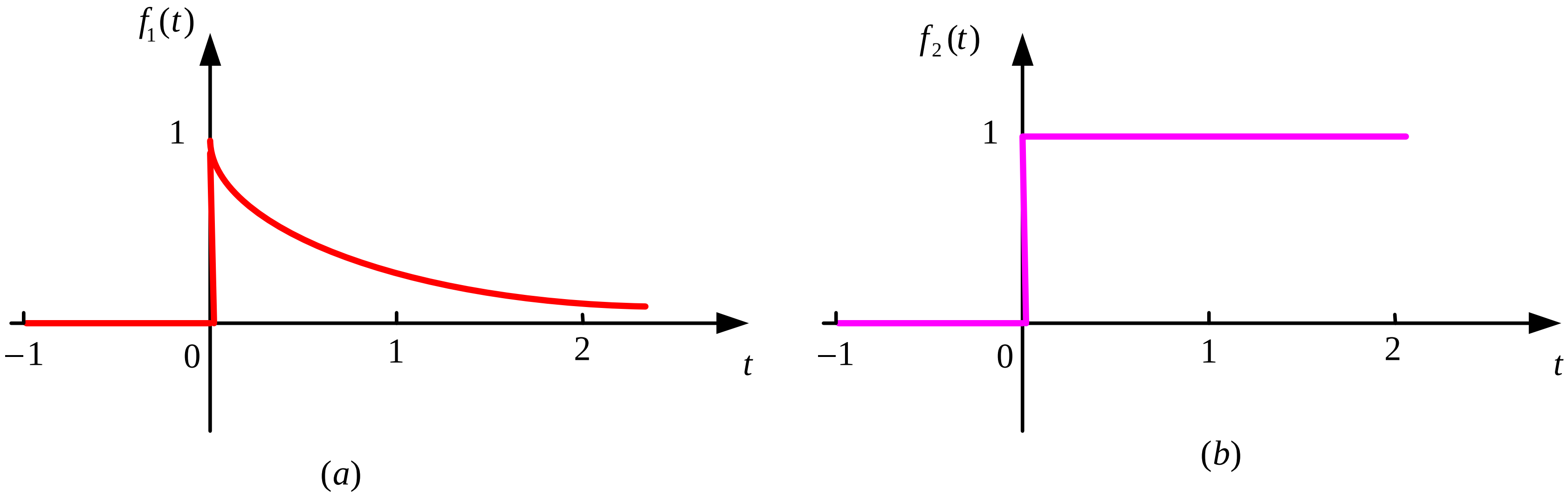
（2）图解法。特别适用于求某时刻点上的卷积值。

（3）利用性质。比较灵活。

三者常常结合起来使用。

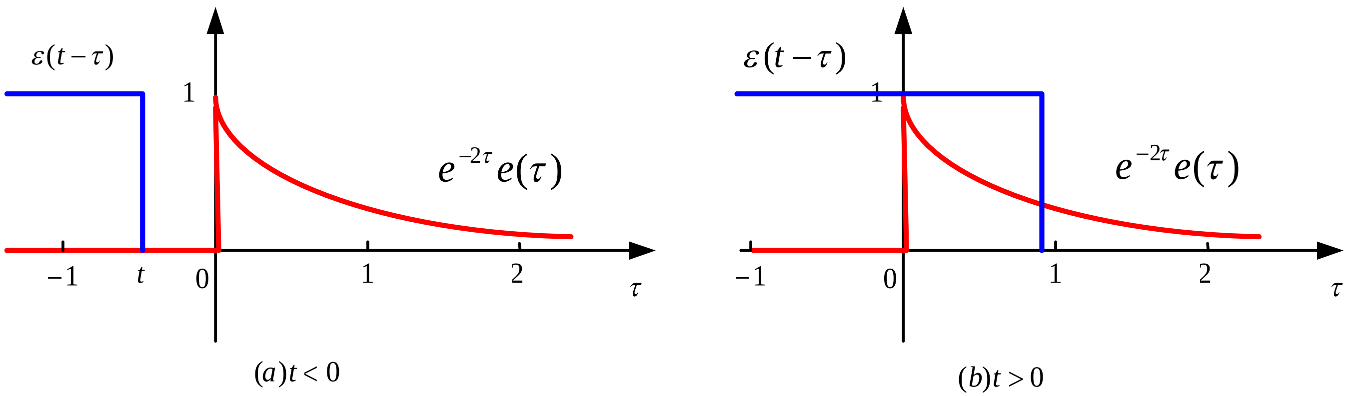
例 求下列函数的卷积积分。

（1） $f_1(t)=e^{-2t}\varepsilon(t),\ f_2(t)=\varepsilon(t)$。求卷积积分 $f_1(t)*f_2(t)$



解法I（定义）：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\tau}\varepsilon(\tau)\bullet\varepsilon(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{-2\tau}d\tau\bullet\varepsilon(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$$



