

Stokes 参数数字化求解的误差分析

陆 浩,王振占,刘璟怡,李 彬,董 帅

(中国科学院微波遥感技术重点实验室,中国科学院国家空间科学中心,北京 100190)

摘 要: Stokes 参数是描述极化波的强度量纲,在电磁测量、合成孔径雷达、辐射计中均有广泛应用.文中提出了求解 Stokes 参数的数字化方法,具有带宽高、稳定性高等特点.针对将模拟信号采样量化后求解 Stokes 参数的方法,本文分别就自相关和互相关两种计算过程,详细分析并给出了数字化对最终亮温的误差贡献.文中证明了高于 3bit 量化引入的亮温误差小于 $1 \times 10^{-5} \text{K}$,进一步给出了量化后的系统灵敏度,分析了由数字量化产生的亮温灵敏度偏差.当量化位数为 3bit 时,数字相关系统灵敏度可以达到理想模拟相关系统的 95%.本文为不同应用条件下,满足不同精度时,如何选择特定量化位数与量程提供了依据.

关键词: Stokes 参数; 相关计算; 数字采样; 量化误差

中图分类号: TP274

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2016)05-1254-04

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.05.035

Error Analyze of Stokes Parameters Digital Solution

LU Hao, WANG Zhen-zhan, LIU Jing-yi, LI Bin, DONG Shuai

(Key Laboratory of Microwave Remote Sensing, National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: Stokes parameter is the intensity dimension to describe polarized wave. Stokes parameter is widely used in electromagnetism measure, synthetic aperture and radiometer. The digital method given in the paper has the characters of high-bandwidth and high-stability. The measure error contributed by digital sampling for Stokes parameter solution is analyzed in detail in the paper. The brightness temperature quantization error under auto-correlation is proved to be less than $1 \times 10^{-5} \text{K}$ in application with 3 bits quantization. Further the paper gives the system sensitivity, analyzes the brightness temperature error generated by the digital quantization. When quantization is above 3 bits, the digital system sensitivity can achieve 95% of ideal analog system. The theory foundation of digitization solution is given to prove its feasibility for different demand in different device.

Key words: Stokes parameter; correlation; digital sample; quantization error

1 引言

为了描述电磁波的极化状态,1852年英国物理学家 Stokes 提出用四个具有强度量纲的参数来描述极化波,称之为 Stokes 参数,如式(1)所示^[1]:

$$\bar{T}_B = \begin{bmatrix} T_v \\ T_h \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \frac{\lambda^2}{k \cdot \eta} \begin{bmatrix} \langle |E_v|^2 \rangle \\ \langle |E_h|^2 \rangle \\ 2\text{Re} \langle E_v E_h^* \rangle \\ 2\text{Im} \langle E_v E_h^* \rangle \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, E_v 、 E_h 分别为垂直和水平方向的电场强度, η 为波阻抗, k 是波尔兹曼常数, λ 是波长.

Stokes 参数表示了目标电磁辐射的极化度,在电子与光子符合散射实验中,通过测量光子的 Stokes 参数可以描述受激 P 态电荷云分布和散射过程的动力学^[2].

极化电子束在物理学及其相关领域应用十分广泛,要深入研究这些应用必须对电子束的极化度进行精确测量,即对 Stokes 参数的精确测量^[3].此外,Stokes 参数归一计算在空间探测望远镜得图像预处理中有重要意义^[4].

Stokes 参数在合成孔径雷达(SAR)中有重要应用. SAR 标准化 Stokes 参数分布的概率密度函数描述了 SAR 多视图图像的随机状态特性,这对地表目标识别具有重要意义.而在全极化辐射计中,求解 Stokes 参数可以反演海面风场. Stokes 参数的复相关分量 T_3 和 T_4 是表征目标特性的重要参数, T_3 主要表征线性极化的程度,而 T_4 表征极化方向性的特征,且不受 Faraday 旋转的影响,对大气中的水汽和液水不敏感,更适合在各类天气观测海面风向.

由式(1)可知,可以通过求解单个信号自相关和两个信号互相关来得到 Stokes 参数. Stokes 参数的数字化是指通过将极化信号采样量化后再进行相关计算. 将模拟信号采样、量化、编码是数字处理的前提,而数字化的过程引入的噪声和非线性也直接影响着系统的性能^[5],因此需要对数字化过程做详细分析,验证数字化方法的可行性. 下面分别给出了量化对四个 stokes 参数计算结果的影响,并分析量化误差对所测亮温灵敏度的影响.

