

应用精英反向学习的多目标烟花爆炸算法

谢承旺^{1,2}, 许 雷¹, 赵怀瑞³, 夏学文¹, 魏 波¹

(1. 华东交通大学软件学院, 江西南昌 330013; 2. 江西科技师范大学数学与计算机学院, 江西南昌 330013;
3. 华东交通大学轨道交通学院, 江西南昌 330013)

摘 要: 现实中的多目标优化问题越来越多,而且日益复杂.受混合多目标优化算法设计思想的启发,将烟花爆炸方法和精英反向学习机制引入至多目标优化领域,提出一种应用精英反向学习的多目标烟花爆炸算法(Multi-Objective Fireworks Optimization Algorithm Using Elite Opposition-Based Learning, MOFAEOL).该算法利用精英反向学习策略加强算法的全局搜索能力,利用烟花爆炸方法增强算法的局部搜索能力并提高求解的精度.这两种搜索机制相互协同以更好地平衡算法的全局勘探和局部开采的能力. MOFAEOL 算法与另外 5 种代表性多目标优化算法一同在由 ZDT 系列和 DTLZ 系列组成的测试集上进行性能比较.实验表明, MOFAEOL 算法在收敛性、多样性和稳定性方面均优于或部分优于其他对比算法.

关键词: 烟花爆炸优化; 精英反向学习; 多目标优化算法

中图分类号: TP301 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)05-1180-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.05.024

Multi-objective Fireworks Optimization Algorithm Using Elite Opposition-Based Learning

XIE Cheng-wang^{1,2}, XU Lei¹, ZHAO Huai-rui³, XIA Xue-wen¹, WEI Bo¹

(1. School of Software, East China Jiaotong University, Nanchang, Jiangxi 330013, China;

2. School of Mathematics and Computer Science, Jiangxi Science and Technology Normal University, Nanchang, Jiangxi 330013, China;

3. School of Railway Tracks and Transportation, East China Jiaotong University, Nanchang, Jiangxi 330013, China)

Abstract: More and more complex multi-objective optimization problems have emerged in the real world. Inspired by the idea of hybrid components of multi-objective optimization algorithms, a method of fireworks explosion optimization and a strategy of elite opposition-based learning were introduced into the field of multi-objective optimization. A multi-objective fireworks optimization algorithm using elite opposition-based learning (MOFAEOL) was proposed in the paper. The MOFAEOL utilized the elite opposition-based learning strategy to strengthen the global search ability, and adopted the fireworks explosion optimization approach to improve the local search ability and the accuracy of the algorithm. These two learning mechanisms collaborated to balance the global exploration and the local exploitation, in order to solve some hard multi-objective optimization problems efficiently. The MOFAEOL was compared with other five typical multi-objective optimization algorithms on a benchmark test set including 12 multi-objective optimization test problems composed by ZDT and DTLZ series functions. Experimental results show that the MOFAEOL is superior or competitive to the other peer algorithms in convergence, diversity and stability.

Key words: fireworks explosion optimization; elite opposition-based learning; multi-objective evolutionary algorithm

1 引言

科学研究与工程实践中存在着大量需要同时优化

多个目标函数的优化问题,它们通常被称为多目标优化问题(Multi-objective Optimization Problem, MOP). MOP问题中各目标之间相互冲突,整体上一不存在

单个的最优解,而是一组 Pareto 解的集合. MOP 问题的复杂性导致经典的数学规划方法等一般难以凑效.

有关 MOP 问题的研究得到了长足的发展并取得了丰富的成果,概括起来大致可分为 3 类:

(1) 基于进化算法 (Evolutionary Algorithm, EA) 的多目标优化方法. 其中代表性的算法包括 NSGA-II^[1]、SPEA2^[2]、PAES^[3]、PESA^[4] 和 PESA-II^[5] 等. 这类算法基于群体进化的方式实现了搜索的多向性和全局性,能够在一次运行中获得一组解;其次,EA 算法可以处理诸如不连续、非凸以及多峰等复杂的目标函数和约束条件.

(2) 基于新型进化机制的多目标优化算法. 例如,基于粒子群优化 (Particle Swarm Optimization, PSO) 模型和新型占优机制的 CMOPSO 算法^[6] 和 OMOPSO 算法^[7] 等;基于分布估计算法提出的 RM-MEDA 算法^[8] 以及将传统的数学规划方法和进化算法相结合提出的 MOEA/D 算法^[9] 等. 这些新型进化范例的引入提高了多目标优化算法解题的效率与效果,开辟了解决 MOP 问题的新途径.

(3) 混合多目标优化算法. 例如, Molina 等^[10] 将分散搜索和禁忌搜索结合以解决非线性多目标优化问题; Soliman 等^[11] 将协同进化与局部搜索的思想融入到多目标差分进化算法中,以指导搜索进程朝 Pareto 最优解逼近;谢承旺等^[12] 将多种不同策略融合到多目标粒子群优化算法,并在多目标基准测试实例中取得了不错的效果. 这类算法一般根据算子 (组件) 和元启发式方法的特点有机结合,发挥多目标优化算法和元启发式方法的长处,进行优势互补,从而克服单个的多目标优化算法或元启发式方法所固有的局限性,可进一步增强算法在解空间搜索的效果.

上述不同种类的多目标优化算法虽然在解决一些 MOP 问题中表现出了较好的性能,也取得了不错的应用效果,但现实中的多目标优化问题正日益增多,而且也越来越复杂,迫切需要探索新的有效的进化机制应对这种局面,以更好地解决这些较难的 MOP 问题.

2010 年, Tan 等^[13] 通过模拟烟花爆炸中炸点的扩散机制提出了一种新颖的烟花搜索算法 (Fireworks Explosion Algorithm, FEA). 由于烟花弹爆炸时,释放出的火星散布在以烟花弹 (炸点) 为中心的一个圆形邻域内,如果将该邻域看成是问题解空间的一个局部区域,炸出的火星看成是区域中的点,则一次爆炸就类似于对局部区域的一次探索,这种探索可看作是对空间中该炸点附近的一次局部搜索. FEA 算法为智能优化领域提供了新思想,注入了新活力,并引起了研究者的重视. 文献[14]在原始 FEA 算法的基础上,对爆炸点的方向和爆炸半径等参数进行改进,提高了算法的性能. 文

献[15]借鉴 PSO 算法引入了交流算子,实现种群内个体之间的交流,引导种群向全局最优解逼近. 文献[16]将遗传算法思想引入 FEA 中,随机选择某炸点与当前最佳炸点位置进行信息交换,增加种群的多样性,克服算法早熟收敛. 文献[17]将精英反向学习机制引入至 FEA 算法以指导种群向全局最优解所在的空间逼近,并取得了较好的求解精度和收敛速度. 然而,上述对 FEA 算法及其变种的研究均局限于单目标优化. 2013 年, Zheng 等^[18] 将多目标烟花爆炸算法 (Multi-Objective Fireworks Optimization Algorithm, MOFA) 用于解决精准农业中的施肥问题,但其沿用单目标优化模式生成火星的做法值得商榷.