解法II(图解)：

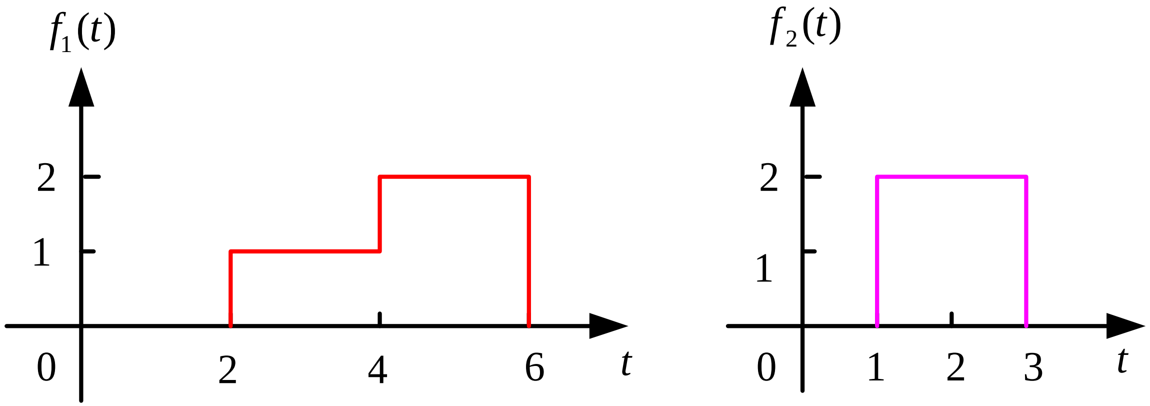
$$f_1(t)*f_2(t)=\begin{cases}\int_0^t e^{-2\tau}d\tau=\dfrac{1}{2}(1-e^{-2t}) & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

解法III(性质)： $f_1(t)*f_2(t)=\varepsilon(t)*e^{-2t}\varepsilon(t)=\delta(t)*[e^{-2t}\varepsilon(t)]^{(-1)}$

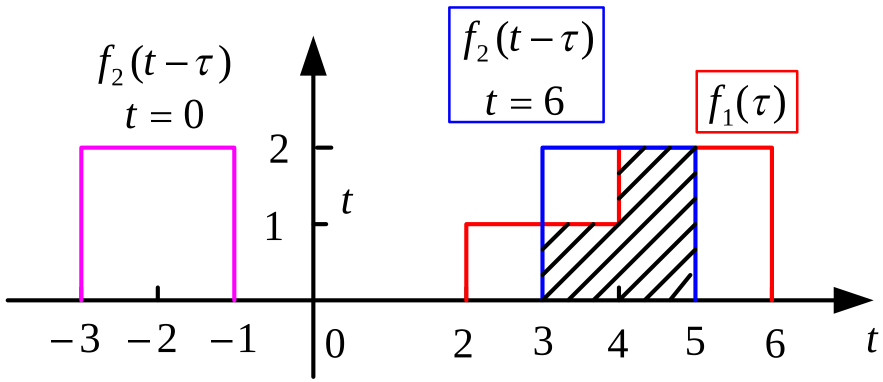
$$=[e^{-2t}\varepsilon(t)]^{(-1)}=\int_{-\infty}^{t}e^{-2\tau}\varepsilon(\tau)d\tau=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

解法IV(常用公式)： $f_1(t)*f_2(t)=\varepsilon(t)*e^{-2t}\varepsilon(t)=\dfrac{1}{2}(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$

(2) 信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的波形如图所示，设 $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$，则 $y(6)$ 等于



解:



$$y(6) = 2\times1\times1 + 2\times2\times1 = 6$$

2.5* P算子分析法

一、微分算子及系统的描述

LTI连续系统用线性常系数微分方程描述。

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t)$$
$$= b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 f^{(1)}(t) + b_0 f(t)$$

