

第十六章 Markov 过程

Markov 过程是随机过程重点研究对象之一

运动是世界存在的本质，我们所关注的事物、对象、目标等无不在变化中，且其中大多数处在**随机变化**中，如：消费偏好等

探讨随机运动的**趋势**、**可能的结果**，就是 Markov 过程的关注所在

本章重点：初步了解 Markov 过程在管理问题研究中的思路和方法

基本概念

1、Markov 过程研究什么？

虽然，在其任意一个时间点上随机运动系统的状态可能都无法完全地确定，如：17:00 时是否有剩余晚报？

但要研究：在连续的时间周期中，具有重复试验性质的系统之演变（趋势）之可能的结果，如：中午进货 100 份晚报，当天能卖完？其可能性是？

与概率论相比，两者都研究无法确定的事物，但概率论研究重点在特定时点上系统的状态本身，而 Markov 过程侧重于连续时间周期变化下系统状态的进化。

基本概念

2、用处举例

- 1) 机器在某个周期时处于正常运转状态，则在下一个周期是正常或不正常**状态之概率**是？
- 2) 顾客在某个周期购买 A 品牌则在下一个周期是**买 A** 还是**买 B** 品牌之概率是？
- 3) 顾客在某个周期进入 **A** 超市购物则在下一个周期进入 **A** 还是进入 **B** 超市之概率是？
- 4) 若将应收帐款按帐龄分为若干类，则在某一周期属于应收帐，在下一周期归于**呆帐**类的概率是？

基本概念

3、约定（Markov 过程本身具备较多知识，非本课程必要，只约定简单的应用）

1) 不详细讨论 Markov 过程本身，只用简单例子说明

2) 讨论将限制于——有**静态**转移概率的 Markov 链，即：

(1) 系统仅有**有限**个状态；

(2) 转移概率是**常数**；

(3) 某周期的状态概率**仅**决定于**紧前**周期的状态。

第一节 市场份额分析

研究方法说明：

因为 概率 \leftrightarrow 百分比

虽市场份额由全体顾客之购买行为所决定，但由于顾客数量通常很大，购买是一种大样本试验，若采用追踪其中**任意**一群顾客的连续购买之行为，不失一般性，可以被认为是对**总体**进行研究。所以，本节的“系统”常常指“任意一个顾客”。

第一节 市场份额分析

一、例子及术语介绍

1、例子

假定1: 在一个小镇上仅有两家杂货店 M 和 A;
即: 假定只有**两种**状态

假定2: 每位顾客每周只进行一次采购, 要么 M 要么 A
每周不会同时去两家

说明: 1) 多几家店无非多几种状态, 此处只为简便
2) 以周为周期仅仅是个习惯, 可取平均估计值

要研究的**问题:**

- 1) M 和 A 的**市场份额**各为多少?
- 2) 顾客对 M 和 A 的**忠实度**各为多少?
- 3) 如果市场份额低的某店要搞促销活动, 如何确定**预算**?

第一节 市场份额分析

2、术语

将采用跟踪（任意）某些顾客采购行为的方法

- 1) 试验——了解顾客的采购店，一个周期会有一个试验，也就有一个结果
- 2) 状态——某周期顾客选定不同店，称为系统的不同状态，此例中，约定：
 - 状态1：顾客在 **M** 店购物
 - 状态2：顾客在 **A** 店购物
- 3) 状态概率的意义——购物过程会延续下去，不管能得出什么结论都不可能事先确定试验结果，但若分别求出某特定周期时，顾客分别处在两个状态的概率足矣，因为市场份额即可估计得到。

