第八章　网络模型

对网络模型的讨论，本质上属于图论范畴

用途极广泛（如：运输系统设计、信息系统设计、项目计划管理等）、实用性强，是网络模型的特征之一。特别值得关注的是：此类模型应用之“奇巧”，如设备维护、巡视路径等

重点：各种网络模型用处、用法及其算法。

第一节 最短路问题

一、问题及其网络模型表示

1、什么是最短路问题

在连通网络中任意选择某结点为起点，求出从此起点到网络中其余各结点的最短路径。如：出租车的调度问题

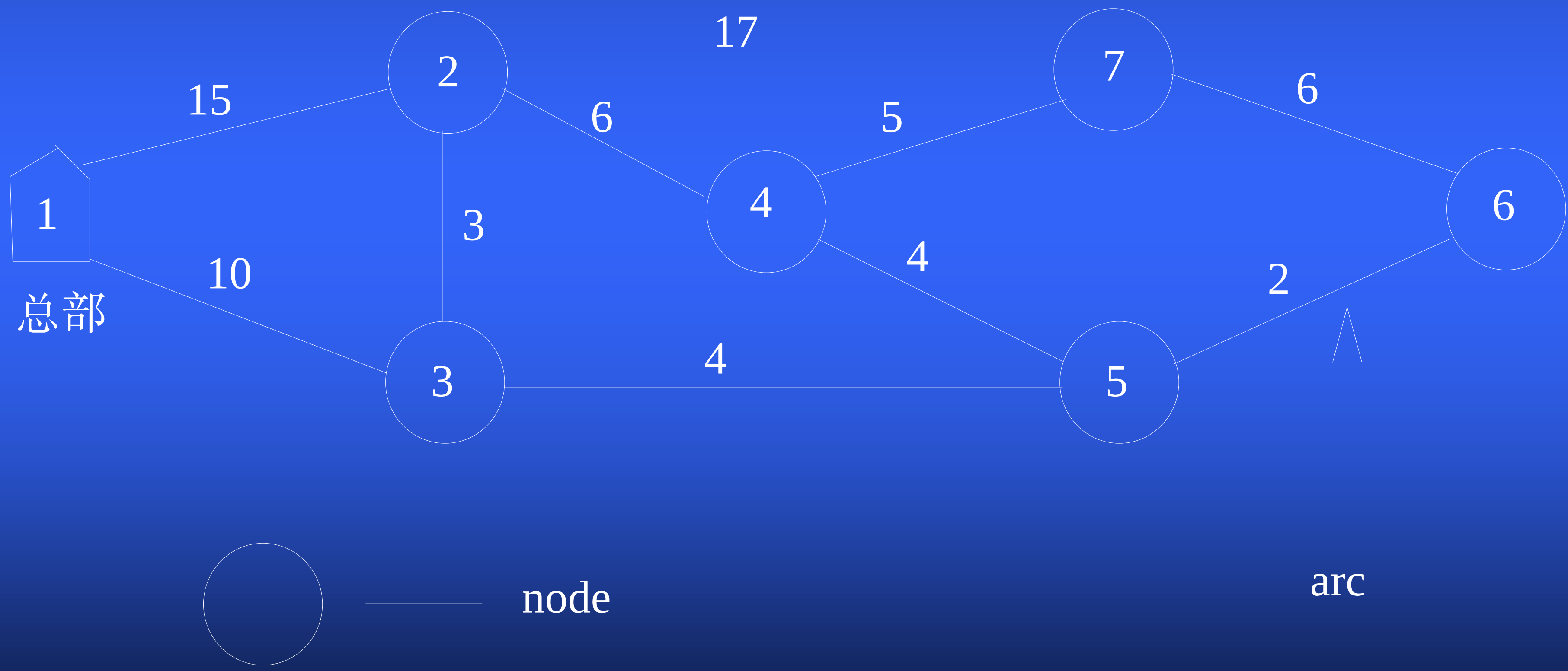
2、例子

Gorman 建筑公司承担了散布在邻近三个区域内的一些建筑项目，公司总部与这些工地之间经常有人员、设备、材料等的运输往来。与运输成本相关的最短路问题，就是很值得考虑的重要问题

设公司总部与六个工地间的公路网络如下页所示：

第一节 最短路问题

一、问题及其网络模型表示



（权之单位：km）

第一节　最短路问题

二、最短路算法（Dijkstra 算法）

(Dijkstra 于 1959 年提出，又称加标号法 labeling procedure)

1、结点之标号(给出：**累计路程**、**路径**两个指标)

第一节　最短路问题

二、最短路算法（Dijkstra 算法）

2、结点标号的分类

1）有或无标号

有标号结点——已指定从起始结点到此结点的一条路径

无标号结点——未指定从起始结点到此结点的路径

2）永久或临时标号

有永久标号结点——已求出从起始点到此结点的最短路径

有临时标号结点——未求出从起始点到此结点的最短路径。

第一节　最短路问题

二、最短路算法（Dijkstra 算法）

3、例子的解

1) 定起始点，写上永久标号 [0 ， S] 并将结点内涂黑表示已有永久标号

2) (迭代) 反复以下步骤：

(1) 为（最新）起始点能直达的结点写上临时标号

(2) 比较临时标号内第一个数（累计路程），选择小的一个

(3) 小者标示成永久标号 (圈内涂黑)