1、微分算子的定义

微分算子：$P \triangleq \dfrac{d}{dt}$ $\quad P^n \triangleq \dfrac{d^n}{dt^n}$

积分算子：$\dfrac{1}{P} \triangleq \int_{-\infty}^{t} (\ldots)\, d\tau$

注意：这里的P只是代表微分运算的一个算子（1/P是代表积分运算），P并不是变量。

例1：$Pf(t)=\dfrac{d}{dt}f(t)$

$$P^n f(t)=\frac{d^n}{dt^n}f(t)$$

$$\frac{1}{P}f(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

例2：$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+5f(t)$

微分算子方程：

$$P^2y(t)+3Py(t)+2y(t)=2Pf(t)+5f(t)$$

或：$(P^2+3P+2)y(t)=(2P+5)f(t)$

2. 微分算子的性质（规定）：

（1）P的正幂多项式可以因式分解；

例： $(P^2+3P+2)y(t)=(2P^2+P)f(t)$

可表示为：$(P+1)(P+2)y(t)=P(2P+1)f(t)$

（2）设A(P)、B(P)为P的正幂多项式；

则： $A(P)B(P)=B(P)A(P)$

（3）微分算子方程两边的公因子不能随意消去；

例： $Py(t)=Pf(t)$，不等于 $y(t)=f(t)$

$(P+1)(P+2)y(t)=(P+2)(P+3)f(t)$，不等于 $(P+1)y(t)=(P+3)f(t)$

(4) A(P)、B(P)、D(P)为P的正幂多项式：

$$D(P)\bullet\left[\frac{A(P)}{D(P)\bullet B(P)}\right]f(t)=\frac{A(P)}{B(P)}f(t)$$

但 $$\frac{A(P)}{B(P)\bullet D(P)}[D(P)f(t)]\neq\frac{A(P)}{B(P)}f(t)$$

例： $$P\left[\frac{1}{P}f(t)\right]=f(t)$$

但 $$\frac{1}{P}[Pf(t)]\neq f(t)$$

3、系统的传输算子：

演示

（1）微分算子方程：

二阶系统微分方程：$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_2f''(t)+b_1f'(t)+b_0f(t)$

二阶系统微分算子方程：$(P^2+a_1P+a_0)y(t)=(b_2P^2+b_1P+b_0)f(t)$

系统传输算子：

令 $A(P)=P^2+a_1P+a_0,\quad B(P)=b_2P^2+b_1P+b_0$

则 $A(P)y(t)=B(P)f(t),\quad y(t)=\dfrac{B(P)}{A(P)}f(t)=H(P)f(t)$

$$H(P)=\frac{B(P)}{A(P)}=\frac{b_2P^2+b_1P+b_0}{P^2+a_1P+a_0}$$

H(P)称为系统的传输算子。

对n阶系统的微分方程：

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0y(t)=b_mf^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_0f(t)$$

微分算子方程：

$$\left(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_0\right)y(t)=\left(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_0\right)f(t)$$

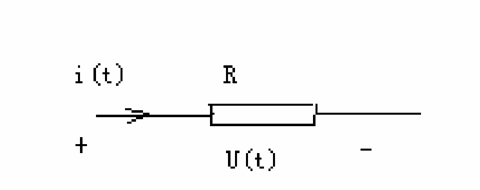
传输算子：

$$H(P)=\frac{B(P)}{A(P)}=\frac{b_mP^m+b_{m-1}P^{m-1}+\cdots+b_0}{P^n+a_{n-1}P^{n-1}+\cdots+a_0}$$