第一节 市场份额分析

二、状态转移概率

利用 Markov 过程研究连续试验中不同**状态**的概率，最基本的是先求得：**转移概率**

1、调研与转移概率值

- 1) 市场调研：10 个星期内跟踪任意选定的 100 个人，采集他们的购物去向之数据
- 2) 数据处理：频率统计
- 3) 假设得出以下的：

		下一个周期去	
		M 店	A 店
当前周期去	M 店	0.9	0.1
	A 店	0.2	0.8

其中的数值称为**转移概率值**。



第一节 市场份额分析

二、状态转移概率

2、关于转移概率的说明

1) 行数据之和 = 1说明：是**概率分布**

2) 0.9 / 0.8——对 M / A 的**忠实度**

0.1 / 0.2——对 M / A 的**转移特征**

3) 在研究的时间段内，假定转移概率不会变，即：系统无大变化（商业环境、竞争手段等变化不大）

4) 转移概率值可通过统计数据获得。

第一节 市场份额分析

二、状态转移概率

3、转移概率矩阵

令： p_{ij} = 某周期 i 状态，下一个周期转移到 j 状态的概率

则称

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

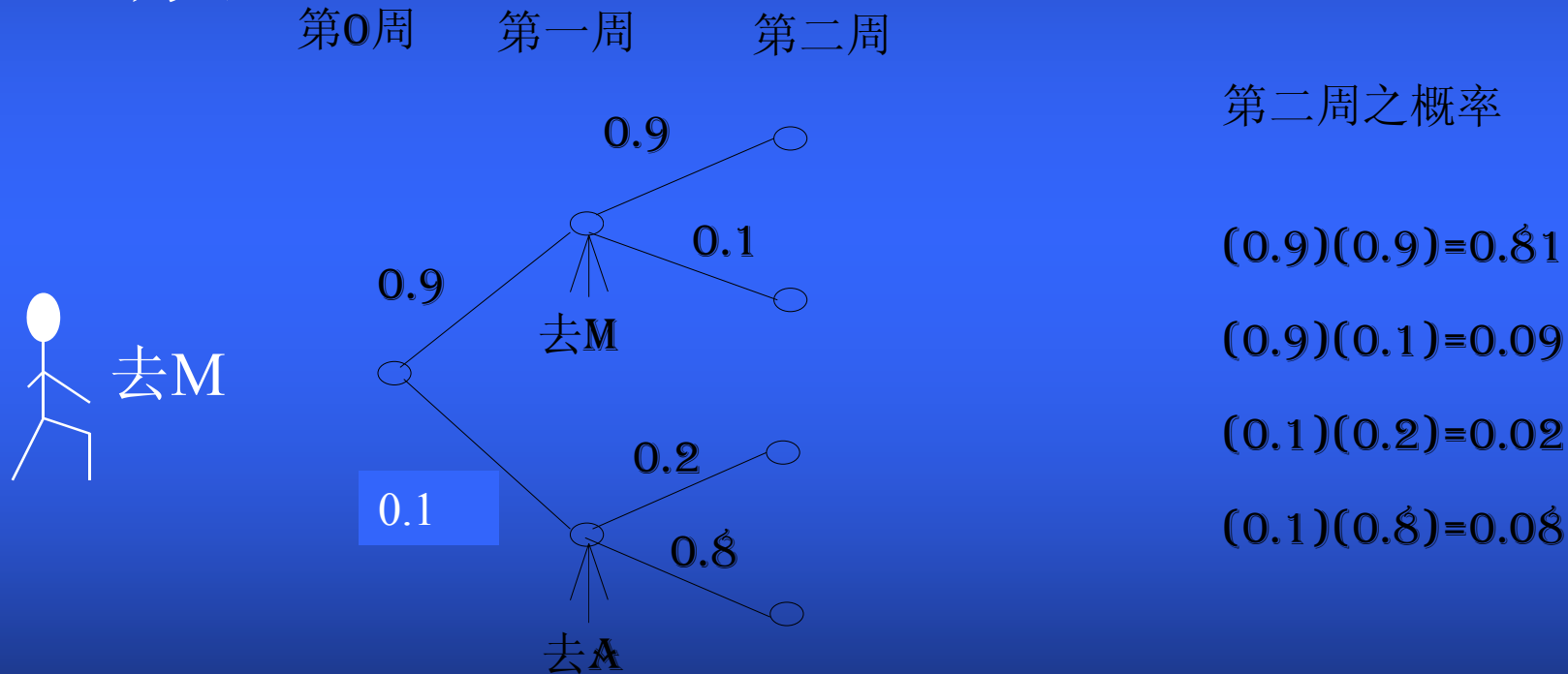
为转移概率矩阵

意义：由转移概率矩阵，即可求出系统从某状态向下一个状态转移的概率。

第一节 市场份额分析

三、利用**树形图**研究系统的演变——一种**直观**方法

1、方法



系统在第二周去 M (状态1)的概率: $0.81 + 0.02 = 0.83$

系统在第二周去 A (状态2) 的概率: $0.09 + 0.08 = 0.17$ 。

第一节 市场份额分析

三、利用树形图研究系统的演变

2、方法评价

- 1) 缺点：周期越往后，计算越繁难，不现实
- 2) 优点：方法直观，并启发了新的数学方法（数学是让问题变得简单的科学）（以下(☆)式即由此推导获得）——矩阵方法。

第一节 市场份额分析

四、矩阵运算研究系统的演变——代数方法

1、状态概率

1) 定义

$\pi_i(n)$ = 系统在第 n 周期时处于状态 i 概率，称为状态概率

2) 定义

形如 $[\pi_1(0) \ \pi_2(0)]$ 的向量称为状态概率向量

如： $[\pi_1(0) \ \pi_2(0)] = [1 \ 0]$ ——表示顾客上周（或 0 周期）是在 M 店购物的

$[\pi_1(n) \ \pi_2(n)]$ 则表示系统在 n 周期之状态概率向量

3) 符号定义

$[\pi_1(n) \ \pi_2(n)]$ 又记为 $\pi(n)$

第一节 市场份额分析

四、矩阵运算研究系统的演变