2 数字采样

采样是利用模数转换器(ADC)把连续时间信号转化成离散时间信号,而采样必然带来偏差,输入信号 $x(t)$ 取均值为零的高斯随机噪声模型,方差为 σ^2 ,密度函数为:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (2)$$

ADC 步进为 v ,量化电压 V_{adc} 和量化阶数的关系如下式:

$$V_{adc} = a * \sigma = 2^w v \quad (3)$$

高斯噪声超过 99% 的信号落在 6σ 以内,我们的实际应用中 a 略大于 6. w 表示量化位数, s 可以表示为: $s = 2^w/a$.

实际的 AD 采样会同时引入量化偏差和非线性偏差,定义 ΔV 为总的量化误差,量化偏差为 ΔV_q 其限制在 $-v/2$ 到 $v/2$,非线性偏差 ΔV_L 为 $\lambda v/2$,其中 λ 取值范围为 $(-1, 1)$,反映了 AD 与理想线性量化的偏离程度. 非线性偏差可以理解成在量化偏差的基础上叠加的误差. 量化偏差和非线性偏差都是 AD 采样过程中需要带入分析的误差源.

$$\Delta V = \Delta V_q + \Delta V_L \quad (4)$$

ΔV_q 与 ΔV_L 是误差分析中不可缺少的研究对象. 定义 ΔV 归一化量化偏移为:

$$b = \Delta V/v \quad (5)$$

$$b \text{ 动态范围为 } \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda\right).$$

3 量化误差

3.1 T_v, T_h 量化误差

如图 1 所示为自相关情况下的原理框图, $X(t)$ 表示 V 或 H 极化通道进入 ADC 前的信号. $X(t)$ 采样后求平方然后累加,输出为 r_Q ,而如果不经数量化处理,理想化模拟的输出为 r_∞ .

$\langle r_Q \rangle$ 可以通过被采后的密度函数得到, b 的动态范围为 $\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda\right)$. 量化后自相关输出的误差为^[6]:

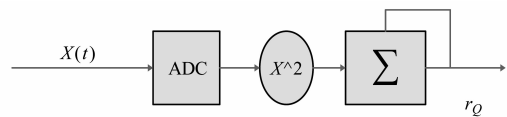


图1 T_v, T_h 量化计算原理图

差为^[6]:

$$\langle r_e \rangle = \langle r_Q \rangle - \langle r_\infty \rangle = \frac{v^2}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (i+b)^2 \cdot \left[\operatorname{erf}\left(\frac{i+b+1/2}{\sqrt{2}s}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{i+b-1/2}{\sqrt{2}s}\right) \right] - s^2 \cdot v^2 \quad (6)$$

$\langle r_e \rangle$ 为有限量化和无限量化的输出差值. 当 s 在 0.7 以下时, $\langle r_e \rangle$ 呈现明显的变化趋势,而当 s 大于 1 时,量化偏差则稳定在 $v^2/12 + \lambda^2 v^2/16$. 目前通用的 ADC 的量化位数基本都在 3bit 以上,其 s 均大于 1, λ 均小于 1%. 以 10bit (1024 阶) 量化的 ADC 为例,假设量程为 1000mv, 则其步进 0.98mv, 在阻抗匹配 50 欧姆的系统,引入噪声功耗小于 -40dBm. 这样因量化引入的误差就可以忽略. 以上结论定量说明了可以忽略多位置量化在 Stokes 第一参数、第二参数计算中产生的误差.

3.2 T_3, T_4 量化误差

根据式(1), T_3, T_4 为两个极化通道之间的互相关结果,在实际数字量化以后就是两个数字量乘积的均值. 图 2 为两路信号互相关的数字化过程, $x(t)$ 表示 V 通道进入 ADC 之前的噪声信号, $y(t)$ 表示 H 通道进入 ADC 之前的噪声信号. 第三 stokes 参数为互相关的实部 r_{real} , 是 $x(t)$ 与 $y(t)$ 信号被采样成离散数列后相乘累加后的值. 第四 stokes 参数为互相关的虚部 r_{imag} , 是 $y(t)$ 信号移相 90° 之后与 $x(t)$ 信号被采样成离散数列后相乘累加后的值.