4. RLC微分算子方程的建立：

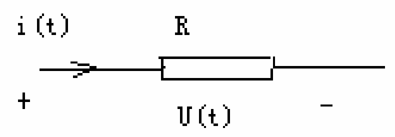
（1） R、L、C元件的算子模型：

R：



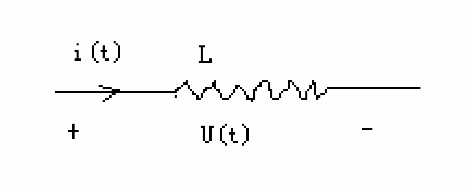
$$U(t)=Ri(t)$$

算子模型：



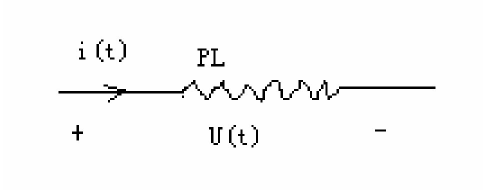
$$U(t)=Ri(t)$$

L：



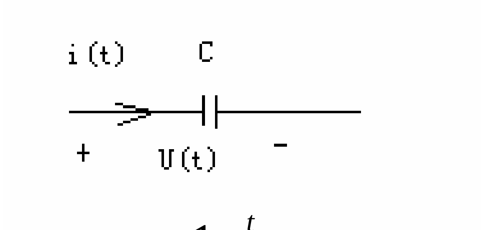
$$U(t)=L\frac{d}{dt}i(t)$$

算子模型：



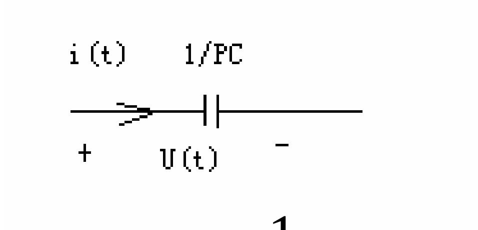
$$U(t)=pLi(t)$$

C：



$$U(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau$$

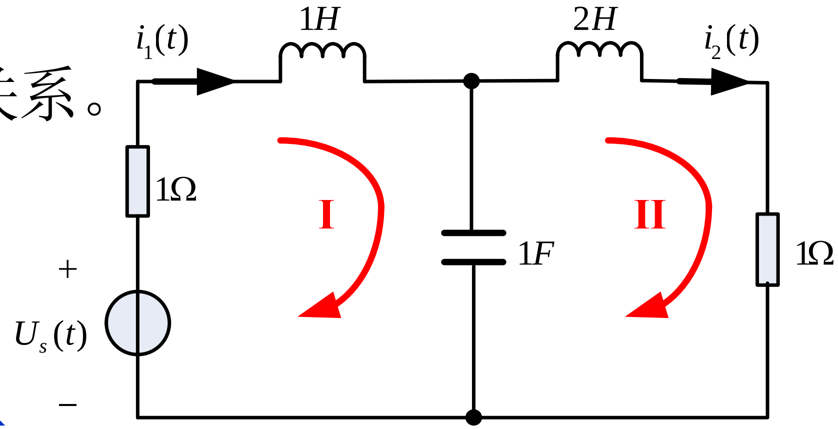
算子模型：



$$U(t)=\frac{1}{pC}i(t)$$

（2）系统微分算子方程的建立：

例1：求$i_1(t)$与$U_s(t)$和$i_2(t)$与$U_s(t)$的关系。



解：建立系统微分算子方程的方法：

把R, PL, 1/PC看成阻抗，用正弦稳电路分析法中所采用的网孔分析法，节点分析法，阻抗分析法，戴维南定理等建立系统微分算子方程。以下用网孔分析法建立方程：

$$\begin{cases}(1+P+\dfrac{1}{P})i_1(t)-\dfrac{1}{P}i_2(t)=U_s(t)\\ -\dfrac{1}{P}i_1(t)+(2P+\dfrac{1}{P}+1)i_2(t)=0\end{cases}$$

令变量为$\frac{1}{P}i_1(t),\frac{1}{P}i_2(t)$得：

$$\begin{cases}(P^2+P+1)[\frac{1}{P}i_1(t)]-[\frac{1}{P}i_2(t)]=U_s(t)\\ -[\frac{1}{P}i_1(t)]+(2P^2+P+1)[\frac{1}{P}i_2(t)]=0\end{cases}$$

用克莱姆法则解得：

$$\frac{1}{P}i_1(t)=\frac{2P^2+P+1}{P(2P^3+3P^2+4P+2)}U_s(t)\ ,\qquad \frac{1}{P}i_2(t)=\frac{1}{P(2P^3+3P^2+4P+2)}U_s(t)$$

$$i_1(t)=\frac{2P^2+P+1}{2P^3+3P^2+4P+2}U_s(t)\ ,\qquad i_2(t)=\frac{1}{2P^3+3P^2+4P+2}U_s(t)$$

$$H_1(P)=\frac{2P^2+P+1}{2P^3+3P^2+4P+2}\ ,\qquad H_2(P)=\frac{1}{2P^3+3P^2+4P+2}$$

$$(2P^3+3P^2+4P+2)i_1(t)=(2P^2+P+1)U_s(t)$$

$$(2P^3+3P^2+4P+2)i_2(t)=U_s(t)$$

二、零输入响应的求解

1、零输入响应的方程

设二阶系统的方程为:

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_1f'(t)+b_0f(t)$$

算子方程为:

$$(P^2+a_1P+a_0)y(t)=(b_1P+b_0)f(t)$$

传输算子:

$$H(P)=\frac{B(P)}{A(P)}=\frac{b_1P+b_0}{P^2+a_1P+a_0}$$

零输入响应 $y_x(t)$ 满足的算子方程：

$$(P^2 + a_1 P + a_0) y_x(t) = 0$$

或 $A(P) y_x(t) = 0$

2、零输入响应 $y_x(t)$的计算： 设初始时刻 $t_0 = 0$

（1）简单情况 1： $A(P) = P - \lambda$ （λ 为常数）

$y_x(t)$的方程： $(P - \lambda) y_x(t) = 0$

$$y_x'(t) - \lambda y_x(t) = 0$$

上式两边乘以$e^{-\lambda t}$得： $e^{-\lambda t} y_x'(t) - \lambda e^{-\lambda t} y_x(t) = 0$

即：$$\frac{d}{dt}[y_x(t)e^{-\lambda t}] = 0$$

上式两边积分：

$$\int_{0_-}^{t}\frac{d}{dt}[y_x(t)e^{-\lambda t}]dt = \int_{0_-}^{t} d[y_x(t)e^{-\lambda t}] = 0$$

