

洛伦兹效应

气象学家洛伦兹 1963 年提出著名的“蝴蝶效应”
假说：一只南美洲亚马孙河流域热带雨林中的蝴蝶，偶尔扇动几下翅膀，可能在两周后引起美国得克萨斯的一场龙卷风

上述假说的依据是：蝴蝶翅膀的运动，导致其**身边**的空气系统发生了变化，并引起微弱气流的产生，而微弱气流的产生又会引起它**四周**空气或其他系统产生相应的变化，由此引起连锁反应，最终导致其他**系统**的极大变化。

洛伦兹效应

洛伦兹效应意义：事物发展的结果，对**初始条件**具有极为敏感的依赖性，初始条件若发生极小的偏差，就可能引起最终结果的极大差异

“蝴蝶效应”在社会学界常常被用来说明：一个坏的微小的机制，如果不加以及时的引导、调节，很可能会给社会带来非常大的危害，被戏称为“龙卷风”或“风暴”；一个好的微小的机制，只要正确指引，经过一段时间的努力，将会产生轰动效应，被称为“革命”

提问：洛伦兹效应对 L.P. 模型及其解的启发是？

第三章 线性规划敏感性分析和计算机解法

敏感性分析:

除最优解外, 为决策者提供有价值的**额外**信息
——当初始条件变化时(后), 系统稳定性

计算机求解:

解决具有两个以上变量的 L.P. 问题



第一节 敏感性分析介绍

一、概念

1、L.P. **一般式**——不失一般性将只讨论一般式

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

第一节 敏感性分析介绍

一、概念

2、什么是敏感性分析

最优后分析。就是在 L.P. 求出最优解之后，要研究：

- 1) 当 c_j 发生变化时，对最优解 x_j 的影响是什么？
- 2) 当 b_i 发生变化时，对最优解值 $z = \text{o.f.}$ 的影响是什么？

3、为什么要进行敏感性分析？

- 1) 现实世界是**动态变化**的，所有系数都会变化，如：市场变化，售价的变化将导致利润率的变化，进而导致目标函数之系数的变化
- 2) 有些数据是**可控**的，如：是否加班？将导致可用工时的变化
- 3) 不少模型中的数据本来就是估计的、**近似的**

对修正了的 L.P. 模型不再重新求解，也要有足够的信息回答上述变化所带来的影响——对最优解的影响，即：动态变化或近似估计允许的范围是什么？

第一节 敏感性分析介绍

二、（Par. 公司决策问题）实例

1、原问题及最优解

$$\text{Max } 10 x_1 + 9 x_2$$

s.t.

$$7/10 x_1 + x_2 \leq 630$$

$$1/2 x_1 + 5/6 x_2 \leq 600$$

$$x_1 + 2/3 x_2 \leq 708$$

$$1/10 x_1 + 1/4 x_2 \leq 135$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