鉴于 FEA 算法基于群体的搜索以及具有执行参数较少、求解速度快和较强的局部搜索能力等优势,而且有关多目标烟花爆炸方面的研究尚不多见,因此,开展多目标烟花爆炸算法的研究具有现实意义. 但也应注意到:烟花爆炸优化采用了贪婪选择的方式,随着迭代的进行,所有个体逐渐向当前最优个体靠拢,而且其爆炸半径也逐渐缩小,种群的多样性也会逐渐降低,这对于多目标优化算法是不能接受的. 因为保持群体的多样性是指导搜索朝 Pareto 前沿逼近,克服多目标优化算法早熟收敛的重要措施. 基于此,本文将精英反向学习机制 (Elite Opposition-based Learning, EOL) 引入至多目标烟花爆炸算法,一方面利用精英个体包含了比普通个体更多的有益搜索信息;另一方面,通过精英反向学习产生的反向解能远离局部最优区域,扩大算法在精英反向解所在区域内的搜索,增强算法的全局搜索能力,有利于算法较快收敛于全局 Pareto 前沿. 本文提出了应用精英反向学习的多目标烟花爆炸算法 (Multi-Objective Fireworks Optimization Algorithm Using Elite Opposition-based Learning, MOFAEOL), 其中的精英反向学习机制与烟花爆炸优化方法相互协同,以期更好地平衡算法的全局探索能力和局部开采能力,并能有效地解决复杂的多目标优化问题. 另外, MOFAEOL 算法采用改进的 k -最近邻方法^[2] 更新外部档案以保持解群的多样性.

2 相关概念

2.1 多目标优化问题

根据优化的对偶理论,只需考虑最小化问题. 不失一般性,一个具有 n 个决策变量, m 个目标函数, $(p+q)$ 个约束的 MOP 问题可定义为:

$$\begin{cases} \min & F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T \\ \text{s. t.} & g_i(\mathbf{x}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, p \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$ 是 n 维决策向量, \mathbf{X}

为 n 维决策空间; $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y \subset \mathbf{R}^m$ 为 m 维目标空间; 目标函数 $F(\mathbf{x})$ 定义了由决策空间 X 向目标空间 Y 映射的函数, $g(\mathbf{x})$ 定义了 p 个不等式约束, $h(\mathbf{x})$ 定义了 q 个等式约束. 约束函数 $g(\mathbf{x})$ 和 $h(\mathbf{x})$ 共同确定决策向量 \mathbf{x} 的可行域. 在此基础上给出几个重要的定义.

定义 1 (可行解集) 可行解集 X_f 为满足式(1)中约束函数 $g(\mathbf{x})$ 和 $h(\mathbf{x})$ 的决策向量 \mathbf{x} 的集合, 即 $X_f = \{\mathbf{x} \in X | g(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ 且 } h(\mathbf{x}) = 0\}$.

定义 2 (Pareto 支配) 假设 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X_f$ 是上述 MOP 问题的可行解, 称 \mathbf{x}_1 Pareto 支配 \mathbf{x}_2 (记为 $\mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2$) 当且仅当 $\forall i = 1, 2, \dots, m: f_i(\mathbf{x}_1) \leq f_i(\mathbf{x}_2) \wedge \exists j = 1, 2, \dots, m: f_j(\mathbf{x}_1) < f_j(\mathbf{x}_2)$ 成立.

定义 3 (Pareto 最优解) 假设 $\mathbf{x}^* \in X_f$ 且不存在其他的解 $\overline{\mathbf{x}} \in X_f$, 使得 $f_i(\overline{\mathbf{x}}) \leq f_i(\mathbf{x}^*) (i = 1, 2, \dots, m)$ 成立且至少有一个是严格不等式, 则称 \mathbf{x}^* 是式(1)的 Pareto 最优解.

定义 4 (Pareto 最优解集) Pareto 最优解集 (Pareto Set, PS) 是所有 Pareto 最优解的集合, 即 $PS = \{\mathbf{x}^* | \mathbf{x} \in X_f \wedge \neg \exists \mathbf{x}' \in X_f: f_i(\mathbf{x}') \leq f_i(\mathbf{x}^*), i = 1, 2, \dots, m\}$.

定义 5 (Pareto 前沿) Pareto 前沿 (Pareto Front, PF) 是 Pareto 最优解集在目标空间中的投影, 即 $PF = \{F(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in PS\}$.

定义 6 (当前种群的非劣解集 NDS) 假设 $\text{Pop}(t)$ 为 MOEA 算法的第 t 代种群, 个体 $\mathbf{x}^* \in \text{Pop}(t)$ 为群体的非劣解, 当且仅当 $\neg \exists \mathbf{x}' \in \text{Pop}(t): \mathbf{x}' < \mathbf{x}^*$. $\text{Pop}(t)$ 中所有非劣解 \mathbf{x}^* 组成的集合称为当前种群的非劣解集 NDS, 即 $NDS = \{\mathbf{x}^* | \mathbf{x} \in \text{Pop}(t) \text{ 且 } \neg \exists \mathbf{x}' \in \text{Pop}(t), \text{ 使 } \mathbf{x}' < \mathbf{x}\}$.

2.2 精英反向学习

Tizhoosh^[19] 于 2005 年提出了反向学习 (Opposition-Based Learning, OBL) 的概念, 并说明了反向解要比当前解有高近 50% 的概率靠近全局最优. 其主要思想是通过在当前个体所在区域产生反向个体, 并将反向个体与当前个体一起参与竞争, 优秀个体进入下一代.

定义 7 (反向解) 设在区间 $[a, b]$ 上存在一个实数 x , 则 x 的反向数定义为 $x' = a + b - x$. 基于此, 假设在 \mathbf{R} 域上存在某 n 维的解点 $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 且 $x_i \in [a_i, b_i]$, 则定义 $p' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ 为 p 的反向解. 其中, $x'_i = \beta * (a_i + b_i) - x_i$, β 为 $[0, 1]$ 区间均匀分布的随机数, 也称为一般化系数.

定义 8 (基于反向解的优化) 设待优化问题为式(1)中的最小化多目标优化问题, 若存在当前解 X , 其反向解为 X' , 对 X 和 X' 采用如下更新机制: ①若 $X < X'$, 则保留当前解 X ; ②若 $X' < X$, 则用 X' 替换 X ; ③若 X 和 X' 彼此非支配, 则随机选择其中某个个体保留.