(4) 将具有最新永久标号的结点视为新的起始点。

第一节 最短路问题

二、最短路算法（Dijkstra 算法）

4、最短路模型的解

1—3—2（13） 1—3（10） 1—3—5—4（18）

1—3—5（14） 1—3—5—6（16） 1—3—5—6—7（22）

5、第二个例子

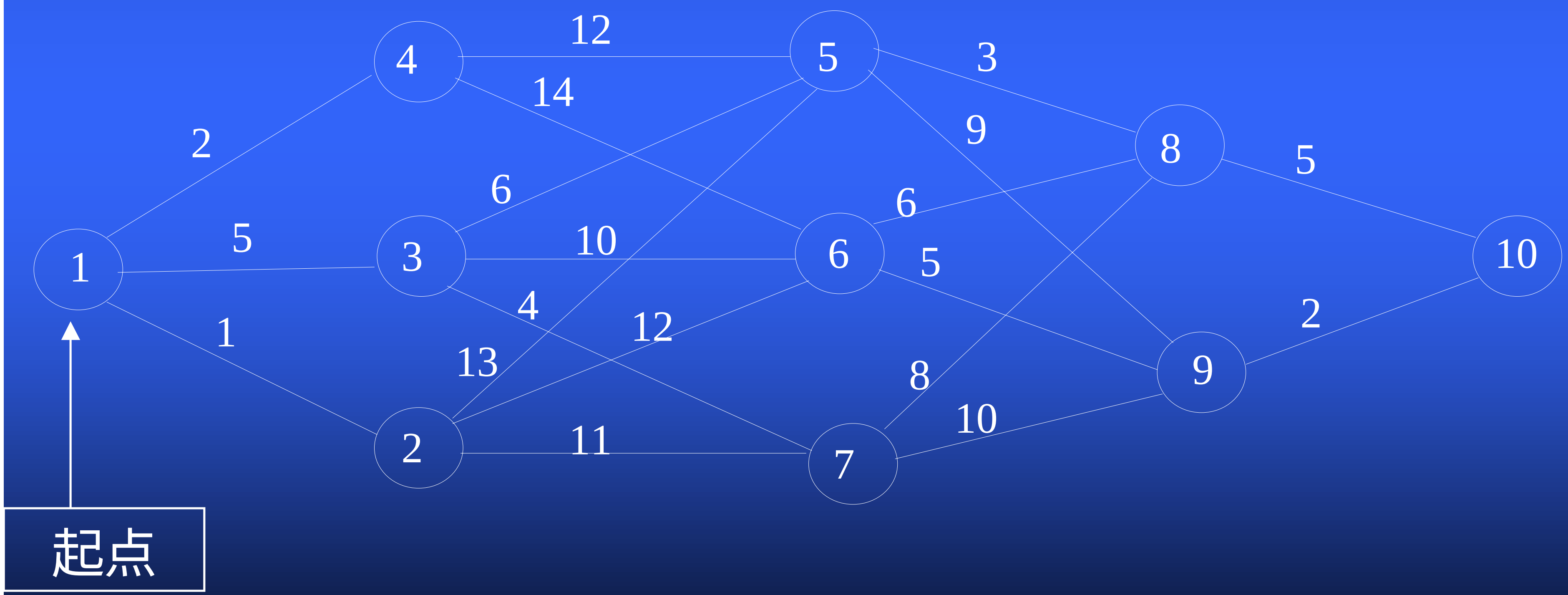
在如下页的网络中，求结点 1 和结点 10 之间的最短路径

解答： 1——3——5——8——10

total = 19。

第一节　最短路问题

二、最短路算法（Dijkstra 算法）



第一节　最短路问题

三、说明

1、算法中，起始结点可以任意选定, N 个结点问题，一般需要有 N－1 次迭代

2、“MS”软件包只要先输入网络，即可解决此类问题

3、其它用处：最小旅行时间问题、旅行成本问题、管道铺设问题、线路安排问题、厂区布局问题、设备更新问题等等（如：练习题四——设备维护问题说明）

4、标号法已发展到可以解决：(时间所限不展开讨论)

(1) 弧值为负数;

(2) 有向网络 (如：单行道运输问题)。

第二节 最小支撑树问题

一、概念

1、树——不含圈的联通图。如：自来水网络

2、什么是（网络）最小支撑树

1) 贯通网络所有结点——支撑

2) 分枝 (弧) 总长度最小——最小

3、用处：分子结构问题、电网络分析问题、计算机网络设立问题、管道铺设问题等等的解决。

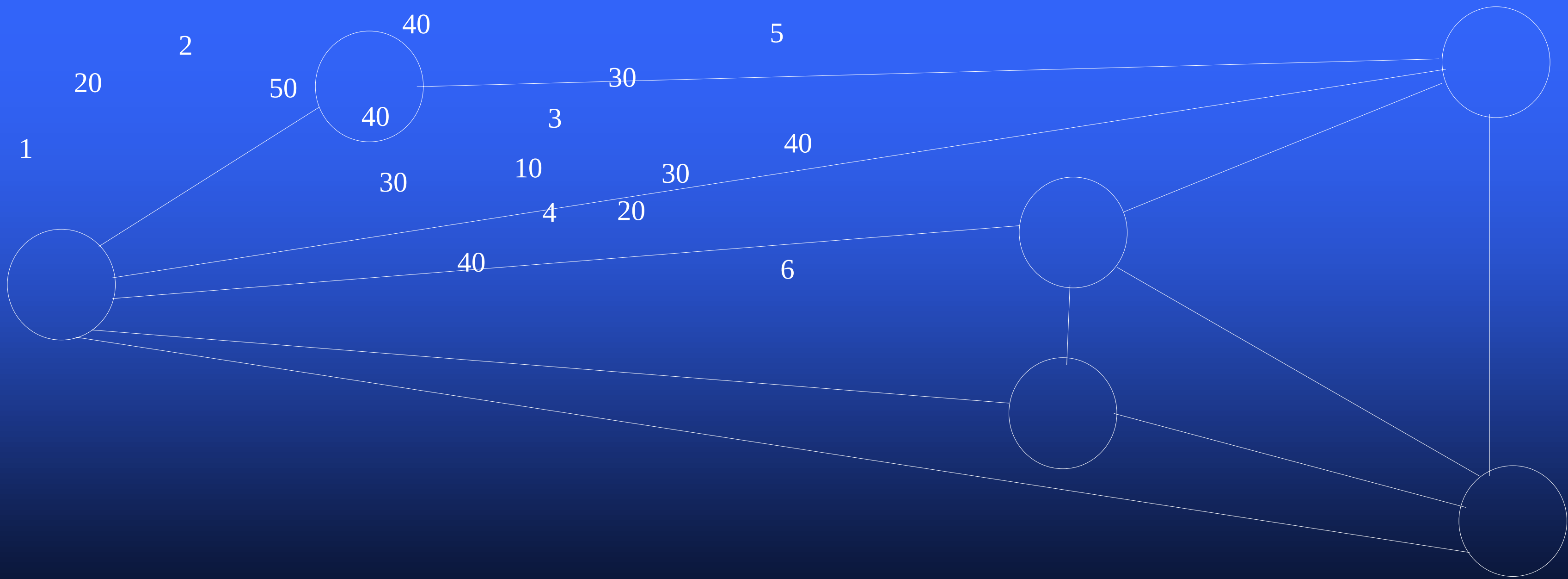
第二节　最小支撑树问题

二、实例

计算机中心欲使五家新用户与中心（结点 1）联机

电话公司负责排线，由于价格昂贵，欲寻求最小支撑树

由于计算机网络的可联通性，得到：



第二节　最小支撑树问题

三、算法一 (Greedy algorithm)