最优解

$$x_1 = 540$$

$$x_2 = 252$$

第一节 敏感性分析介绍

二、实例

不稳定的解从时间逻辑上看没有意义

2、 c_j 变化与最优解 x_j

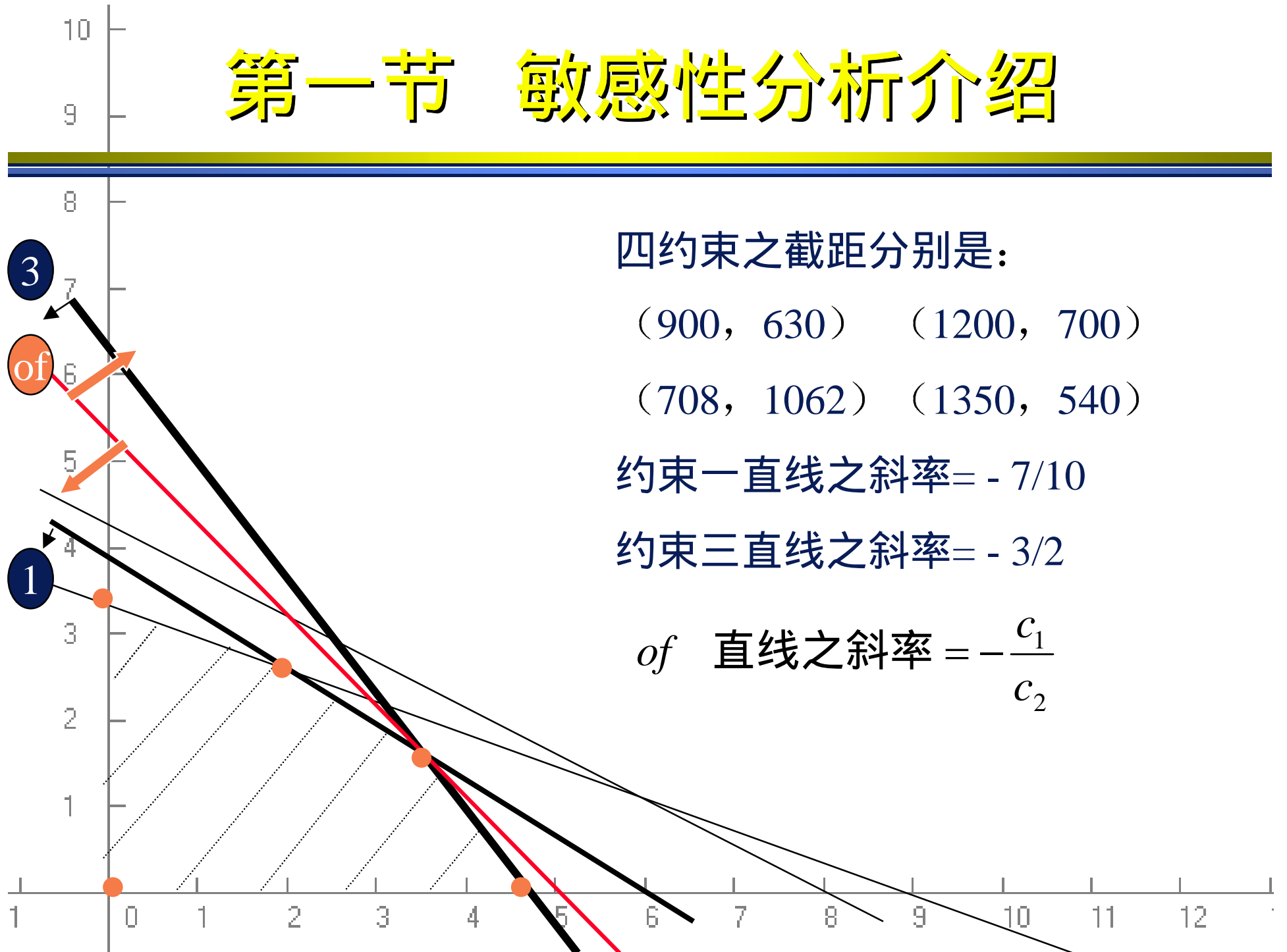
- 1) 若 $c_1 = 10$ 变成 7, 问: 最优解变化吗?
- 2) 若 c_2 在 $(5, 13)$ 变化时最优解不变, 如何评价 $c_2 = 9$?
- 3) 若仅当 $c_2 \in (8.9, 9.25)$ 时最优解不变, 超出这个范围哪怕一点点, 最优解就会变, 又如何评价 $c_2 = 9$?

3、 b_i 变化与最优解值 z

- 1) b_i 变化时, z 如何变化?
- 2) b_i 增加时, 附加工时的价值 $(z_2 - z_1)$ 是什么?