多目标优化问题中的非支配解一般视为精英个体, 这些个体通常包含了更多的引导种群向全局最优 Pareto 前沿收敛的有益信息. 如果最终算法能够全局收敛, 那么精英个体所形成的搜索区域必然会收敛到全局最优 Pareto 解集所形成的搜索区域. 因此, 加强精英个体所在空间邻域的搜索, 将会提高算法的收敛速度, 改善算法的全局收敛能力.

定义 9 (精英反向解) 设 n 维搜索空间中群体 Pop 中的某精英个体 $X_{\text{best}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的反向解为 $X'_{\text{best}} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, 则该精英反向解可定义为 $x'_i = \beta * (da_i + db_i) - x_i$, $\beta \in [0, 1]$ 为服从均匀分布的随机数, $x_i \in [a_i, b_i]$, $[da_i, db_i]$ 为群体 Pop 在第 i 维搜索空间的动态边界, 且可按式(2)计算得到.

$$da_i = \min_{1 \leq j \leq |\text{Pop}|} (x_j), \quad db_i = \max_{1 \leq j \leq |\text{Pop}|} (x_j) \quad (2)$$

其中, $|\text{Pop}|$ 为当前群体的规模.

用搜索空间的动态边界代替固定边界有利于保存搜索经验, 使得生成的反向解能够位于逐步缩小的搜索空间, 促进算法较快收敛. 由于精英反向解也可能跳出边界 $[a_i, b_i]$ 而成为非可行解, 这里采用文献[20]中的方法对越界值进行重置, 如式(3)所示:

$$x'_i = \text{rand}(a_i, b_i) \text{ if } x'_i < a_i \text{ or } x'_i > b_i \quad (3)$$

通过形成的精英反向解, 可加强对精英个体邻域的探测, MOFAEOL 算法在每一次迭代中, 针对种群的精英个体执行反向学习, 生成精英个体的反向种群, 并参与进化竞争.

3 MOFAEOL 算法

3.1 烟花爆炸优化机制

FEA 算法受烟花爆炸现象的启发, 将寻优问题的搜索空间类比于烟花爆炸的空间, 用炸点及其爆炸产生的火星的位置来表征优化问题的候选解. 评估炸点和火星位置的优劣, 并选择较优的位置保留至下一代, 如此迭代进行, 直至获得满意的结果或停机条件达到时为止.

基于烟花爆炸优化的搜索方式如下: 首先在搜索空间中随机初始化 N 个炸点, 即确定第一次爆炸的炸点位置, 用以表征问题的初始解. 例如, 在 n 维搜索空间中的第 i 个炸点可表示为 $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n})$. 炸点执行均匀爆炸操作时需预设最大爆炸半径 r , 即火星的最大散开区域. 如果炸点爆炸层数为 w , 那么每一层的爆炸半径为 $j \cdot r/w (j = 1, 2, \dots, w)$, 其中, r 设置为随迭代次数的增加呈非线性递减的参数, 以确保算法初期可以执行搜索空间的全局探索, 算法末期能在全局最优前沿附近进行精确的局部搜索. 考虑到算法在实际执行过程中由于时空资源的限制, 同时也为了保证有足够的火星数目, 这里规定火星与炸点之间的距离只

有 $r/4, r/2, 3r/4$ 和 r 四种情况. 烟花弹爆炸半径 r 的计算如式(4)所示, 而对于炸点 i , 其爆炸产生的火星的迭代公式如式(5)所示.

$$r(t) = \left(\frac{T_{\max} - t}{T_{\max}} \right)^\alpha \cdot (r_{\text{initial}} - r_{\text{end}}) + r_{\text{end}} \quad (4)$$

$$x_i^* = x_i + r_j \cdot \mathbf{b}_k \quad (5)$$

其中, r_{initial} 为初始炸点爆炸半径, r_{end} 为末代炸点爆炸半径, T_{\max} 为算法最大迭代次数, t 为当前迭代次数, x_i 为炸点 i 的当前位置, x_i^* 为炸点 i 爆炸产生的火星位置, r_j ($j=1, 2, 3, 4$) 为爆炸半径, 且 $r_1 = r, r_2 = 3r/4, r_3 = r/2, r_4 = r/4, r = r(t)$ 表示第 t 代炸点爆炸的半径. \mathbf{b}_k ($k=1, 2, 3, \dots, m$) 为爆炸的方向向量, m 为烟花弹 i 爆炸的总方向数. 对于低维度的搜索空间 (如 $n \leq 10$), 算法选择直观的标准坐标轴爆炸方向, 即 n 维问题的爆炸方向数为 $2n$. 但对于高维度的搜索空间 (如 $n > 10$), 如果仍采用 $2n$ 个爆炸方向, 则算法消耗的时空资源过大. 因此, 求解高维度搜索空间的优化问题时, 每层爆炸方向采用从 $2n$ 个标准坐标轴方向中随机挑选 $n/3$ 个方向, 再加上每个方向的相反方向, 构成 $2n/3$ 个爆炸方向. 图 1 以二维搜索空间为例, 简单描述了爆炸层数 $w=4$ 时炸点的爆炸方式.

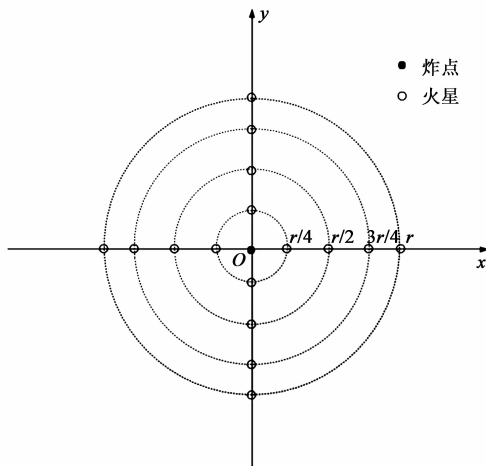


图1 二维空间中炸点爆炸的方式

这里在实施烟花爆炸的过程中对所有炸点和火星的位置边界进行限制, 设 x^l ($l=1, 2, 3, \dots, n$) 为 n 维搜索空间任一维决策变量, 且 $x^l \in [a_l, b_l]$, 如果炸点 x 爆炸过程中产生的火星 x_j 跳出边界 $[a_l, b_l]$ 成为非可行解, 则将 x_j 在第 l 维上的值按式(6)进行重置.

$$x_j^l = \text{rand}(a_l, b_l) \text{ if } x_j^l < a_l \text{ or } x_j^l > b_l \quad (6)$$

其中, $\text{rand}(\cdot)$ 是区间 $[a_l, b_l]$ 上的均匀随机数.