2、系统状态演变的递推公式

$$\pi(n+1) = \pi(n) P \quad (\star)$$

即：

$$\pi(\text{下一个周期}) = \pi(\text{当前周期}) P$$

3、系统的实际计算

1) 设 $\pi(0) = [\pi_1(0) \ \pi_2(0)] = [1 \ 0]$ —— 即第 0 周去 M 店

则

$$\pi(1) = \pi(0)P = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.9 \ 0.1)$$

$$\pi(2) = \pi(1)P = (0.9 \ 0.1) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.83 \ 0.17)$$

第一节 市场份额分析

四、矩阵运算研究系统的演变

反复利用公式(☆)，即可得如下表(一)

状态	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\pi_1(n)$	1	0.9	0.83	0.781	0.747	0.723	0.706	0.694	0.686	0.680	0.676
$\pi_2(n)$	0	0.1	0.17	0.219	0.253	0.277	0.294	0.306	0.314	0.320	0.324

2) 若令 $\pi(0) = [\pi_1(0) \ \pi_2(0)] = [0 \ 1]$ —— 即第 0 周去 A 店

则 $\pi(1) = \pi(0)P = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.2 \ 0.8)$ 得下表(二)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\pi_1(n)$	0	0.2	0.34	0.438	0.507	0.555	0.589	0.612	0.628	0.640	0.648
$\pi_2(n)$	1	0.8	0.66	0.562	0.493	0.445	0.411	0.388	0.372	0.360	0.352

第一节 市场份额分析

四、矩阵运算研究系统的演变

4、M 和 A 店的市场份额

从表一可见：

$$\pi_1(n) \rightarrow 2/3 = \pi_1$$

$$\pi_2(n) \rightarrow 1/3 = \pi_2$$

注意：从表二可以得到同样的结论！故，2/3 和 1/3 称为**稳定状态概率**

结论：若系统中有 6000 位潜在顾客，且系统不发生大的变化，则大约有 $2/3 = 4000$ 光顾 M 店， $1/3$ 会光顾 A 店，这就是两家店的市场份额之估计，而与系统的初始市场份额无关。