资源的
价值值得
度量

第一节 敏感性分析介绍



第二节 敏感性分析图解法

一、关于 c_j 的变化

1、**保优区域**的定义

使最优解不发生变化, c_j 的允许变化区间

注意: 只保最优解不变, 无法保证最优解**值**的稳定

2、 C_j 保优区域的几何求法

从直线斜率性质知:

$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{c_1}{c_2} = \text{目标函数直线斜率} \leq -\frac{7}{10}$$

故, c_j 的保优区域是:

令

$$c_2 = 9$$

$$6.3 \leq c_1 \leq 13.5$$

$$c_1 = 10$$

$$6.67 \leq c_2 \leq 14.29 \quad (\text{暂时不讨论**联立**变化})$$

第二节 敏感性分析图解法

一、关于 c_j 的变化

3、特殊情况时 C_1 的保优区域

改令

$$z = 18x_1 + 9x_2$$

则新最优解是

$$x_1 = 708$$

$$x_2 = 0$$

令 $c_2 = 9$ 从 $-\frac{c_1}{c_2} \leq -\frac{3}{2}$ 得下界 $c_1 \geq 13.5$

从 $-\frac{c_1}{c_2} > -\infty$ 得上界 $c_1 < +\infty$

即得 C_1 保优区域: $13.5 \leq C_1 < +\infty$

第二节 敏感性分析图解法

二、关于右手边值 b_i （资源）的变化

- 问题：
- 1) 可行域变化? ---- 一般要变
 - 2) 最优解变化? ---- 一般要变
 - 3) 最优解值增量的意义是什么?

1、实例

在 Par. 公司问题的第一个约束式中令 $b_1 = 640$

则因为可行域增大，最优解变成： $x_1 = 527.5$ ， $x_2 = 270.75$

$$\text{o.f.} = 7711.75$$

即：利润增加 $7711.75 - 7668 = 43.75 = \Delta z$

也即：4.375 / 工时（对 C&D 工序来说）。

第二节 敏感性分析图解法

二、关于右手边值 b_i （资源）的变化

2、影子价格的定义

约束条件右手边常数每**增加**一个单位时，目标函数 o.f. 所**增加**的数值成为影子价格

3、影子价格的意义

1) 加班费的依据——4.375 是 C&D 车间支付加班费的上限

2) 外包或对外揽活的依据——若对外加工的报酬在 4.375 之上，可以考虑节约出部分工时搞外加工，反之可考虑外包

3) 注意：（1）有些 b_i 变化对 o.f. 没有影响，故，任何不是可行域之限界的约束条件的影子价格 = 0，如 S 车间

（2）效用边际递减原理告诉我们：影子价格仅当 b_i 变化不大时有效，若 b_i 不断变化，则其他约束条件可能变成限界而使 o.f. 发生其他的变化。**问题：使影子价格有意义的范围是？**



第二节 敏感性分析图解法

二、关于右手边值 b_i （资源）的变化

4、 b_i 允许变化的区间

1) 对偶价格定义 (dual price)

b_i 每增加一个单位时, o.f. 的改善值

显然, 在 max 问题中, dual = shadow

在 min 问题中, dual = - shadow

2) b_i 可行区间 (range of feasibility) 定义

使对偶价格有效的区间称为 b_i 的可行区间

意义: 可行 ---- 就是要保证“对偶”有效, 即: 资源配置的增、减幅度应该控制在有效、可行范围内

问题: 如何求 b_i 的可行区间? —— 下面一节解决。

第三节 L.P. 计算机解法

一、“The Management Scientist” (MS) 软件简介

安装: Setup

二、MS 实例求解 (Par.公司问题)

1、分式还是小数? (保留小数点后 5 位)

$$\text{Max } 10x_1 + 9x_2$$

s.t.

$$0.7x_1 + x_2 \leq 630 \quad (\text{C\&D})$$

$$0.5x_1 + 0.8333x_2 \leq 600 \quad (\text{S})$$

$$x_1 + 0.66667x_2 \leq 708 \quad (\text{F})$$

$$0.1x_1 + 0.25x_2 \leq 135 \quad (\text{I\&P})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