3.2 选择火星

这里从第二代起将当前种群中每一个个体都将视为一个炸点, 这些炸点爆炸后将会产生大量的火星, 这

些火星与炸点一起进行评估以选择出较优的火星 (炸点) 参与下一次爆炸. 为了保持每一代种群规模不变以及火星的多样性, 这里根据文献[13]中基于距离的方法筛选出一定数目的解点. 设 $x_i \in M$, M 为当前炸点及其爆炸后产生火星的集合, 则个体 x_i 与 M 中其他个体的欧式距离之和定义为:

$$R(x_i) = \sum_{j \in M} \|x_i - x_j\| \quad (7)$$

则 x_i 被选中的概率 $p(x_i)$ 如式(8)定义:

$$p(x_i) = \frac{R(x_i)}{\sum_{j \in M} R(x_j)} \quad (8)$$

对 $p(x)$ 值按非升序排列, 依次遴选排在前列的一定数目的个体.

3.3 维持档案群体的多样性

MOFAEOL 算法在种群外部设置一个档案集合, 用于保存算法在搜索过程中获得的非支配解. 这里采用渐进方法对外部档案进行维护, 初始时置档案为空, 对每次迭代产生的非劣解执行算法 1 所示的操作.

算法 1 维护外部档案的渐进方法

输入: 新产生的非劣解 x , 外部档案的最大规模 N'

输出: 外部档案中全部非劣解

Step1 IF 档案的规模未达到其事先规定的最大值 N'

Step2 将个体 x 加入档案中

Step3 利用 Pareto 支配关系更新档案, 除去档案中被支配的个体

Step4 ELSE

Step5 IF 个体 x 支配了档案中的部分个体

Step6 删除档案中被 x 个体支配的所有个体, 将新解 x 加入档案

Step7 ELSE IF 个体 x 与档案中所有个体是非支配关系

Step8 将个体 x 与档案成员一起执行个体密度估计, 并删除多样性最差的个体

Step9 ELSE

Step10 个体 x 被档案成员支配, 舍弃解个体 x

Step11 END IF

Step12 END IF

Step13 END IF

Step14 输出更新维护后的档案群体

在使用渐进方法决定解个体进入档案的过程中, 档案成员的多样性不断增强, 而渐进方法所采用的个体密度估计方法对档案的维护和解群的多样性保持都很重要. 在目前已定义的密度估计方法中, SPEA2 算法的 k -最近邻方法^[2] 在保持解群多样性方面表现突出. 这里将对 k -最近邻方法做一定改进后用于更新外部档案并保持解群的多样性.

原始的 k -最近邻方法将个体的密度值定义为个体与它的第 k 个最邻近个体之间的距离, 为节省算法的时间开销, 这里取 $k = \log(N + N')$, 而不采用原方法的 $k =$

$\sqrt{N+N'}$. 其中, N 为种群的规模, N' 为档案的最大容量. MOFAEOL 算法执行时, 如果档案规模达到预设的最大值时, 档案中每加入一个新解则要从移出一个个体的, 比如个体 A , 个体 A 应满足: 对于档案中所有个体 $B, A <_d B$ 成立. 这里的 $A <_d B$ 定义为当且仅当对于所有的 $l=1, 2, \dots, N': D_{lA} = D_{lB}$; 或者对于某个 $l, D_{lA} < D_{lB}$, 而对任意的 $l' < l: D_{l'A} = D_{l'B}$. 这里的 $D_{lA} (D_{lB})$ 为个体 $A (B)$ 与它的第 l 个最邻近个体的距离.

若多目标优化问题的目标数目为 M , 采用改进的 k -最近邻方法维护外部档案的时间复杂度 $O(M(N+N')^2 \log(N+N'))$, 其复杂度则要优于原方法的复杂度 $O(M(N+N')^3)$ [2].

3.4 MOFAEOL 算法流程

在前面 3.1 至 3.3 小节描述的基础上, 以下给出 MOFAEOL 算法的流程, 如算法 2 所示.

算法 2 应用精英反向学习的多目标烟花爆炸算法 MOFAEOL

输入: 种群 Pop 的规模 N , 外部档案 Arc 最大规模 N' , 初始爆炸半径 r_{initial} , 末代爆炸半径 r_{end} , 爆炸半径递减指数 α , 一般化系数 β , 最大迭代次数 T_{max}

输出: 最末代外部档案中所有的解

Step1 初始化. 随机产生规模为 N 的初始种群, 将外部档案置为空, 并将初始群体中非支配解复制到外部档案中, 置 $t=0$

Step2 WHILE($t < T_{\text{max}}$)

Step3 FOR $i=1$ TO N

Step4 将 Pop(t) 中的解个体 $x_i(t)$ 视为一个炸点, 依据式 (4)~(6) 产生一定数目的火星

Step5 END FOR

Step6 对 Arc(t) 中的非支配解执行精英反向学习, 产生 l Arc(t) 个精英反向解个体

Step7 将 l Pop(t) 个炸点和所有的火星以及 l Arc(t) 个精英反向解组成一个集合 $U(t)$, 并利用归一化排序 [21] 构造 $U(t)$ 的非支配集合 NDS(t)

Step8 利用算法 1 对外部档案 Arc(t) 进行更新维护

Step9 从 l Pop(t) 个炸点以及它们产生的火星中依式 (7) 和 (8) 选择 N 个个体参与下一次爆炸

Step10 $t = t + 1$

Step11 END WHILE

Step12 输出 Arc(T_{max}) 集合中的所有解

假设待优化 MOP 问题的目标数目为 M , 搜索空间的维度为 n , 种群的规模为 N , 外部档案最大容量为 N' , 算法最大迭代次数为 T_{max} , 则 MOFAEOL 算法的时间复杂度可估计如下:

Step1 产生初始种群的时间复杂度为 $O(nN)$, 将种群中非支配解复制到外部档案集的时间为 $O(MN^2)$, 因而 Step1 的时间复杂度为 $O(MN^2)$.

算法从 Step2 开始便进入迭代循环过程.

循环体内, Step3 至 Step5 为炸点产生火星的过程, 其中一个炸点产生火星的时间复杂度为 $O(8n^2/3)$, N

个炸点产生火星的时间则为 $O(8Nn^2/3)$.

Step6 执行精英反向学习的时间复杂度为 $O(MN')$.

Step7 利用归一化排序 [21] 构造非支配集 NDS 的时间复杂度为 $O(M(N+N') \log(N+N'))$.

Step8 利用算法 1 对外部档案进行多样性维护的时间复杂度为 $O(M(N+N')^2 \log(N+N'))$.