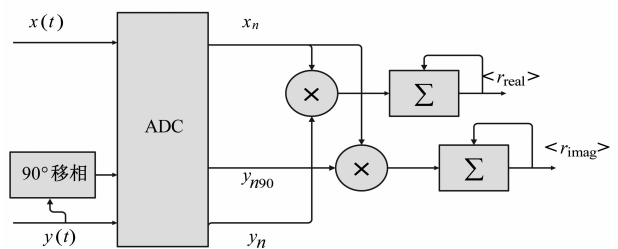


图2 T_3, T_4 量化计算原理图

第三与第四个 stokes 参数的输出结果均可以写成 x, y 组合的权重形式,如下:

$$\langle r_{real/imag} \rangle = v^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (i+b_1)(k+b_2) \cdot \int_{v \leq k+b_2-1/2}^{v \leq k+b_2+1/2} \int_{v \leq i+b_1-1/2}^{v \leq i+b_1+1/2} p(x, y) dx dy \quad (7)$$

其中, b_1 和 b_2 是相关通道的量化偏差,实际应用中,多个通道的采样一般都在一片 ADC 中完成,此时量化偏移 b_1 与 b_2 可以认为是一致的,因此上式可以简化为:

$$\langle r_{\text{real/imag}} \rangle = v^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (i+b)(k+b) \cdot \int_{v \langle k+b-1/2 \rangle}^{v \langle k+b+1/2 \rangle} \int_{v \langle i+b-1/2 \rangle}^{v \langle i+b+1/2 \rangle} p(x,y) dx dy \quad (8)$$

将 $p(x,y)$ 按一级泰勒展开, 如下:

$$p(x,y) \approx \left(1 + \frac{\rho}{\sigma^2}\right) p(x)p(y) \quad (9)$$

则:

$$\langle r_{\text{real/imag}} \rangle = \sigma^2 \left[\begin{aligned} & \mathbf{H} * \int_{v \langle i+b-1/2 \rangle}^{v \langle i+b+1/2 \rangle} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \int_{v \langle k+b-1/2 \rangle}^{v \langle k+b+1/2 \rangle} e^{-y^2/2\sigma^2} dy \\ & + \rho \mathbf{H} * \int_{v \langle i+b-1/2 \rangle}^{v \langle i+b+1/2 \rangle} x e^{-x^2/2\sigma^2} dx \int_{v \langle k+b-1/2 \rangle}^{v \langle k+b+1/2 \rangle} y e^{-y^2/2\sigma^2} dy \end{aligned} \right] \quad (10)$$

其中, $\mathbf{H} = \frac{1}{S^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (i+b)(k+b) \frac{1}{2\pi\sigma^2}$

图3为式(10)加号左右两边随 s 值的变化曲线, 采用离散的形式直观表现. 左函数在 b 取 $1/4$ 时最大, 随着 s 的增加而递减, 当 s 在 0.6 以上时, 左函数的最大值小于 $2.1e-007$, 可以证明对于多位量化来说, 左函数近似为 0 . 同样, 当 s 大于 0.7 的时候, 右函数的最大值接近 $\rho\sigma^2$, 误差在 $1e-005$ 以内, 因此当 s 大于 0.7 时, 可以得到 $r_{\text{real/imag}} = \rho\sigma^2$.

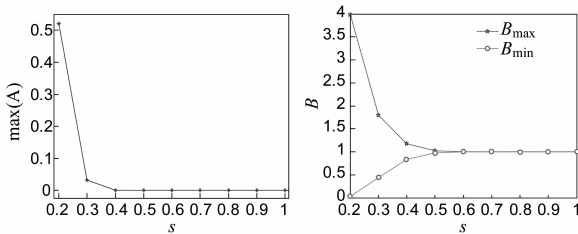


图3 $r_{\text{real/imag}}$ 左右函数最大值随 s 变化图

以上结论定量证明了可以忽略多位量化在 Stokes 第三参数、第四参数计算中产生的误差.

4 数字量化灵敏度

4.1 T_v, T_h 亮温灵敏度

上述量化偏差 b 在一定的范围内变化, 即 $(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda)$. 那么 b 取两个极限值的输出会是最大偏差, 定义 $f(s)$ 为:

$$f(s) = \langle r_e \rangle (\max) - \langle r_e \rangle (\min) \quad (11)$$

当 s 大于 1 的时候, $\langle r_e \rangle$ 的最大变化范围是 $f(s)$, 则其方差为:

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{f(s)} \int_0^{f(s)} \langle r_e \rangle^2 dr_e = \left(\frac{1}{12} + \frac{\lambda^4}{16}\right) f^2(s) \quad (12)$$

因为 $\langle r_\infty \rangle$ 是定值, 所以 $\langle r_e \rangle$ 和 $\langle r_Q \rangle$ 具有相同的标准偏差:

$$\sigma_Q = f(s) \sqrt{\left(\frac{1}{12} + \frac{\lambda^4}{16}\right)} \quad (13)$$