第一节 市场份额分析

五、促销策略的评价——以市场份额为基础

1、假设

- 1) A 店试图发起一轮广告攻势，以吸引更多的顾客；
- 2) 新促销策略有望使得转移概率（估计）值变成

	M	A	
M	0.85	0.15	——M 之忠实度下降
A	0.2	0.8	——A 之忠实度不变

- 3) 周人均利润为 10 元， 即：利润 = 10 元 / 人 / 周
- 4) 以 6000 人次为总顾客数（小镇的销售范围）。

第一节 市场份额分析

五、促销策略的评价

2、问题：

如何决定促销 (广告) 费用？

3、求新的稳定状态概率 (市场份额)

仍由递推公式： $\pi(n+1) = \pi(n) P$

得稳定概率： $\pi_1 = 0.57$

$$\pi_2 = 0.43$$

即：**A** 店的市场份额大约增加 **10%**。

第一节 市场份额分析

五、促销策略的评价

4、评价

原市场份额下，6000 人中大约有 2000 人在 A 店购物；新市场份额下，6000 人中大约有 2580 人在 A 店购物

故：可预期增加利润：5800 元——乃促销活动的预算之上限。

第二节 应收账款分析

零、概念

对应收帐款作出适当的**备抵**估计，是财会工作中常遇到的决策，特别是在财会年度结束之际 ---- 因为良性资产与不良资产其实是完全不同的概念

计算机财务软件在我国已得到了极大普及，若能对应收帐款利用计算机作出数量方面的分析，作出适当的备抵资金准备及信用策略决策，应是有益的工作。

第二节 应收账款分析

一、应收帐的分类——总平衡法 (total balance method)

1、帐龄

在各种财务制度中，西方企业通常是按帐龄对所有应收帐款进行分类，通常作法是：

第一类：已欠 0—**90** 天的应收帐，以下简称 **B** 类帐

第二类：已欠 91—**360** 天的应收帐，以下简称 **C** 类帐

第三类：已欠 361—**1080** 天的应收帐，以下简称 **D** 类帐

呆帐： 已欠 1080 天以上

2、约定 (帐龄之划分)

任一客户之欠款可能是多笔，是不同时间分别欠下的，但我们将其**总**欠款归入**最早**所欠款发生的时日之帐龄。

第二节 应收账款分析

一、应收帐的分类

3、帐龄的意义——为 Markov 介入铺路

随着时间推移，每一客户的总欠款量每天都会发生变化——**类别**变化，还款时也有数量变化——动态变化。即：对欠款而言，

每一个客户的每一元欠款都有一个状态

二、问题

A 百货店 12.31. 发现共有 500,000 元应收帐款，年度报告中需要估计：有多少最终可以收回，有多少最终会成为呆帐？以便在年度财务报告中为呆帐作出一个备抵。