Step9 根据距离关系选择参与下一代繁殖的个体所需的时为 $O(nN^2)$.

Step10 的时间复杂度为 $O(1)$. 基于上述分析, 循环体内的时间复杂度应为 $O(8Nn^2/3) + O(MN') + O(M(N+N') \log(N+N')) + O(M(N+N')^2 \log(N+N')) + O(nN^2) + O(1) = O(M(N+N')^2 \log(N+N'))$, 而整个循环迭代过程的时间复杂度则为 $O(T_{\text{max}} M(N+N')^2 \log(N+N'))$.

Step12 输出算法求解结果所需要的时间为 $O(N'n)$.

综上, MOFAOL 算法的时间复杂度为 $O(MN^2) + O(T_{\text{max}} M(N+N')^2 \log(N+N')) + O(N'n) = O(T_{\text{max}} M(N+N')^2 \log(N+N'))$.

4 实验与结果分析

4.1 实验设置

(1) 对等比较算法

为了测试 MOFAEOL 算法的性能, 选取 5 个代表性多目标优化算法作为对等比较算法, 它们分别是: ① Deb 等提出的改进型非劣分类遗传算法 NSGA-II [1]; ② Zitzler 等提出的改进型强度 Pareto 进化算法 SPEA2 [2]; ③ Coello C 等提出的多目标粒子群优化算法 CMOPSO [6]; ④ Sierra 等提出的改进型多目标粒子群算法 OMOPSO [7]; ⑤ Zhang 等提出的基于分解的多目标进化算法 MOEA/D [9].

(2) 多目标测试问题集

测试函数由 ZDT [22] 和 DTLZ [23] 两个系列共计 12 个函数组成. 其中, ZDT 系列是 5 个 2-目标测试问题, 由 ZDT1~ZDT4 以及 ZDT6 组成. 由于 ZDT5 是布尔函数, 需要二进制编码, 本文省去了该测试函数. DTLZ 系列是由 DTLZ1~DTLZ7 组成的一个可以改变搜索变量和优化目标个数的可扩展多目标测试问题集. 这里选择 DTLZ 系列作为 3-目标优化测试问题集.

(3) 实验参数

根据文献 [17] 的研究, MOFAEOL 算法中的半径递减指数 α 取值为 5, 初始爆炸半径 $r_{\text{initial}} = a \cdot (x_{i,\text{max}} - x_{i,\text{min}})$, $a \in [0.05, 0.3]$, r_{end} 取值为 10^{-6} . 文献 [20] 的研究结果表明, 一般化系数 $\beta = 1$ 时能获得较好效果, 本文的实验参数 β 亦取值为 1. 本文选取的其他 5 个对比算

法的实验参数都按照对应的参考文献设置.

比较实验中各算法在 2-目标测试问题中的种群规模均设为 $N = 100$, 外部档案集合的最大容量 $N' = 100$, 所有测试函数的最大评估次数均设为 50000 次, 所有算法的最大迭代次数 $T_{max} = 500$; 3-目标测试问题中种群的大小均设为 $N = 200$, 外部档案集合的最大容量 $N' = 200$, 所有测试函数的最大评估次数均为 200000 次, 所有算法的最大迭代次数为 $T_{max} = 2000$.

为减少性能分析中随机因素的影响, 每种算法在所有的测试函数上均独立运行 30 次. 本文的仿真实验在 Think Pad X200 笔记本电脑上运行, 电脑配置 5G 内存和 2.4GHz 双核 CPU, 安装 Windows 7 X64 操作系统, 算法运用 C++ 编程实现, 并利用 Matlab 2010a 环境出图.

(4) 性能指标

为了评估算法获得的近似 Pareto 前沿的收敛性和均匀性, 本文采用反转世代距离 (Inverted Generational Distance, IGD) 作为性能评估指标^[9]. IGD 是度量真实 Pareto 前沿到算法获得的近似 Pareto 前沿之间的距离指标. 该指标值越低, 表明算法获得的近似 Pareto 前沿的收敛性和多样性越好, 越接近真实 Pareto 前沿. 令 P 为真实 Pareto 最优解集, A 是进化算法获得的近似 Pareto 最优解集, 则 IGD 可根据式(9)计算:

$$IGD = \frac{1}{|P|} \sum_{i=1}^{|P|} Dist_i \quad (9)$$

其中, $Dist_i = \min_{j=1}^{|A|} \sqrt{\sum_{m=1}^M \left(\frac{f_m(p_i) - f_m(a_j)}{f_m^{max} - f_m^{min}} \right)^2}$ 为最小归一化欧式距离; f_m^{max} 和 f_m^{min} 分别为 P 中第 m 个目标上的最大值和最小值, $m = 1, 2, \dots, M$, M 为目标个数; $p_i \in P, i = 1, 2, \dots, |P|$; $a_j \in A, j = 1, 2, \dots, |A|$.

4.2 实验结果与分析

实验 1 通过比较 6 个对等多目标优化算法在 12 个多目标测试问题上的 IGD 值来考察 MOFAEOL 算法的性能. 表 1 列出了各算法在 12 个测试实例上的 IGD 性能对比结果. 其中 IGD 的均值 (mean) 和标准差 (std.) 是同一算法在同一测试问题上独立运行 30 次的统计结果; t -test 值是本文算法与其他对等算法在同一测试问题上进行 t 检验时的 t 值; “+”、“=”和“-”表示本文算法获得的 IGD 值在显著性水平为 5% 的双尾 t 检验中分别优于、等于和劣于对应列的对等算法在对应的测试问题上的显著性区分结果; “Score” 表示本文算法显著优于对应列的对等算法在 12 个测试问题中的净胜得分, 即得 “+” 与得 “-” 的测试问题个数之差 (下文同). 同时, 采用粗体字表示所有对比算法在每一个测试问题中的最小 IGD 均值.

从表 1 可以看出, MOFAEOL 算法在 12 个测试函数上获得了 4 个最优的 IGD 均值, NSGA-II、CMOPSO 和

MOEA/D 各获得 2 个最优的 IGD 均值, SPEA2 和 OMOPSO 分别获得 1 个最优的 IGD 均值. 这表明 MOFAEOL 算法在 12 个测试问题中总体上具有较好的 IGD 性能. 而在 MOFAEOL 未能获得最优 IGD 均值的那些测试问题上, 本文算法所获得的 IGD 值与那些在同一测试函数上获得的最优的 IGD 均值始终处在相同的数量级上, 这也反映了 MOFAEOL 算法与那些在某些测试问题上表现最优的对等算法相比, 它们在 IGD 性能上的差距很小.