第三节 L.P. 计算机解法

二、MS 实例求解

2、软件启动

开始 \ 程序 \ MS60

Select A Module

菜单操作即可

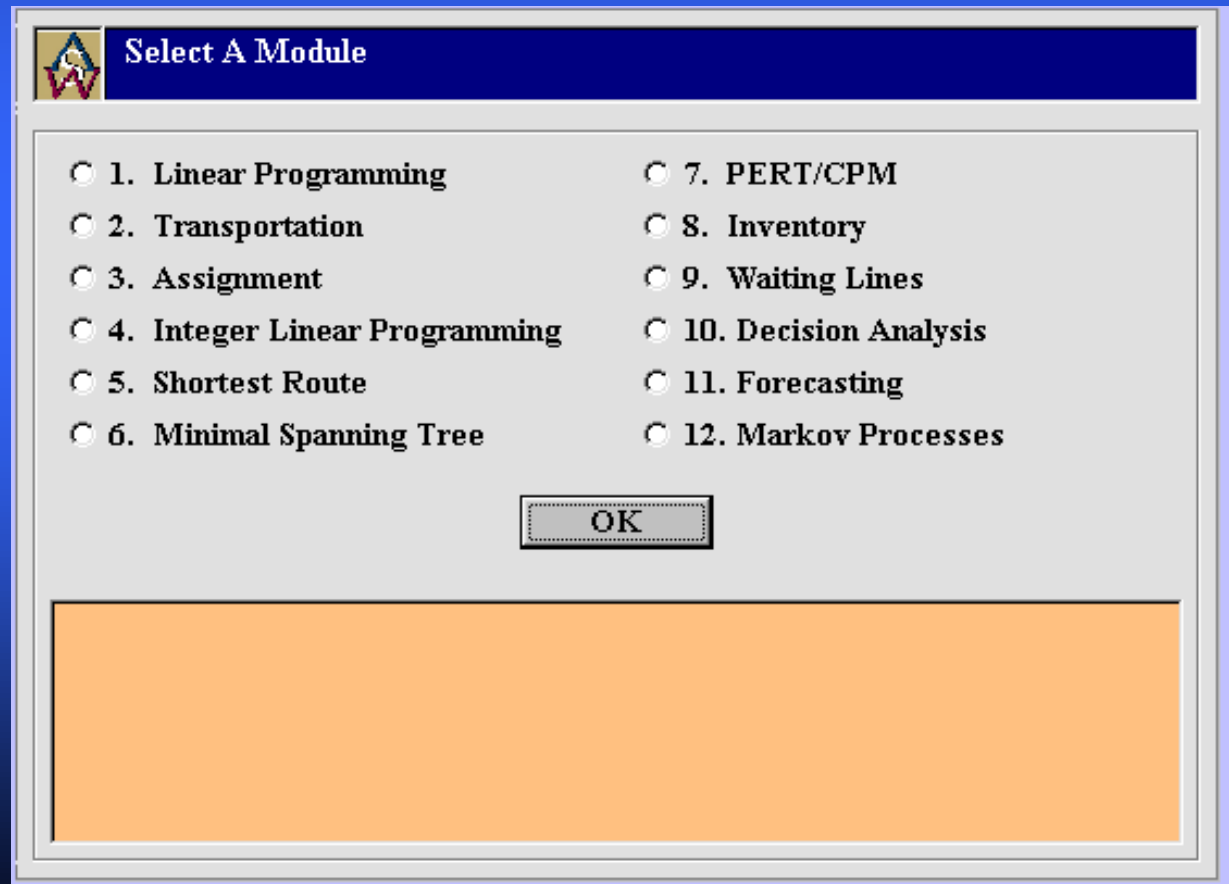
注意：

1) 非负约束

不要输入

2) “ \leq ” 约束

只要输入 “ $<$ ”。



第三节 L.P. 计算机解法

三、计算机输出信息的解释

Objective Function Value = 7667.99463

Variable	Value	Reduced Costs
x_1	539.99841	0.00000
x_2	252.00113	0.00000

Constraint	Slack/Surplus	Dual Prices
1	0.00000	4.37496
2	120.00000	0.00000
3	0.00000	6.93753
4	17.99988	0.00000