1、因为问题的特殊性，有：每一步追求最优，最后也能得到问题的最优解——贪心解法

2、作法

1) 对弧的长短按照升序排序

2) 任意结点开始，在保证不构成圈的前提下

3) 重复进行：将最近的不联通结点并入网络的联通段（可以双线表示联通）

3、说明：最小支撑树不唯一，但分枝总长度唯一

4、例子的计算：见下页。o.f. = 110。

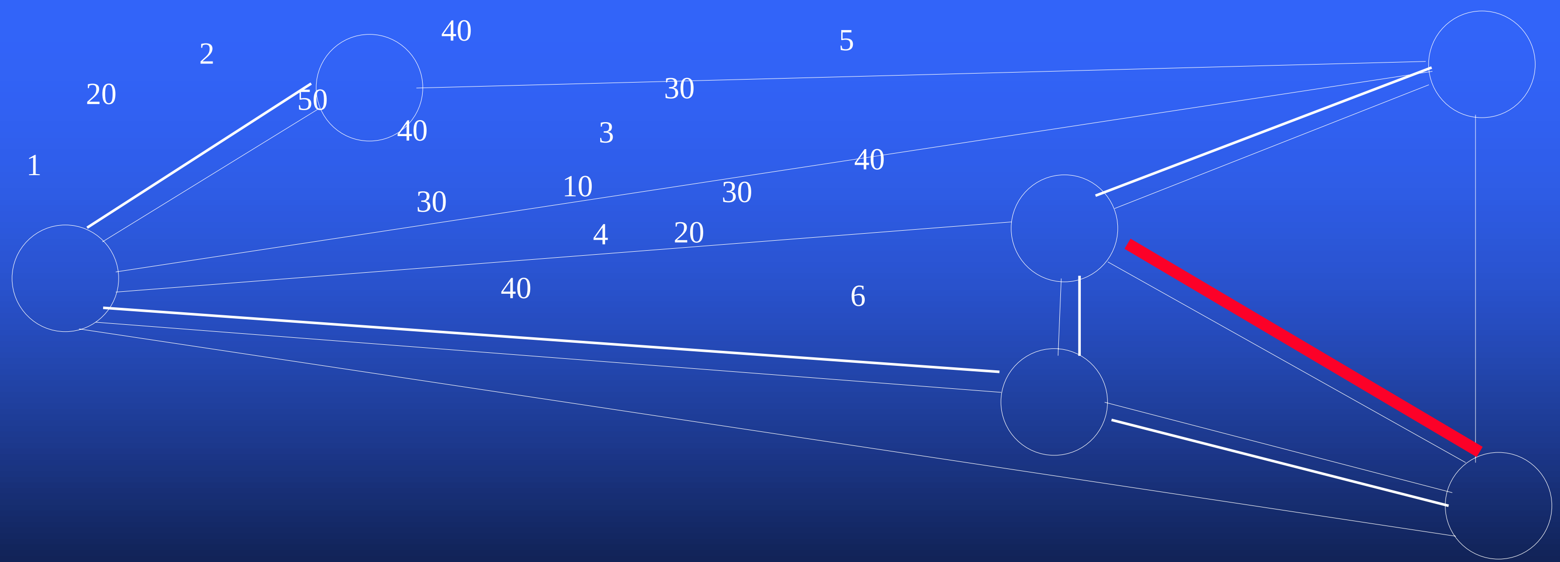
第二节 最小支撑树问题

三、算法一 (Greedy algorithm)

计算机中心欲使五家新用户与中心联机

电话公司负责排线，由于价格昂贵，要寻求最小支撑树

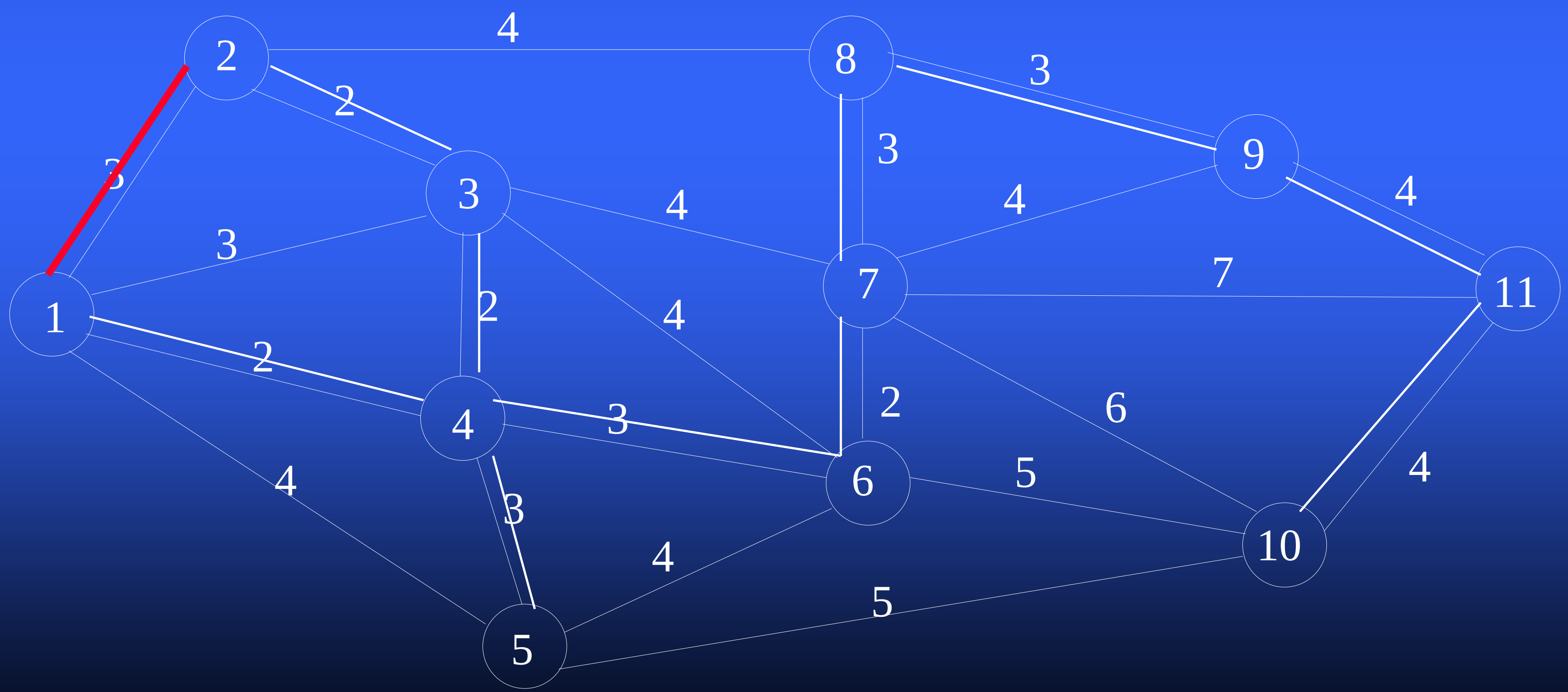
由于计算机网络的可联通性能，得到：



第二节　最小支撑树问题

三、算法一 (Greedy algorithm)