表 1 6 种对等算法在 12 个测试实例上的 IGD 性能对比结果

Test instance	MOFAEOL	NSGA-II	SPEA2	CMOPSO	OMOPSO	MOEA/D
ZDT1	Mean	1.45E-4	9.55E-5	2.31E-4	3.27E-4	2.39E-4
	Std.	5.92E-7	2.56E-7	1.50E-6	3.00E-6	1.60E-6
	t -test		-	+	+	+
ZDT2	Mean	1.05E-4	1.12E-4	3.20E-4	3.33E-3	1.14E-4
	Std.	4.71E-8	3.54E-7	2.88E-6	3.11E-4	3.10E-7
	t -test		+	+	+	+
ZDT3	Mean	2.51E-5	2.79E-5	2.55E-5	8.71E-4	1.06E-4
	Std.	1.19E-8	2.18E-8	1.82E-8	2.13E-5	3.18E-7
	t -test		+	+	+	+
ZDT4	Mean	1.48E-4	1.20E-4	5.03E-3	1.36E-3	1.55E-2
	Std.	6.17E-7	4.10E-7	7.10E-4	5.18E-5	6.76E-3
	t -test		-	+	+	+
ZDT6	Mean	8.26E-5	9.36E-5	8.02E-4	1.12E-3	1.22E-4
	Std.	4.2E-7	2.46E-7	1.80E-5	3.50E-5	1.91E-7
	t -test		+	+	+	+
DTLZ1	Mean	2.24E-4	2.62E-4	9.00E-4	1.01E-4	1.37E-2
	Std.	1.41E-7	1.92E-6	2.27E-5	2.87E-7	5.28E-3
	t -test		+	+	-	+
DTLZ2	Mean	1.78E-4	1.34E-4	1.95E-4	1.30E-4	2.12E-4
	Std.	8.92E-7	5.02E-7	1.06E-6	4.71E-7	1.27E-6
	t -test		+	+	-	+
DTLZ3	Mean	7.22E-4	3.09E-3	2.15E-3	1.67E-3	3.80E-3
	Std.	1.46E-5	2.68E-4	1.30E-4	7.91E-5	4.05E-4
	t -test		+	+	+	-
DTLZ4	Mean	2.55E-5	2.58E-5	7.21E-5	2.34E-5	9.35E-4
	Std.	1.82E-8	1.87E-8	1.46E-7	1.54E-8	2.45E-5
	t -test		+	-	-	+
DTLZ5	Mean	1.84E-4	9.55E-4	1.03E-4	9.42E-5	9.35E-4
	Std.	9.58E-7	2.56E-7	2.99E-7	2.48E-7	2.45E-5
	t -test		+	-	-	+
DTLZ6	Mean	6.65E-4	1.11E-3	1.30E-3	9.36E-5	7.31E-5
	Std.	1.24E-7	3.48E-5	4.74E-5	2.45E-7	1.50E-7
	t -test		+	+	-	-
DTLZ7	Mean	6.25E-4	8.70E-4	1.01E-3	7.86E-4	1.91E-3
	Std.	1.09E-5	2.12E-5	2.87E-5	1.73E-5	1.03E-4
	t -test		+	+	+	+
Better (+)		10	10	7	11	9
Same (=)		0	0	0	0	0
Worse (-)		2	2	5	1	3
Score		8	8	2	10	6

在表 1 的 t -检验结果中, MOFAEOL 算法对比其他 5 种算法的净胜得分均为正数, 其中, MOFAEOL 对比 OMOPSO 的净胜得分为 10, 对比 NSGA-II 和 SPEA2 的净胜得分为 8, 对比 MOEA/D 的净胜得分为 6, 对比 CMOPSO 的净胜得分为 2. 这表明 MOFAEOL 算法在所有测试问题上获得的总体 IGD 性能要显著优于另 5 种

对比算法. 当然, 根据没有免费午餐的定理, 不能期望 MOFAEOL 算法在每一个测试问题上都能获得最好的 IGD 值.

由于 IGD 性能指标能够同时反映算法的收敛性和多样性, 因此本文算法在所有对等比较算法中获得了最好的收敛性和多样性的折中效果, 说明 MOFAEOL 算法的精英反向学习策略和烟花爆炸方法相互协同, 较好地平衡了算法的勘探与开采的进化过程.

文献[24, 25]通过分析测试算法在所有测试问题上的性能指标排名均值和方差来比较算法的准确性 (accuracy) 和稳定性 (stability), 本文也采用这种方法进一步比较 6 种对等算法. 每一种比较算法在 12 个测试问题上均有一个 IGD 性能排名值, 设 $R_A = \{r_1, r_2, \dots, r_{|R|}\}$ 为算法 A 在 $|R|$ 个测试问题中排名的集合, 则算法 A 的准确性可用排名均值 $\mu_A = \frac{1}{|R|} \sum_{r \in R} r$ 表示, 而其稳定性可以用排名方差 $\sigma_A = \frac{1}{|R|} \sum_{r \in R} (r - \mu_A)^2$ 表示. 如果一个算法 A_1 的排名均值和排名方差均小于另一种对比算法 A_2 , 则可认为 A_1 的性能优于 A_2 .

这里给出了 6 种对等比较算法在 12 个测试函数上的排名均值和排名方差, 如图 2 所示.

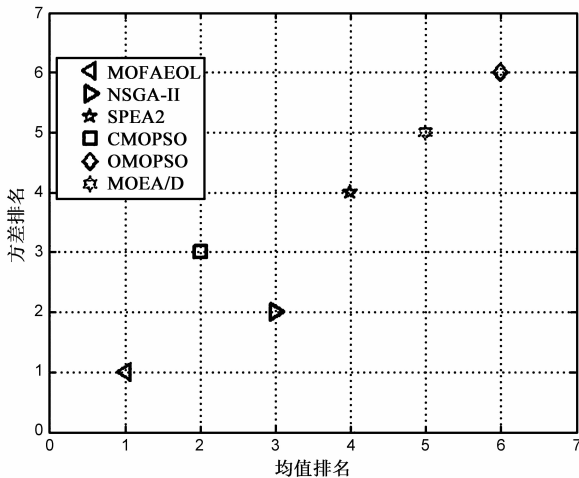


图2 6种对比算法在12个测试实例上的IGD综合均值与方差对比

从图 2 可以看出, MOFAEOL 算法的排名均值和排名方差确定的点位于左下角, 即本文算法的排名均值和排名方差占优了其他 5 种对比算法, 这也表明了 MOFAEOL 算法在所有对比算法中具有最好的准确性和稳定性.