输出的信噪比定义为:

$$\text{SNR} = \langle r_Q \rangle / \sigma_Q = T'_{\text{sys}} / \Delta T_Q = (T_{\text{sys}} + T_Q) / \Delta T_Q \quad (14)$$

T'_{sys} 包含接收机噪声 T_{sys} 和量化噪声 T_Q .

$$T_Q = v^2/12 + \lambda^2 v^2/16$$

又由上述结论可知, 下式成立:

$$\langle r_Q \rangle \approx \sigma^2 + v^2/12 + \lambda^2 v^2/16 \quad (15)$$

综合可知:

$$\frac{T'_{\text{sys}}}{\Delta T_Q} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{12} + \frac{\lambda^4}{16}\right) \frac{f(s)}{v^2}}} \left(s^2 + \frac{1}{12} + \frac{\lambda^2}{16}\right) \quad (16)$$

灵敏度影响为:

$$\Delta T_Q = T_{\text{sys}} \cdot \frac{f(s)}{v^2 s^2} \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{\lambda^4}{16}} \quad (17)$$

这样就得到了一维量化对全功率辐射计灵敏度的影响. 实际中采用 3bit 以上的量化, s 均大于 $1, \frac{f(s)}{v^2}$ 小于 10^{-7} , λ 通常小于 1% , 假设系统亮温为 $450K, \Delta T_Q$ 小于 $1 * 10^{-5} K$, 是完全可以忽略的.

4.2 T_3, T_4 亮温灵敏度

在互相关的情况下, 相关输出 $r_{\text{real/imag}}$ 的方差为:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{real/imag}}^2 &= \langle r_{\text{real/imag}}^2 \rangle - \langle r_{\text{real/imag}} \rangle^2 = \\ & \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \langle (\hat{x}_n \hat{y}_n)^2 \rangle + \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \langle \hat{x}_n \hat{y}_n \hat{x}_m \hat{y}_m \rangle - \rho^2 \sigma^4 \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $N = 2B\tau$, τ 是积分时间, B 是中频带宽. 对式 (18) 的第一项做分解^[7]:

$$\frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \langle (\hat{x}_n \hat{y}_n)^2 \rangle \approx \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \langle \hat{x}^2 \rangle \langle \hat{y}^2 \rangle + \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N 2 \langle \hat{x} \hat{y} \rangle^2 \quad (19)$$

其中 $\langle \hat{x} \hat{y} \rangle = \rho\sigma^2$, 第一项可写为:

$$\frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \langle (\hat{x}_n \hat{y}_n)^2 \rangle = \frac{\sigma^4}{N} \left[\left(1 + \frac{1}{12s^2} + \frac{\lambda^2}{16s^2}\right)^2 + 2\rho^2 \right] \quad (20)$$

x, y 的自相关函数, 表示如下^[8]:

$$\langle \hat{x}_n \hat{x}_m \rangle = \langle \hat{y}_n \hat{y}_m \rangle = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{12s^2} + \frac{\lambda^2}{16s^2}\right) R_f\left(\frac{q}{2B}\right) \quad (21)$$

其中, $R_f\left(\frac{q}{2B}\right)$ 表示数字自相关函数, $q = |n - m|$. 因此, 第二项为:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1, m \neq n}^N [\hat{x}_n \hat{y}_n \hat{x}_m \hat{y}_m] \approx \sigma^4 \left(1 + \frac{1}{12s^2} + \frac{\lambda^2}{16s^2} \right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1, m \neq n}^N R_f^2 \left(\frac{q}{2B} \right) + N(N-1)\rho^2 \sigma^4 \quad (22)$$

将式(22)与式(20)代入式(18),得到:

$$\sigma_{\text{real/imag}}^2 = \frac{\sigma^4}{N} \left[\left(1 + \frac{1}{12s^2} + \frac{\lambda^2}{16s^2} \right)^2 + \frac{\sigma^4}{N^2} \left(1 + \frac{1}{12s^2} + \frac{\lambda^2}{16s^2} \right)^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1, m \neq n}^N R_f^2 \left(\frac{q}{2B} \right) \right]$$

当接收机的响应为矩形带通, $R_f\left(\frac{q}{2B}\right)$ 为零, 上式简化为:

$$NE\Delta T = \frac{\sigma_{\text{real/imag}}}{\sigma^2} \cdot T_{\text{sys}} = \frac{T_{\text{sys}}}{\sqrt{2B\tau}} \left(1 + \frac{1}{12s^2} + \frac{\lambda^2}{16s^2} \right) \quad (23)$$

其中的 s 因子充分说明了数字量化给互相关的亮温灵敏度带来的影响. 当量化位数为 3bit 时, 根据式(3), s 值等于 1.48, 而 λ 通常小于 1%, 因此数字相关系统灵敏度可以达到理想模拟相关系统的 95% 以上. 在假设采样位数足够高 (s 趋于 ∞), 且 AD 具有理想的线性化特征, 式(23)又简化为:

$$NE\Delta T_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{T_{\text{sys}}}{\sqrt{B\tau}}$$

这就是理想的模拟复相关灵敏度.