第二个例子（总长度＝28）



第二节 最小支撑树问题

四、算法二（Prim’s algorithm）

1、算法一缺点：（1）需先将弧长进行排序 （2）每一步都需要仔细确认有没有构成“圈”，并不适用于复杂、大型的网络最小树问题

2、算法二的步骤

1）任意选择一个结点为起点；

2）选择与起点最近的结点，将此结点及其与起点相连接的弧一并加入树；

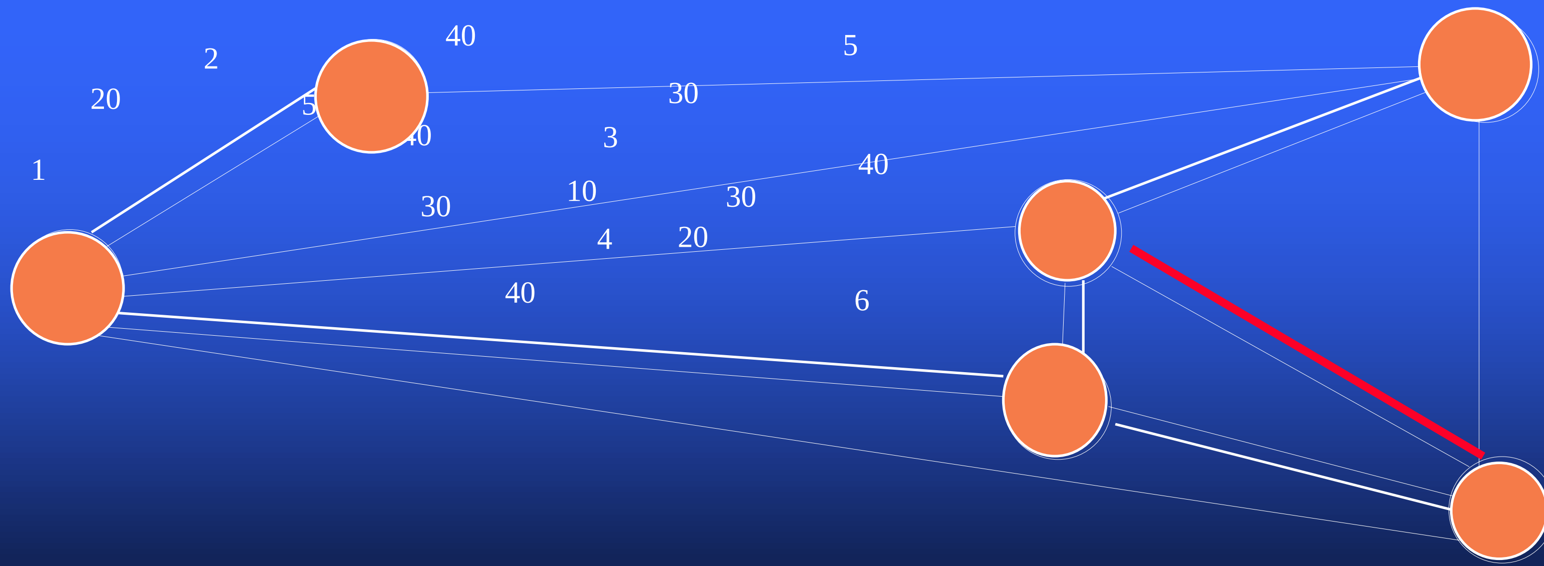
3）对已经连接成树的部分，选择与树最近的尚不包括在树中的结点，然后连上；

4）不断重复步骤三，直到所有的结点都连接上。

第二节 最小支撑树问题

四、算法二（Prim’s algorithm）

（任）选 3 为起点，选与之最近的结点，将此结点及其与起点相连接的弧一并加入树，重复：对已经连接成树的部分，选择与树最近尚不包括在树中的结点，然后连上



第三节　最大流问题

一、概念

1、什么是最大流问题

有一个称之为入口点（ source node ）结点和一个出口点 (sink node) 结点的网络，要求在给定时期内进 / 出最大流量是?