表 1 和图 2 的实验结果反映出 MOFAEOL 算法总体上具有最好的多样性和收敛性. 究其原因, 该算法采用精英反向学习策略加强算法的全局搜索能力, 利用烟花爆炸方法增强算法局部搜索能力, 并利用简化的 k -最近邻策略保持解群的多样性, 这些策略相互协同, 较

好地解决了复杂 MOP 问题.

实验 2 为检验 MOFAEOL 算法中烟花爆炸优化方法有效性, 这里将 MOFAEOL 算法与剔除了烟花爆炸优化方法的 MOFAEOL 算法 (简记为 MOEOL 算法) 一起在 ZDT4、ZDT6、DTLZ1、DTLZ6 和 DTLZ7 测试实例上进行对比实验, 两算法取相同的实验参数. 表 2 给出了 MOFAEOL 算法与 MOEOL 算法在 IGD 性能指标上的实验结果.

表 2 MOFAEOL 与 MOEOL 在 6 个测试实例上的 IGD 性能对比结果

函数		MOFAEOL	MOEOL
ZDT4	Mean	1.48E-4	5.03E-3
	Std.	6.17E-7	7.08E-4
	t-test		+
ZDT6	Mean	1.22E-4	4.37E-3
	Std.	4.2E-7	5.35E-4
	t-test		+
DTLZ1	Mean	2.24E-4	1.02E-2
	Std.	1.41E-6	2.92E-3
	t-test		+
DTLZ3	Mean	7.22E-4	9.07E-3
	Std.	1.46E-5	2.31E-3
	t-test		+
DTLZ6	Mean	6.65E-4	1.67E-3
	Std.	1.24E-5	7.85E-5
	t-test		+
DTLZ7	Mean	6.25E-4	1.06E-3
	Std.	1.09E-5	3.14E-5
	t-test		+
Better (+)			6
Same (=)			0
Worse (-)			0
Score			6

从表 2 可以看出, MOFAEOL 在 6 个测试问题上获得了全部最优的 IGD 均值, 而去除烟花爆炸优化方法的 MOEOL 算法在 6 个测试问题上无一能获得最优的 IGD 均值. 表 2 的 t -检验结果中, MOFAEOL 对比 MOEOL 在 IGD 性能上的净胜得分为 6.

由此可见, 采用了烟花爆炸方法的 MOFAEOL 算法与未使用烟花爆炸方法的 MOEOL 算法相比, 在收敛性和多样性方面具有显著性的优势, 这也表明烟花爆炸优化方法在增强算法局部搜索能力, 提高解的精度方面发挥了重要的作用. 实验 2 的结果表明了烟花爆炸优化方法是有效的.

实验 3 为检验 MOFAEOL 算法中精英反向学习机制的作用, 这里将 MOFAEOL 算法与去除精英反向学习机制的 MOFAEOL 算法 (简记为 MOFA 算法) 一同在 ZDT4、ZDT6、DTLZ1、DTLZ3、DTLZ6 和 DTLZ7 测试函数上进行比较实验, 两算法的执行参数取相同的值. 表 3 给出了 MOFAEOL 算法与 MOFA 算法在 IGD 性能指标

上的实验结果.

表 3 MOFAEOL 与 MOFA 在 6 个测试实例上的 IGD 性能对比结果

函数		MOFAEOL	MOFA
ZDT4	Mean	1.48E-4	1.82E-4
	Std.	6.17E-7	9.26E-7
	t-test		+
ZDT6	Mean	1.22E-4	5.76E-4
	Std.	4.2E-7	9.29E-6
	t-test		+
DTLZ1	Mean	2.24E-4	2.55E-4
	Std.	1.41E-6	1.82E-6
	t-test		+
DTLZ3	Mean	7.22E-4	1.06E-3
	Std.	1.46E-5	3.12E-5
	t-test		+
DTLZ6	Mean	6.65E-4	1.33E-3
	Std.	1.24E-5	4.98E-5
	t-test		+
DTLZ7	Mean	6.25E-4	1.29E-3
	Std.	1.09E-5	4.68E-5
	t-test		+
Better(+)			6
Same(=)			0
Worse(-)			0
Score			6

从表 3 可以看出,MOFAEOL 算法在 6 个测试函数上获得了全部最优的 IGD 均值,而 MOFA 算法无一能获得最优的 IGD 均值.从表 3 的 t-检验结果来看,MOFAEOL 算法对比 MOFA 算法在 IGD 性能上的净胜得分为 6.由此可见,采用了精英反向学习策略的 MOFAEOL 算法较之未使用精英反向学习方法的 MOFA 算法具有显著性的 IGD 性能优势.这也表明精英反向学习策略在防止种群陷入局部最优,促进群体在更广的区域内搜索发挥了重要的作用.实验 3 的结果表明了精英反向学习策略的有效性.

5 结论

为更好地解决现实中日益复杂的多目标优化问题,将精英反向学习策略和烟花爆炸优化方法引入至多目标优化算法中,提出了一种应用精英反向学习的多目标烟花爆炸算法 MOFAEOL.该算法与另 5 种代表性多目标优化算法 NSGA-II、SPEA2、OMOPSO、CMOPSO 和 MOEA/D 一起在 12 个基准多目标测试函数集上进行 IGD 性能的比较实验,并分别就精英反向学习和烟花爆炸方法在多目标优化算法中的有效性进行了测试.实验结果表明 MOFAEOL 算法较之其他几种对比算法在总体上具有显著性的收敛性、多样性、准确性以及稳定性方面的优势,其中的精英反向学习和烟花爆炸方法在多目标优化算法中是有效的,二者相互协同,有

利于 MOFAEOL 算法较好地解决一些复杂的 MOP 问题.