第二节 应收账款分析

三、建立数学模型

1、状态

方法：追踪应收帐中的**任意**一元钱之变化

因为公司是连续运作的，所以可将每一天时间作为 Markov 过程的一个试验，则（每）一元钱欠款将动态地存在于下列五种状态之一中：

- 状态一：已付款 —— **吸收**状态
- 状态二：呆帐 —— **吸收**状态
- 状态三：B类帐
- 状态四：C类帐
- 状态五：D类帐

吸收：每一元钱只要转移到状态一或二时，就不可能再转移到其它状态，且：所有应收款最终都将转移到此二状态之一种

第二节 应收账款分析

三、建立数学模型

2、转移概率矩阵

设 p_{ij} = 一元钱某一天处于 i 状态随后一天转移到 j 状态的概率

则：A 公司根据以往对应收帐款的历史数据不难得出如下形式转移概率阵：

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$



第二节 应收账款分析

三、建立数学模型

3、数学意义上的问题

由 P ，要求：每一元钱应收帐款若开始时分别处于状态三、四或五时，最终将分别吸收于状态一或二的概率。



第二节 应收账款分析

四、计算

1、分块

令

$$P = \begin{pmatrix} I & O \\ R & Q \end{pmatrix}$$

此处，

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R = (\dots), Q = (\dots)$$

第二节 应收账款分析

四、计算

2、基本矩阵 N

定义：基本矩阵 $N = (I - Q)^{-1}$

此处可得：

$$N = \begin{pmatrix} 1.57 & 0.59 & 0.13 \\ 0.49 & 2.06 & 0.46 \\ 0.69 & 0.88 & 1.31 \end{pmatrix}$$

第二节 应收账款分析

四、计算

3、吸收矩阵

1) 定义： NR 称为**吸收矩阵**

2) 此处可得：

$$NR = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.95 & 0.05 \\ 0.87 & 0.13 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow (B类两种吸收之可能) \\ \leftarrow (C类两种吸收之可能) \\ \leftarrow (D类两种吸收之可能) \end{array}$$

3) 意义——B, C, D 三类帐可以收回的可能性分别是：0.99 / 0.95 / 0.87，而变成呆帐的可能性 (概率) 分别是：0.01 / 0.05 / 0.13 ——**收款要快**

第二节 应收账款分析

五、建立可疑帐的备抵

1、假设

在当前试验周，总应收帐款 500,000 中

100,000 —— B 类 —— 状态三

200,000 —— C 类 —— 状态四

200,000 —— D 类 —— 状态五

2、计算

因为：(100,000 200,000 200,000) **NR** = (463,000 37,000)

所以：可以预期总应收帐款中大约有 463,000 元可以收回，而大约有 37,000 元将变为呆帐——这需要为 37,000 元可疑帐建立备抵。

第二节 应收账款分析

六、新信用策略的建立及其评估

1、新信用策略——为降低呆帐数量而设计

已知：B, C, D 三类帐变成呆帐的可能性 (概率) 分别是

0.01

0.05

0.13

考虑：为降低呆帐数量，拟建立一套新信用制度——对付款作出一定的**折扣**

问题：在采用新信用制度之前，当要先予以**评估**。

第二节 应收账款分析

六、新信用策略的建立及其评估

2、新转移概率阵

对新信用制度进行仔细研究之后，假设有关部门得出下列新的转移概率阵：

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & O \\ R_1 & Q_1 \end{pmatrix}$$



第二节 应收账款分析

六、新信用策略的建立及其评估

3、计算

新的基本阵是：

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1.3 & 0.2 & 0.04 \\ 0.37 & 1.58 & 0.35 \\ 0.66 & 0.44 & 1.21 \end{pmatrix} = (I_1 - Q_1)^{-1}$$

新的吸收阵是：

$$N_1 R_1 = \begin{pmatrix} 0.996 & 0.004 \\ 0.965 & 0.035 \\ 0.879 & 0.121 \end{pmatrix}$$

新吸收数量是：

$$\begin{pmatrix} 100,000 & 200,000 & 200,000 \end{pmatrix} R_1 = \begin{pmatrix} 468,352 & 31,648 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \text{可收回} & \text{呆帐} \end{pmatrix}$$

第二节 应收账款分析

六、新信用策略的建立及其评估

4、评估

新信用制度可使呆帐大约减少 $37,000 - 31,648 = 5,352$
与总应收款 (500,000) 相比, 可使呆帐计提下降 1% 多一些

故, 所有在新信用策略下发生的成本 (含新的折扣等等) 不应超过总应收款的 1%, 方可使 A 公司之利润有所增加。即: 新成本 ≤ 0.01 (总欠帐)

5、说明

只要能仔细研究历史数据/转移概率阵, 以上方法不难在计算机上实现, 可以帮助我们对付应收帐款时多一种定量化决策方法。

The End of Chapter 16