2、用处

交通网之车流量、计算机网之信息流量、金融系统中现金流量、物流流量、防洪系统设计、排水系统设计、供水系统等

3、基本假定

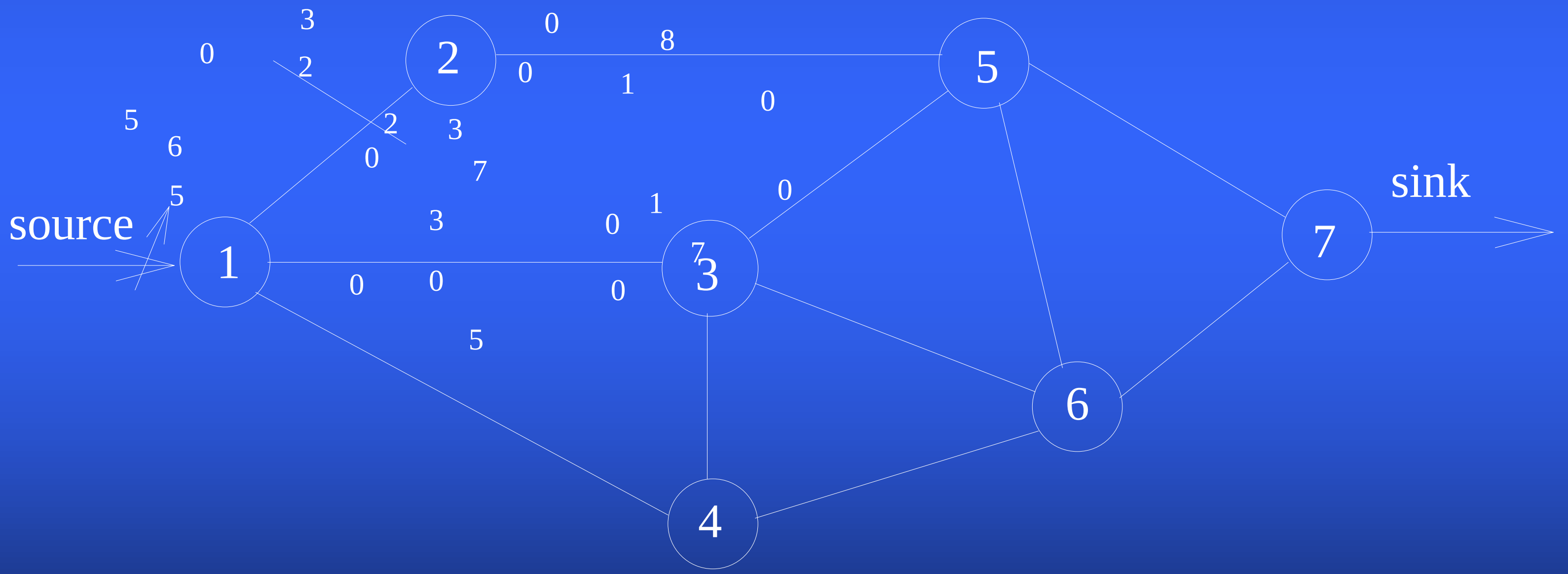
分枝 (arc)——有流量限制且讲究方向

结点 (node)——进、出相等。

第三节　最大流问题

4、例子

某高速公路自北向南方向计划进行大修，运输部门拟以如下网络的普通公路网系统暂时替代之（单位：1000/小时）



问题：此公路网能否适应每小时 15000 辆机动车的最大流？每小时最大流量是多少？每一条分枝分别有多大流通过？

第三节 最大流问题

二、最大流算法

1、虚拟流 (fictitious flow) 方法

对如下路径：

若修改成为：

表明： 1) 3 → 6 分枝上剩余可安排流量 1000 单位

2) 6 → 3 的 6000 单位实际上是所谓的**虚拟流**

3) 虚拟流：简明地表示若还要增加 **3 → 6** 方向超过 1000 单位之流量应转到其它分枝上去。

第三节　最大流问题

二、最大流算法

2、算法说明

1）寻找从入口到出口的路径（要保证此路径上每一分枝允许有流量 ＞ 0 的流量通过）

2) 将 1) 中所寻得的路径安排尽可能多的流量

3) 重复第 1) 2) 步骤，其中可以用虚拟流手段，直至找不到可使流量 > 0 的路径为止。

第三节 最大流问题

二、最大流算法

3、实例计算

（可能的）五次流量安排如下：

1) 1——3——6——7： $p_f = 6$

2) 1——2——5——7 $p_f = 3$

3) 1——2——3——5——7 $p_f = 2$

4) 1——4——6——7 $p_f = 1$

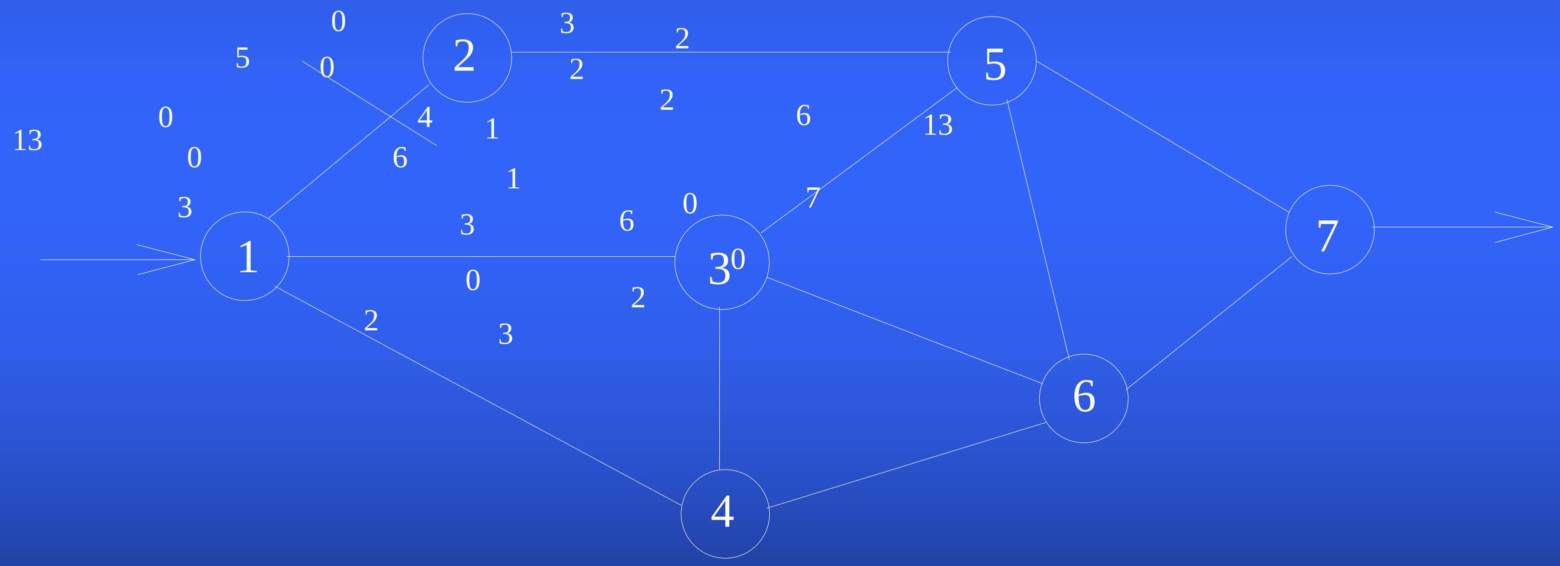
5) 1——4——6——5——7 $p_f = 1$

此时得到如下网络流量图：（见下页）

第三节　最大流问题

二、最大流算法

3、实例计算



6）1——4——6——3——5——7　　$p_f = 1$

故，最大流＝14，其中的虚拟流手段之说明见下页。

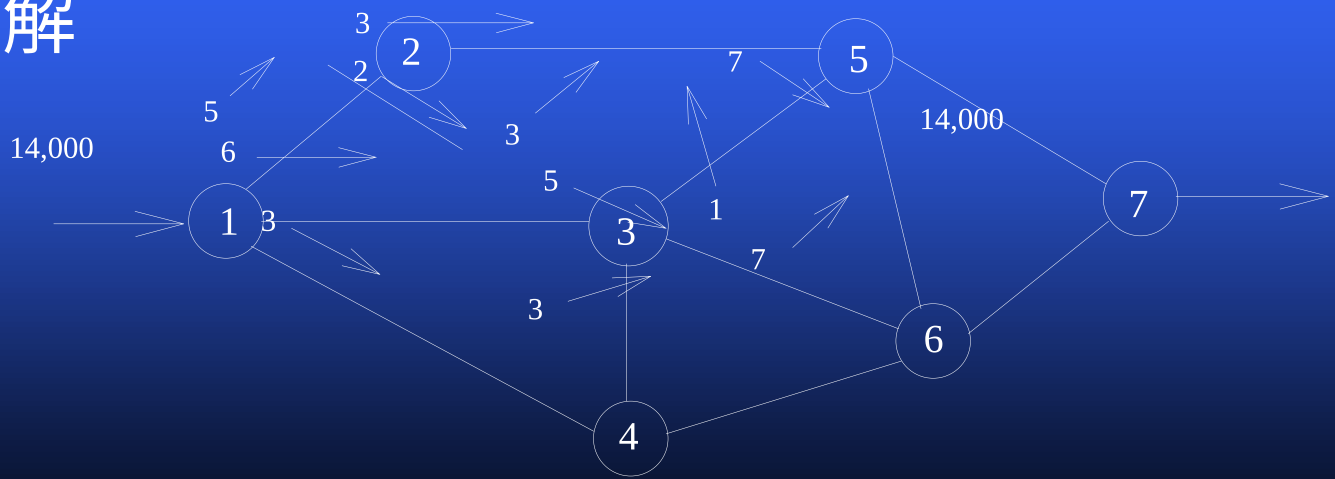
第三节 最大流问题

二、最大流算法

4、虚拟流说明

原始网络中 6 → 3 之流量＝0，此处安排 1000 辆车在 6 → 3 方向即为虚拟流，此处对 6 → 3 做 1000 的安排，实为将原先在 1) 中允许进入 3 → 6 分枝的 1000 单位流转入沿 3 → 5 分枝，则 6 → 7 可空 1000 单位流可供安排