得：$$y_x(t)e^{-\lambda t}\Big|_{0_-}^{t} = 0$$

$$y_x(t)e^{-\lambda t} = y_x(0_-) \qquad t \geq 0$$

所以：$$y_x(t) = y_x(0_-)e^{\lambda t} = C_0 e^{\lambda t}$$

（2）简单情况2： $A(P)=(P-\lambda)^2$

$y_x(t)$的方程：　$(P-\lambda)^2 y_x(t)=0$

即：$(P-\lambda)(P-\lambda)y_x(t)=0$　——— ①

令 $y_{x1}(t)=(P-\lambda)y_x(t)$ ，则　$y_{x1}(t)=C_1e^{\lambda t}$

得：$(P-\lambda)y_x(t)=C_1e^{\lambda t}$

即：$y_x{}'(t)-\lambda y_x(t)=C_1e^{\lambda t}$

上式两边乘以 $e^{-\lambda t}$，得：$\dfrac{d}{dt}[e^{-\lambda t}y_x(t)]=C_1$

对上式积分：$e^{-\lambda t}y_x(t)\big|_{0\_}^{t}=C_1t$　，　$e^{-\lambda t}y_x(t)=y_x(0\_)+C_1t$

所以： $y_x(t)=[y_x(0\_)+C_1t]e^{\lambda t}=(C_0+C_1t)e^{\lambda t}$，　$t\geq 0$

推论：$A(P)=(P-\lambda)^r$　即 $(P-\lambda)^r y_x(t)=0$

$$y_x(t)=(C_0+C_1t+C_2t^2+\cdots+C_{r-1}t^{r-1})e^{\lambda t},\quad t\geq 0$$

（3）一般情况：

例：$A(P)=(P-\lambda_1)(P-\lambda_2)^2$

$$(P-\lambda_1)(P-\lambda_2)^2 y_x(t)=0$$

设 $(p-\lambda_1)y_{x(t)}=0$　解为 $y_{1x}(t)=C_0e^{\lambda_1 t}$

即：$A(P)y_{1x}(t)=0$

设 $(P-\lambda_2)^2 y_x(t)=0$　解为 $y_{2x}(t)=(C_1+C_2t)e^{\lambda 2t}$

则 $(P-\lambda_1)(P-\lambda_2)^2 y_{2x}(t)=0$　即：$A(P)[y_{2x}(t)]=0$

所以：$y_x(t)=y_{1x}(t)+y_{2x}(t)=C_0e^{\lambda_1 t}+(C_1+C_2t)e^{\lambda_2 t}$，$t\geq 0$

求零输入响应 $y_x(t)$ 的一般方法：

设 $y_x(t)$ 的微分算子方程为：$A(P)y_x(t)=0$

第一步 对A(P)进行因式分解；
第二步 求每个因式对应的零输入响应；
第三步 $y_x(t)$ 等于各因式对应的零输入响应之和；
第四步 用初始条件确定系数。

n 阶系统 $y_x(t)$ 的系数：$C_0, C_1, \cdots, C_{n-1}$

n 阶系统 $y_x(t)$ 的初始条件：$y_x(0_-), y_x'(0_-), \cdots, y_x^{(n-1)}(0_-)$

三、 LTI 连续系统的初始条件

初始时刻 $t_0=0$

$$y(t)=y_x(t)+y_f(t)$$

$$\begin{cases} y(0_+)=y_x(0_+)+y_f(0_+) \\ y^{(j)}(0_+)=y_x^{(j)}(0_+)+y_f^{(j)}(0_+) \end{cases} \qquad \begin{cases} y(0_-)=y_x(0_-)+y_f(0_-) \\ y^{(j)}(0_-)=y_x^{(j)}(0_-)+y_f^{(j)}(0_-) \end{cases}$$

对因果系统，因果输入：当t<0时，***f*(*t*) =0.**

有：
$$\begin{cases} y_f(0_-) = 0 \\ y_f^{(j)}(0_-) = 0 \end{cases}$$

所以：
$$\begin{cases} y(0_-) = y_x(0_-) \\ y^{(j)}(0_-) = y_x^{(j)}(0_-) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_x(0_+) = y_x(0_-) \\ y_x^{(j)}(0_+) = y_x^{(j)}(0_-) \end{cases}$$