参考文献

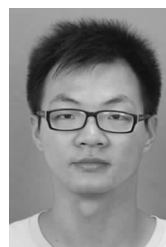
- [1] Deb K, Pratap A, Agarwal S, Meyarivan T. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182 - 197.
- [2] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm [A]. Giannakoglou K, Tsahalis DT, Periaux J, Papailious KD, Fogarty T, eds. Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial Problems [C]. Berlin: Springer-Verlag, 2002. 95 - 100.
- [3] Knowles J D, Corne D W. Approximating the non-dominated front using the pareto archived evolution strategy [J]. Evolutionary Computation, 2000, 8(2): 149 - 172.
- [4] Corne D W, Knowles J D, Oates M J. The Pareto-envelope based selection algorithm for multi-objective optimization [A]. Proceedings of the 6th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature [C]. Berlin: Springer, 2000: 869 - 878.
- [5] Corne D W, Jerram N R, Knowles J D, et al. PESA-II: Region-based selection in evolutionary multi-objective optimization [A]. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference [C]. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001. 283 - 290.
- [6] Coello C A, Pulido G T, Lechuga M S. Handling multiple objectives with particles swarm optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2004, 8(3): 256 - 279.
- [7] Sierra M R, Coello C A. Improving PSO-based multi-objective optimization using crowding, mutation and e-dominance [A]. Proceedings of 3rd International Conference on Evolutionary Multi-criterion Optimization [C]. Berlin: Springer, 2005. 505 - 519.
- [8] Zhang QF, Zhou AM, Jin Y. RM-MEDA: A regularity model based multi-objective estimation of distribution algorithm [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computations, 2007, 12(1): 1 - 23.
- [9] Zhang QF, Li H. MOEA/D: A multi-objective evolutionary algorithm based on decomposition [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2007, 11(6): 712 - 731.
- [10] Molina J, Laguna M, Marti R, Caballero R. SSPMO: A scatter tabu search procedure for non-linear multi-objective optimization [J]. Inform Journal Computing, 2007, 19(1): 91 - 100.
- [11] Soliman O, Bui L T, Abbass H. A Memetic Coevolutionary Multi-Objective Differential Evolution Algorithm in

- Multi-Objective Memetic Algorithm [M]. Berlin, Germany: Springer, 2009, 369 – 388.
- [12] 谢承旺, 邹秀芬, 夏学文, 等. 一种多策略融合的多目标粒子群优化算法 [J]. 电子学报, 2015, 43 (8): 1538 – 1544.
XIE Cheng-wang, ZOU Xiu-fen, XIA Xue-wen, et al. A multi-objective particle swarm optimization algorithm integrating multiply strategies [J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43 (8): 1538 – 1544. (in Chinese)
- [13] TAN Y, ZHU Y. Fireworks algorithms for optimization [A]. Proceedings of International Conference on Swarm Intelligence [C]. Piscataway: IEEE Press, 2010. 355 – 364.
- [14] 曹炬, 贾红, 李婷婷. 烟花爆炸优化算法 [J]. 计算机工程与科学, 2011, 33 (1): 138 – 142.
CAO Ju, JIA Hong, LI Ting-ting. A fireworks explosion optimization algorithm [J]. Computer Engineering & Science, 2011, 33 (1): 138 – 142. (in Chinese)
- [15] 曹炬, 季艳芳. 改进的烟花爆炸优化算法及其收敛性分析 [J]. 计算机工程与科学, 2012, 34 (1): 90 – 93.
CAO Ju, JI Yan-fang. An improved fireworks explosion optimization algorithm and its convergence analysis [J]. Computer Engineering & Science, 2012, 34 (1): 90 – 93. (in Chinese)
- [16] 曹炬, 李婷婷, 贾红. 带有遗传算子的烟花爆炸优化算法 [J]. 计算机工程, 2010, 36 (23): 149 – 151.
CAO Ju, LI Ting-ting, JIA Hong. Fireworks explosion optimization algorithm with genetic operators [J]. Computer Engineering, 2010, 36 (23): 149 – 151. (in Chinese)
- [17] 王培崇, 高文超, 钱旭, 等. 应用精英反向学习的混合烟花爆炸优化算法 [J]. 计算机应用, 2014, 34 (10): 2886 – 2890.
WANG Pei-chong, GAO Wen-chao, QIAN Xu, et al. Hybrid fireworks explosion algorithm using elite opposition-based learning [J]. Journal of Computer Applications, 2014, 34 (10): 2886 – 2890. (in Chinese)
- [18] Zheng Yu-Jun, Song Qin, Chen Sheng-Yong. Multi-objective fireworks optimization for variable-rate fertilization in oil crop production [J]. Applied Soft Computing, 2013, 13 (11): 4253 – 4263.
- [19] Tizhoosh H R. Opposition-based learning: A new scheme for machine intelligence [A]. Proceedings of International Conference on Computational Intelligence for Modeling Control and Automation [C]. USA: IEEE, 2005. 695 – 701.
- [20] 周新宇, 吴志健, 王晖, 等. 一种精英反向学习的粒子群优化算法 [J]. 电子学报, 2013, 41 (8): 1647 – 1652.
ZHOU Xin-yu, WU Zhi-jian, WANG Hui, et al. Elite opposition-based particle swarm optimization [J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41 (8): 1647 – 1652. (in Chinese)
- [21] 鲍培明, 朱庆保. 用于多目标进化的归一化排序非支配集构造方法 [J]. 电子学报, 2009, 37 (9): 2010 – 2015.
BAO Pei-ming, ZHU Qing-bao. A technique of building non-dominated set based on normalized sort in evolutionary multi-objective optimization [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37 (9): 2010 – 2015. (in Chinese)
- [22] Zitzler E, Deb K, Thiele L. Comparison of multi-objective evolutionary algorithms: Empirical results. Evolutionary Computation, 2000, 8 (2): 173 – 195.
- [23] Deb K, Thiele L, Laumanns M, Zitzler E. Scalable multi-objective optimization test problems [A]. Fogel DB, eds. Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC) [C]. Piscataway: IEEE Service Center, 2002. 825 – 830.
- [24] Chow CK, Yuen SY. A multi-objective evolutionary algorithm that diversifies population by its density [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2012, 16 (2): 149 – 172.
- [25] 胡旺, Yen GG, 张鑫. 基于 Pareto 熵的多目标粒子群优化算法 [J]. 软件学报, 2014, 25 (5): 1025 – 1050.
Hu W, Yen GG, Zhang X. Multiobjective particle swarm optimization based on Pareto entropy [J]. Journal of Software, 2014, 25 (5): 1025 – 1050. (in Chinese)

作者简介



谢承旺 男, 1974 年 10 月出生, 湖北武汉人, 副教授、硕士生导师、中国计算机学会高级会员. 2005 年、2010 年分别在武汉理工大学、武汉大学获得工学硕士和工学博士学位, 2015 年从武汉大学数学博士后流动站出站. 现主要从事智能计算与智能信息处理方面的研究工作.
E-mail: chengwangxie@163.com



许雷 男, 1989 年 1 月出生, 湖北咸宁人, 硕士研究生. 主要从事智能计算方面的研究.
E-mail: 13077911256@163.com

赵怀瑞 男, 1977 年 11 月出生, 山东临沂人, 博士、讲师. 2007 年、2012 年分别在大连交通大学、北京交通大学获得硕士和博士学位. 主要从事车辆结构优化方面的研究工作.

夏学文 男, 1974 年 8 月出生, 湖北孝感人, 博士、副教授、硕士生导师. 主要从事智能计算及其应用方面的研究.

魏波 男, 1983 年 1 月出生, 湖北天门人, 博士、讲师. 主要从事演化计算方面的研究.