5、最优解

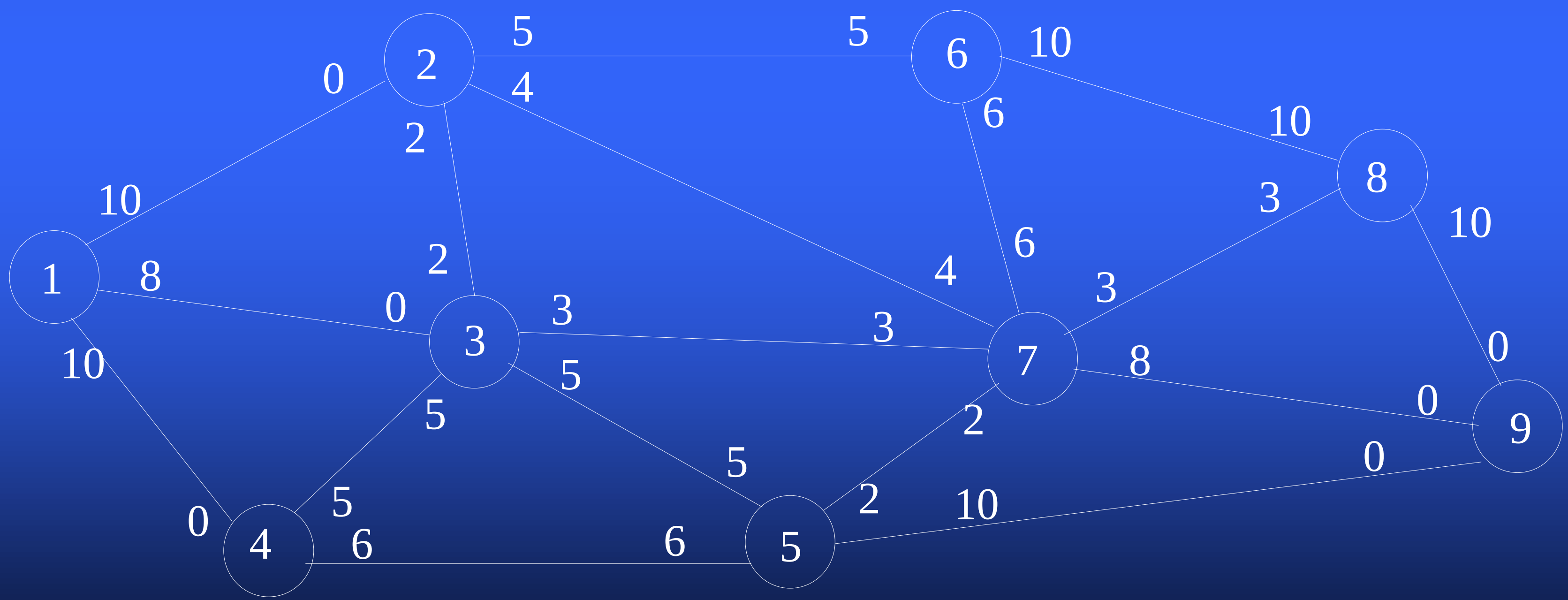


第三节　最大流问题

二、最大流算法

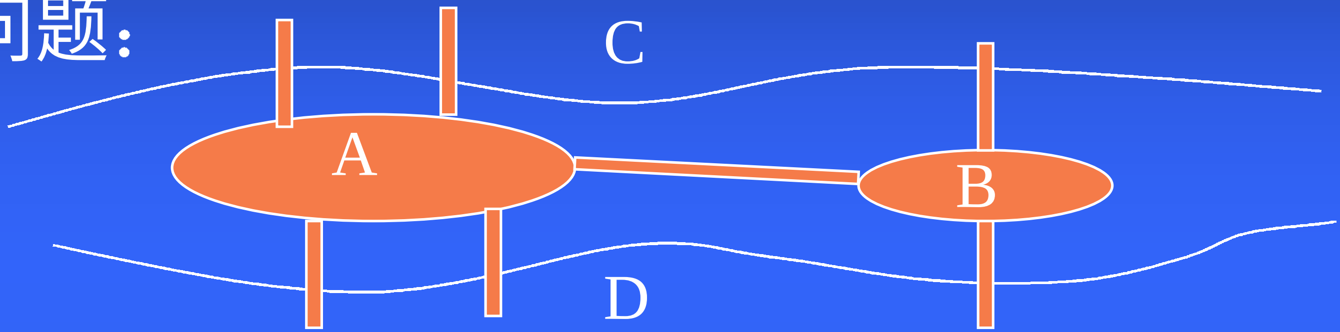
6、第二个例子

求下列网络之最大流　(= 33)