注意：零输入响应只与A（P）有关，与B（P）无关，故H(P)中分子与分母的公共因式不能相约。

四、零状态响应的求解

1、任意信号作用下的零状态响应

根据h(t)的定义： $\delta(t) \longrightarrow h(t)$

由时不变性： $\delta(t-\tau) \longrightarrow h(t-\tau)$

由齐次性： $f(\tau)\,\delta(t-\tau) \longrightarrow f(\tau)\,h(t-\tau)$

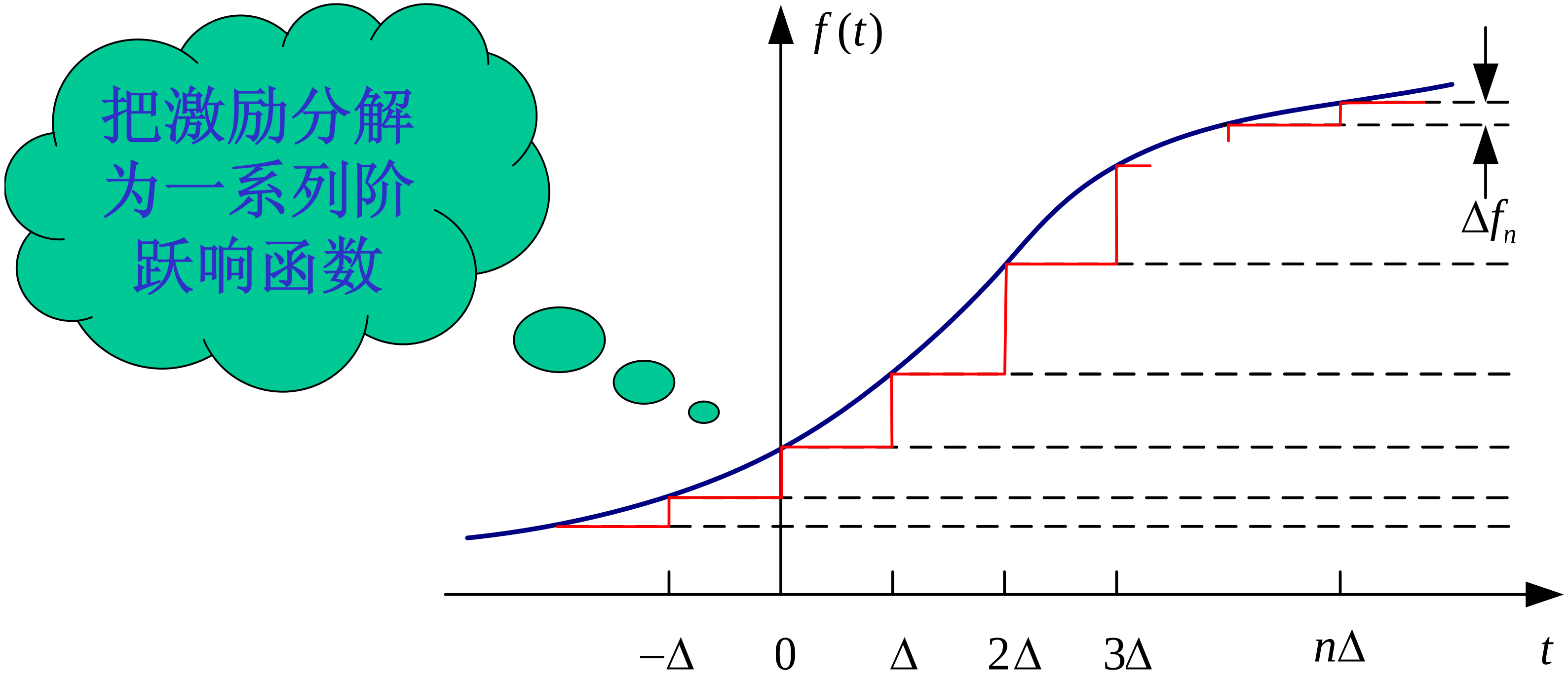
由叠加性： $\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=f(t)} \longrightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=y_f(t)}$

$$\boxed{y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)*h(t)}$$

卷积积分

2、零态响应的另一种计算公式

（1）信号的时域分解



$$\hat{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta f_n \bullet \varepsilon(t-n\Delta)\bullet=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{f[(n+1)\Delta]-f(n\Delta)}{\Delta}\bullet\varepsilon(t-n\Delta)\bullet\Delta$$

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(n\Delta) \bullet \varepsilon(t - n\Delta) \bullet \Delta$$

$$f(t) = \lim_{\Delta \to 0} \hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)\varepsilon(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)\varepsilon(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f'(t) * \varepsilon(t)$$

杜阿密尔积分

（2）任意信号作用下的零状态响应

根据g(t)的定义： $\varepsilon(t) \longrightarrow g(t)$

由时不变性： $\varepsilon(t-\tau) \longrightarrow g(t-\tau)$

由齐次性： $f'(\tau)\varepsilon(t-\tau) \longrightarrow f'(\tau)\,g(t-\tau)$

由叠加性： $\int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ f(t) & & y_f(t) \end{array}$$

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f'(t) * g(t)$$

杜阿密尔积分

五、由H(P)求h(t)