5 总结

Stokes 在科学理论研究和工程应用中有着广泛的意义. 文中分析了数字化方法求解 Stokes 参数的误差, 定量给出了采样及非线性对理想值的影响. Stokes 参数计算包含自相关和互相关计算. 文中计算了量化分别对四个 Stokes 参数引入的亮温误差, 证明在实际应用中其值小于 1×10^{-5} K, 进一步给出了量化下的系统灵敏度, 分析了由数字量化产生的灵敏度误差. 当量化位数为 3bit 时, 数字相关系统灵敏度可以达到理想模拟相关系统的 95%. 本文为不同应用条件下, 满足不同精度时, 如何选择特定量位数与量程提供了依据和标准. 通过误差值, 说明了多位数字量化引入的误差相对于理想值可以忽略. 随着数字化技术的发展, 5GHz 以上采样率的 ADC 以及 1GHz 以上主频率的集成芯片已经市场化, 这都超过模拟相关处理器的带宽, 数字化具有广阔的前景.

参考文献

[1] 王振占, 姜景山, 刘憬怡, 殷晓斌. 全极化微波辐射计遥感海面风场的关键技术和科学问题[J]. 中国工程科学, 2008, 12(10): 76-86.

WANG Zhen-zhan, JIANG Jing-shan, LIU Jing-yi, YIN Xiao-bin. Key techniques and scientific issues of the surface wind field in the fully polarimetric microwave radiometer[J]. Engineering Sciences, 2008, 12(10): 76-86. (in Chinese)

- [2] 刘义保, 庞文宁, 丁海兵, 尚仁成. 原子受激态的 Stokes 参数分析[J]. 原子核物理评论, 2005, 22(3): 300-308. LIU Yi-bao, PANG Wen-ning, DING Hai-bing, SHANG Ren-cheng. Analysis of Stokes parameters in atomic state excited by electrons[J]. Nuclear Physics Review, 2005, 22(3): 300-308. (in Chinese)
- [3] 李兴鳌, 阮存军, 等. 光学极化度测量仪的研制及弱光 Stokes 参数的测量[J]. 物理, 2000, 29(12): 742-745. LI Xing-ao, RUAN Cun-jun, et al. Development of optical electron polarimetry and measurement of weak light Stokes parameters[J]. Physics, 2000, 29(12): 742-745. (in Chinese)
- [4] 王宇舟, 金声震. 空间太阳望远镜的图象预处理系统研制[J]. 电子学报, 2005, 33(7): 1291-1294. WANG Yu-zhou, JIN Sheng-zhen. Development of image preprocessing system for space solar telescope[J]. ACTA Electronica Sinica, 2005, 33(7): 1291-1294. (in Chinese)
- [5] 马仑, 廖桂生, 杨鹏, 明洋. 一种新的并行交替采样系统误差估计方法[J]. 电子学报, 2014, 42(5): 912-917. MA Lun, LIAO Gui-sheng, et al. A novel multi-channel mismatch estimation method for parallel time-interleaved system[J]. ACTA Electronica Sinica, 2014, 42(5): 912-917. (in Chinese)
- [6] Xavier Bosch-Lluis, Isaac Ramos-Perez, et al. A general analysis of the impact of digitization in microwave correlation radiometers[J]. Sensors, 2011, 7(6): 6066-6087.
- [7] J M Wozencraft, IM Jacobs. Principles of communication engineering[M]. New York: Wiley, 1965. 205-206.
- [8] J R Piepmeier, A J Gasiewski, J E Almodovar, Advances in microwave digital radiometry[A]. IGARSS 2000 Volume VII[C]. Honolulu, 2000. 2830-2833.

作者简介



陆 浩 男, 1988 年生于安徽亳州, 中科院博士. 研究方向为大规模数字电路, 微波辐射计系统研制和定标.

E-mail: luhao0408@126.com

王振占 男, 研究员 1969 年生于河北青龙县. 研究方向为全极化微波辐射测量技术、定标和应用基础研究; 微波辐射计海洋/大气微波辐射传输及参数的反演应用研究等.