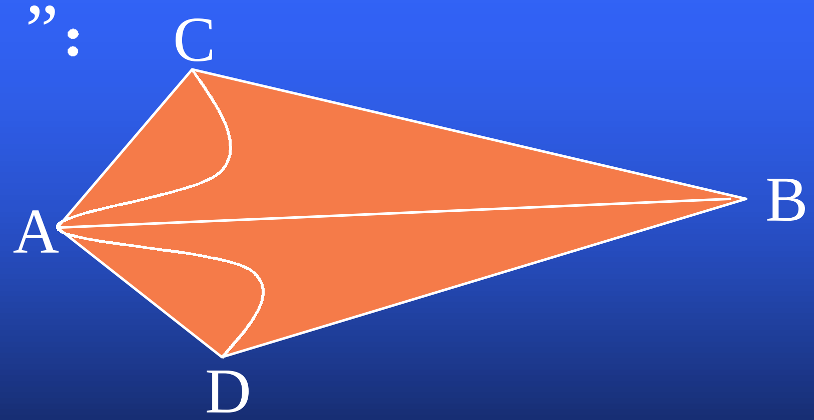


第四节　路径巡视问题

一笔画问题：18 世纪，29 岁的欧拉解决了哥尼斯堡七桥问题：



抽象成 “图（模型）”：



结论：不是欧拉图，亦非半欧拉图，不论起点在哪里都不可能求得 “一笔画” 问题的解。

第四节　路径巡视问题

路径　　由

（山

抽象　　上

赋予　　少

一次　　径

注意

一、

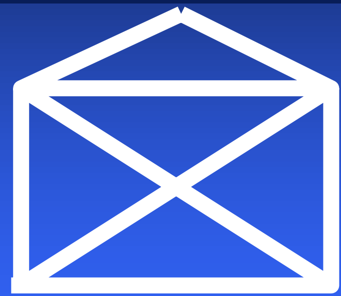
1、

网络　　求

任意

第四节　路径巡视问题

一、一笔画问题



2、有关的定义

1）结点的价（Valency）

从某个结点可引出的“路径”（弧）之数量称为该结点的价

2）奇、偶结点

由结点的价一意决定

3）“价”的意义（在所有“弧”都必须经历的条件下）

奇结点——或者是起点或者是终点；

偶结点——要么只是经过点；要么同时是起点和终点

4）半欧拉图

连通图中若只有两个相异的奇结点，其余皆为偶结点。

第四节 路径巡视问题

一、一笔画问题

2、有关的定义

5）欧拉图

所有结点都是偶结点的连通图

3、（握手）定理

连通图中各结点价数之和 ＝ 2 *（路径数量）

4、推论

任意连通图中，奇结点的个数总是偶数

证明：由握手定理得： 奇结点价数之和＋偶结点价数之和＝偶数，所以 奇结点价数之和＝偶数。

第四节　路径巡视问题

一、一笔画问题

5、定理

连通图是欧拉图，当且仅当其中无奇结点

定理的意义：

1）若连通图是欧拉图——无奇结点，则可以任意结点为起点，一笔画后仍然回到起点；

2）若连通图是半欧拉图——两个奇结点，则从某奇结点出发，一笔画后以另一个奇结点为终点；

3）若连通图有四或以上个奇结点——不可能不走重复路经——路径巡视问题：最小重复？

第四节　路径巡视问题

二、最短巡视路径

1、问题

起点＝终点，路径无方向、任意路径都需经过（可重复）、要求使赋权的连通图之总权数最小，可用于配送问题决策

2、欧拉图（所有节点皆为偶节点的连通图）

可以任意选择起点，完成一笔画后总能回到起点，且，总权数也最小

3、求非欧拉图（奇结点个数总是偶数）最小总权数

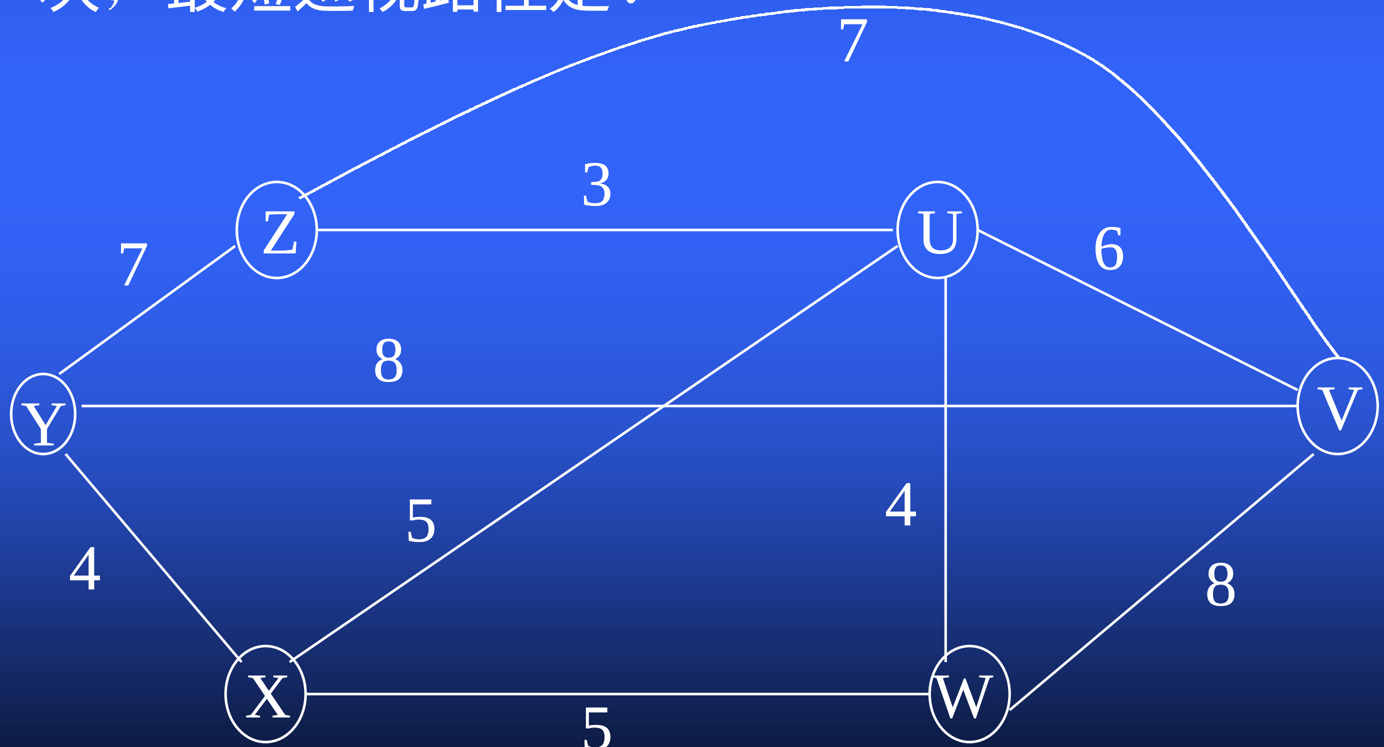
罗列出所有奇节点→写出所有可能的两两配对方案→分别计算各方案下的最短（附加）连接路径→小中取小

例子见下页。

第四节 路径巡视问题

3、求非欧拉图的最小总权数

例：从 V 开始，并在 V 结束，至少经过每一弧（路径）一次，最短巡视路径是？



第四节　路径巡视问题

二、最短巡视路径

3、求非欧拉图的最小总权数

解答

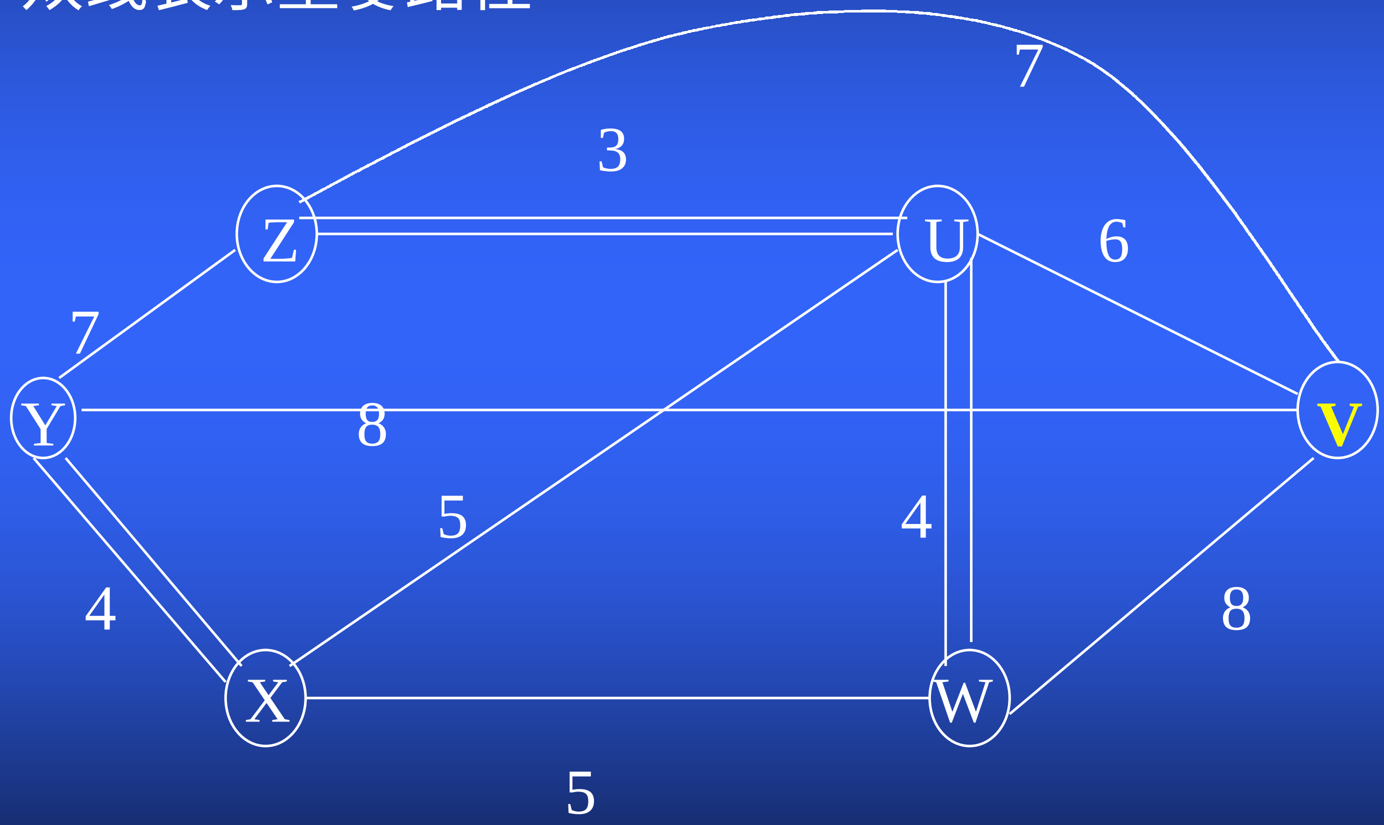
配对	最短路径	期望的路径之长度
W和X　Y和Z	WX　YZ	5＋7＝12
W和Y　X和Z	WXY　XUZ	(5+4) + (5+3) = 17
W和Z　X和Y	WUZ　XY	(4+3) + 4 = 11