1、h(t)的方程

设二阶系统的方程为

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_2f''(t)+b_1f'(t)+b_0f(t)$$

$y_f(t)$ 的方程： $y_f''(t)+a_1y_f'(t)+a_0y_f(t)=b_2f''(t)+b_1f'(t)+b_0f(t)$

h(t)的方程： $h''(t)+a_1h'(t)+a_0h(t)=b_2\delta''(t)+b_1\delta'(t)+b_0\delta(t)$

对n阶因果系统： $h(0_-)=h'(0_-)=\cdots=h^{(n-1)}(0_-)=0$

系统的传输算子：

$$H(P)=\frac{B(P)}{A(P)}=\frac{b_2P^2+b_1P+b_0}{P^2+a_1P+a_0},\qquad h(t)=\frac{b_2P^2+b_1P+b_0}{P^2+a_1P+a_0}\delta(t)=H(P)\delta(t)$$

2　由H(P)求h(t)

(1)简单情况1：$H(P)=\dfrac{K}{P-\lambda}$，$K$，$\lambda$ 为常数

$$h(t)=\frac{K}{P-\lambda}\delta(t),\quad (P-\lambda)h(t)=K\delta(t)\qquad h'(t)-\lambda h(t)=K\delta(t)$$

上式乘以 $e^{-\lambda t}$，得：$e^{-\lambda t}h'(t)-\lambda e^{-\lambda t}h(t)=ke^{-\lambda t}\delta(t)=K\delta(t)$

即：$\dfrac{d}{d(t)}[e^{-\lambda t}h(t)]=K\delta(t)$

上式两边积分：$\displaystyle\int_{0^-}^{t}\frac{d}{dt}[e^{-\lambda t}h(t)]dt=\int_{0^-}^{t}K\delta(t)dt=K\varepsilon(t)$

即：$e^{-\lambda t}h(t)\big|_{0^-}^{t}=K\varepsilon(t),\quad h(0\_)=0,\qquad e^{-\lambda t}h(t)=K\varepsilon(t)$

$$\therefore\qquad h(t)=Ke^{\lambda t}\varepsilon(t)$$

即：$H(P)=\dfrac{K}{P-\lambda}$ ⟹ $h(t)=Ke^{\lambda t}\varepsilon(t)$

(2) 简单情况2： $H(P)=\dfrac{K}{(P-\lambda)^2}$

$$(P-\lambda)(P-\lambda)h(t)=K\delta(t)$$

设 $(P-\lambda)h_1(t)=K\delta(t)$ 则 $h_1(t)=Ke^{\lambda t}\varepsilon(t)$

得 $$h_1(t)=(P-\lambda)h(t)=Ke^{\lambda t}\varepsilon(t)$$

上式两边乘以$e^{-\lambda t}$得：$\dfrac{d}{dt}[e^{-\lambda t}h(t)]=K\varepsilon(t)$

上式积分得：$e^{-\lambda t}h(t)\big|_{0^-}^{t}=Kt\varepsilon(t)$， $e^{-\lambda t}h(t)=Kt\varepsilon(t)$

∴ $H(P)=\dfrac{K}{(P-\lambda)^2}$ ⟹ $h(t)=Kte^{\lambda t}\varepsilon(t)$

推论： $H(P)=\dfrac{K}{(P-\lambda)^r}$ ⟹ $h(t)=\dfrac{K}{(r-1)!}t^{r-1}e^{\lambda t}\varepsilon(t)$

(3) 简单情况3：$H(P)=KP^n$ → $h(t)=K\delta^{(n)}(t)$

证明：$h(t)=H(P)\delta(t)=KP^n\delta(t)=K\delta^{(n)}(t)$

(4)一般情况：

例： 设$H(P)=\dfrac{K_1}{(P-\lambda_1)}+\dfrac{K_2}{(P-\lambda_2)^2}$

$$h(t)=H(P)\delta(t)=\frac{K_1}{(P-\lambda_1)}\delta(t)+\frac{K_2}{(P-\lambda_2)^2}\delta(t)=h_1(t)+h_2(t)$$

$$h_1(t)=\frac{K_1}{P-\lambda_1}\delta(t),\quad h_2(t)=\frac{K_2}{(P-\lambda_2)^2}\delta(t)$$

由情况1，情况2得： $h_1(t)=K_1e^{\lambda_1 t}\varepsilon(t)$， $h_2(t)=K_2te^{\lambda_2 t}\varepsilon(t)$

$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)=K_1e^{\lambda_1 t}\varepsilon(t)+K_2te^{\lambda_2 t}\varepsilon(t)$$

求h(t)的一般方法： (先用长除法将H(p)先化为真分式)