第三节 L.P. 计算机解法

Objective Coefficient Ranges

Variable	Lower Limit	Current Value	Upper
x_1	6.30000	10.00000	13.49993
x_2	6.66670	9.00000	14.28572

Right Hand Side Ranges

Constraint	Lower Limit	Current Value	Upper
1	495.59998	630.00000	682.36316
2	479.99930	600.00000	No Limit
3	580.00146	708.000000	900
4	117.00012	135.00000	No Limit



第三节 L.P. 计算机解法

1、最优解和缩减成本 (reduced costs)

对于每一个决策变量 x_j ，为使其在最优解中取得正数，其对应的 o.f. 之系数 c_j 所必须改变的值的

大小
此例中， $x_1 = 540 > 0$ ， $x_2 = 252 > 0$ ，故，对应缩减成本均为 0

2、松弛/剩余和对偶价格

界限约束 \longleftrightarrow slack = 0

非界限约束 \longleftrightarrow slack \neq 0

因为对偶价格是**改善**值，所以有松弛的约束式对偶价格 = 0

3、敏感性分析

1) c_j 保优区域 (Objective Coefficient Ranges) —— 使最优解有效的区间， $c_1 = 10 \in [6.3, 13.5]$

2) b_i 可行区间 (Right Hand Side Ranges) —— 使对偶价格有效的区间， $b_1 = 630 \in [495.6, 682.4]$



第三节 L.P. 计算机解法

4、关于联立变化

1) 计算机输出的结果中，并没有讨论联立变化

2) 讨论联立变化的 100%法则

若所有变化的百分比之和不超过100%，称此联立变化满足100%法则，此时，对偶价格依然保持有效

设 Par. 公司问题中第一、三约束同时发生变化 $b_1 = 630 \longrightarrow 650$

$b_3 = 708 \longrightarrow 808$

则，因为 b_1 / b_3 的可行区间分别是 $(495.6, 682.4) / (580, 900)$

按照公式

$$\sum \frac{\Delta b_i}{b_i \text{最大允许量} - b_i \text{原始值}}$$

得联立变化百分比是： $\frac{20}{682.4 - 630} + \frac{100}{900 - 708} = 90.27\% < 100\%$

故， b_1 和 b_3 的对偶价格仍然皆有效。

两个以上决策变量的 L.P. 问题例子

销售双工无线电联络系统问题

1、目标：利润最大

2、条件和约束

四种渠道：专业批发商 / 一般批发商 / 零售 / 邮购

不同渠道时：不同利润 / 不同广告成本 / 不同售后服务时间

资源和有关数据：

单位广告预算 10, 8, 9, 15, 可用总量：5000

单位服务时间 2, 3, 3, 0, 总可用时间：1800

已安排生产 600

第三渠道已签约 150

利润率 90 / 84 / 70 / 60

(建模课堂练习)



两个以上决策变量的 L.P. 问题例子

L.P. 模型

$$\max z = \max 90x_1 + 84x_2 + 70x_3 + 60x_4$$

s.t.

$$10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 15x_4 \leq 5000$$

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 1800$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 600$$

$$x_3 \geq 150$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



两个以上决策变量的 L.P. 问题例子

计算机输出结果的部分解释:

X_4 之 reduced cost = 45:

除非单位利润再增加 45, 达 $60+45=105$, 否则无法利用邮购渠道进行销售

第四约束 (已签约150单位) dual price = - 17:

每增加 1 单位签约量, 会使利润下降 17 单位

每减少 1 单位签约量, 会使利润上升 17 单位。

第三章小结

1、敏感性分析要解决：

- 目标函数中 C_j 的变化是否会使最优解发生变化？
—— 讨论解的**稳定性**，最有解是否有执行的意义
- 约束式右手边值 b_i 的变化会使最优解值的变化幅度有多大？ ---- 讨论解对资源的**弹性**，了解资源的价值

2、图解法只能解决有两个决策变量的 LP 模型，计算机程序可以帮助我们解决多变量问题，但，计算机的程序是如何写出来的呢？这需要了解单形法（一种特别有效的**算法**）

The End of Chapter 3