因为第三种配对的路径最短，连接后总巡视路径长度 ＝ 68

故巡视路径应是： VWUWXYZVYXUZUV（详见下页）。

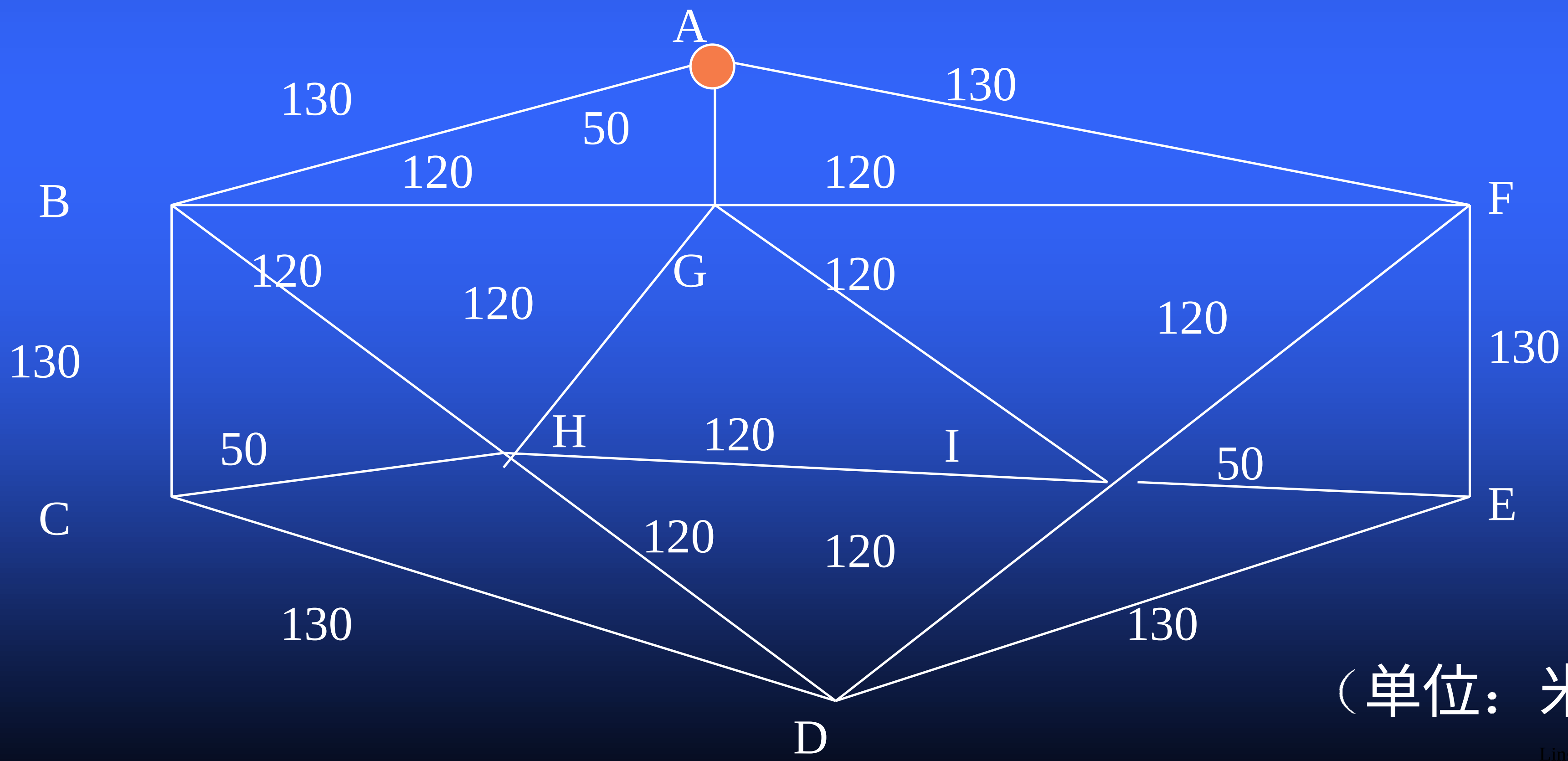
第四节　路径巡视问题

双线表示重复路径



第四节　路径巡视问题

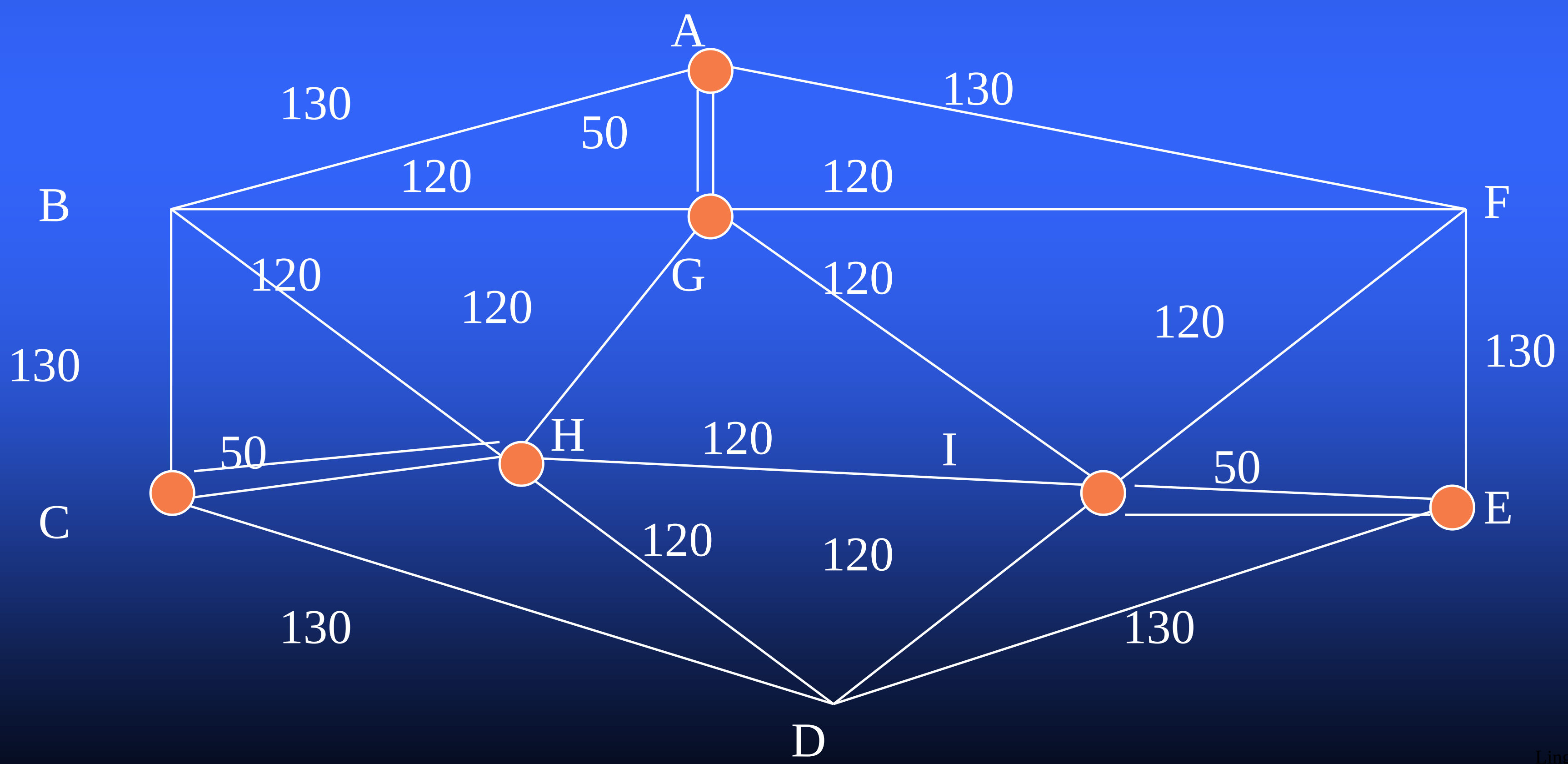
某道路保洁员从下图管理处 **A 点出发，**清扫他所管辖的区域内道路。这些道路分布在九个节点之间，所有各点之间的道路长度如下图所示，请设计能经过所有道路的最短路径并求其长度



（单位：米）

第四节　路径巡视问题

某道路保洁员从下图管理处 **A 点出发，** 清扫他所管辖的区域内道路。这些道路分布在九个节点之间，所有各点之间的道路长度如下图所示，请设计能经过所有道路的最短路径并求其长度



The End of Chapter 8