第一步：对H(P)进行部分分式展开；

第二步：分别求出个分式对应的冲激响应；

第三步：h(t)等于各分式对应的冲激响应之和。

3．有理分式的部分分式展开 H(P)为有理真分式

（1）H(P)的极点为单极点：

$$H(P)=\frac{B(P)}{A(P)}=\frac{B(P)}{(P-\lambda_1)(P-\lambda_2)\cdots(P-\lambda_n)}$$

$$=\frac{K_1}{P-\lambda_1}+\frac{K_2}{P-\lambda_2}+\cdots+\frac{K_n}{P-\lambda_n}$$

$$K_i=H(P)(P-\lambda_i)|_{P=\lambda_i}\text{，}\quad i=1,2,\cdots,n$$

（2）H(P)的极点为重极点：

$$H(P)=\frac{B(P)}{A(P)}=\frac{B(P)}{(P-\lambda_1)^r}=\frac{K_{1r}}{(P-\lambda_1)^r}+\frac{K_{1r-1}}{(P-\lambda_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{11}}{P-\lambda_1}$$

$$K_{1i}=\frac{1}{(r-i)!}[H(P)(P-\lambda_1)^r]^{(r-i)}|_{P=\lambda_1}\text{，}\quad i=r,r-1,\cdots,1$$

（3）H(P)的极点为单极点和重极点：

例： $$H(P)=\frac{B(P)}{(P-\lambda_1)(P-\lambda_2)(P-\lambda_3)^3}=\frac{K_1}{P-\lambda_1}+\frac{K_2}{P-\lambda_2}+\frac{K_{13}}{(P-\lambda_3)^3}+\frac{K_{12}}{(P-\lambda_3)^2}+\frac{K_{11}}{(P-\lambda_3)}$$

$$K_i=H(P)(P-\lambda_i)|_{P=\lambda_i}\text{，}\quad i=1,2$$

$$K_{1i}=\frac{1}{(r-i)!}[H(P)(P-\lambda_3)^r]^{(r-i)}|_{P=\lambda_3}\text{，}\quad i=3,2,1$$

例1： $H(P)=\dfrac{P^2}{P^2+3P+2}$ ，求 $h(t)$

解： $H(P)=\dfrac{P^2}{P^2+3P+2}=1-\dfrac{3P+2}{P^2+3P+2}$ ， $\dfrac{3P+2}{P^2+3P+2}=\dfrac{3P}{(P+1)(P+2)}=\dfrac{K_1}{P+1}+\dfrac{K_2}{P+2}$

$K_1=H(P)(P+1)|_{P=-1}=\dfrac{3P+2}{P+2}|_{P=-1}=-1$ ， $K_2=H(P)(P+2)|_{P=-2}=\dfrac{3P+2}{P+1}|_{P=-2}=4$

∴ $H(P)=1+\dfrac{1}{P+1}-\dfrac{4}{P+2}$ ， $h(t)=\delta(t)+e^{-t}\varepsilon(t)-4e^{-2t}\varepsilon(t)$

例2： $H(P)=\dfrac{P}{(P+1)(P+2)^2}$ ，求 $h(t)$

解： $H(P)=\dfrac{K_1}{P+1}+\dfrac{K_{12}}{(P+2)^2}+\dfrac{K_{11}}{P+2}$

$K_1=H(P)(P+1)|_{P=-1}=-1$ ， $K_{12}=\dfrac{1}{(2-2)!}[H(P)(P+2)^2]^{(2-2)}|_{P=-2}=2$

$K_{11}=\dfrac{1}{(2-1)!}[H(P)(P+2)^2]^{(2-1)}|_{P=-2}=1$ ， $H(P)=\dfrac{-1}{P+1}+\dfrac{2}{(P+2)^2}+\dfrac{1}{P+2}$

∴ $h(t)=2te^{-2t}\varepsilon(t)+e^{-2t}\varepsilon(t)-e^{-t}\varepsilon(t)$

例3：已知连续系统的方程为：$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2f'(t)+3f(t)$

$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=1$，求 $y_x(t)$，$h(t)$

解：(1)求 $y_x(t)$：$y_x(0_+)=y(0_-)$，$y_x'(0_+)=y'(0_-)$

系统的算子方程：$(P^2+5P+6)y(t)=(2P+3)f(t)$

系统的传输算子：$H(P)=\dfrac{B(P)}{A(P)}=\dfrac{2P+3}{P^2+5P+6}$

$y_x(t)$的方程：$A(P)y_x(t)=0$，$(P+2)(P+3)y_x(t)=0$

$$y_x(t)=C_0e^{-2t}+C_1e^{-3t}\quad t\ge 0$$

由 $y_x(0_+)$，$y_x'(0_+)$ 确定系数 C_0，C_1：

$$\begin{cases}C_0+C_1=y_x(0_-)=2\\ -2C_0-3C_1=1\end{cases}\quad 得\quad \begin{cases}C_0=4\\ C_1=-2\end{cases}$$

$$\therefore y_x(t)=4e^{-2t}-2e^{-3t},\quad t\ge 0$$

(2) 求 $h(t)$

$$H(P)=\frac{2P+3}{(P+2)(P+3)}=\frac{-1}{P+2}+\frac{3}{P+3}\ ,\qquad h(t)=(3e^{-3t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$