

一种基于 Duffing 系统的信号检测与参数估计新方法

王慧武, 丛 超

(哈尔滨电工仪表研究所, 黑龙江哈尔滨 150028)

摘 要: 为了给出一种基于 Duffing 系统的完整信号检测与估计方法, 本文采用了耦合型间歇混沌振子, 并引入了变尺度方法, 以实现仅用单个 Duffing 振子完成对未知频率具有任意出相位的正弦信号的检测与频率估计. 此外本文还提出了一种新的正弦信号幅值、相位同步估计方法, 并综合方法原理和仿真实验结果证明了此方法具有估计精度高、抗噪声干扰能力强和实时性好的优点. 最后用一组仿真实验结果验证了本文所提出的检测方法的有效性和估计方法的准确度.

关键词: 混沌振子; 变尺度; 正弦信号检测; 低信噪比; 参数估计

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)06-1450-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.06.028

A New Signal Detection and Estimation Method by Using Duffing System

WANG Hui-wu, CONG Chao

(Harbin Research Institute of Electrical Instruments, Harbin, Heilongjiang 150028, China)

Abstract: In order to give a complete signal detection and estimation method based on Duffing system, this paper uses the coupling Duffing oscillator, and introduces the variable scale method, to detect and estimate the sinusoidal signal with unknown frequency and arbitrary phase just by one Duffing oscillator. Besides, this paper puts forward a simplified method which is based on chaotic oscillator for estimating the amplitude and phase of the signal to be measured, and integrated method principle and the simulation experiment result proves that this method has high estimation precision, strong ability to resist noise interference and the advantages of good real-time performance. Finally, using a simulation result of an analog signal for verifying the availability and accuracy of the detection and estimation method is proposed.

Key words: chaotic oscillator; variable scale; sine signal detection; low signal to noise ratio; high precision estimation

1 引言

基于 Duffing 振子的弱信号检测方法是近年来得到快速发展的一种能在超低信噪比下有效检测弱信号的新方法, 因其所采用的渐软斥力型 Duffing 方程同时具备了对微弱周期信号敏感和抗噪声干扰能力强的特性, 所以此方法得到了各领域学者的广泛关注和深入研究^[1]. 在基于 Duffing 振子的信号检测方面: 1996 年王冠宇^[2]首次提出基于 Duffing 振子的信号检测方法, 并给出了可行有效的检测模型; 2003 年李月等^[3,4]通过引入高阶非线性项和采用耦合振子, 进一步提高了 Duffing 振子的抗噪声特性; 2012 年冷永刚^[5]等通过引入变尺度方法, 实现了在固定 Duffing 振子系统参数的条件下完成对任意频率信号检测. 2014 年李秀坤^[6]等

分析了不同内置策动力频率下的 Duffing 振子的弱信号检测灵敏度, 并结合变尺度方法进一步增强了 Duffing 振子的弱信号检测性能. 在应用 Duffing 振子进行信号参数估计方面的研究主要形成了两种思路: 一种是应用间歇混沌振子列方法进行未知频率的信号参数估计^[7-10], 另一种方法则是在已知待测信号频率的条件下应用相态跃变型混沌振子对待测信号进行幅值和相位估计^[11-15].

目前在基于 Duffing 振子的信号检测研究方面已有较为成熟的方法, 对信号的参数估计也有很多思路和尝试, 但尚未有一种可以兼顾信号检测和完整参数估计的混沌振子类方法^[16-18]. 针对这一问题, 本文通过对现有混沌检测方法进行综合和改进, 给出了一种变步长双耦合型间歇混沌振子, 以实现仅用单个 Duffing

振子完成对任意频率待测信号的检测和频率估计. 在此基础上本文还提出一种新的基于相态跃变型 Duffing 振子的信号幅值和相位同步估计方法, 并通过一组仿真实验结果验证了综合以上两种方法可实现对频率未知具有任意初相位的正弦信号的有效检测和高精度参数估计.

2 基于变步长双耦合型间歇混沌振子的信号检测与频率估计

2.1 双耦合型 Duffing 振子的系统特性

为了提高 Duffing 系统的弱信号检测性能, 文献[5]提出了双耦合 Duffing 系统. 双耦合 Duffing 系统利用两个单 Duffing 振子互相联系、互相控制的工作过程, 提高系统在临界分岔处的稳定性, 可以看做是一种高稳定性的改进型 Duffing 振子, 其检测系统数学模型为:

$$\begin{cases} \dot{x}'' + \mu x' - c\mu(y - x) - x + x^3 = A\cos(\omega t) \\ \dot{y}'' + \mu y' - c\mu(x - y) - y + y^3 = A\cos(\omega t) \\ \quad + a\cos((\omega + \Delta\omega)t + \varphi) + n(t) \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中 c 为耦合系数, μ 为阻尼系数, $y(t)$ 为系统的外加输入信号, 其中包括待测信号 $s(t)$ 和噪声信号 $n(t)$. 文献[5]通过大量仿真实验证明了双耦合 Duffing 系统的动态特性与单 Duffing 系统相似, 且在 $\mu = 0.5$, $\gamma(t) = \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma a\cos(\Delta\omega t + \varphi) + a^2}$ 的条件下, 两系统变量 $\theta(t) = \arctan \frac{a\sin(\Delta\omega t + \varphi)}{\gamma + a\cos(\Delta\omega t + \varphi)}$, $\Delta\omega$ 会在耦合作用的影响下迅速趋于同步, 相较于单 Duffing 振子具有更高的系统稳定性和抗噪声能力. 为应用双耦合 Duffing 振子对未知频率信号进行检测和频率估计, 本节着重针对双耦合振子的间歇混沌现象进行分析. 如果将式(1)中内置策动力幅值设定为临界值 γ (在 $\mu = 0.5$, $\gamma(t) = \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma a\cos(\Delta\omega t + \varphi) + a^2}$ 的条件下系统阈值为 0.826, γ 略小于 0.826), 由式(1)可得此时系统策动力合力幅值为

$$\gamma(t) = \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma a\cos(\Delta\omega t + \varphi) + a^2} \quad (2)$$

观察式(2)可知, 合力幅值会以 $2\pi/\Delta\omega$ 为周期在 $(\gamma - a, \gamma + a)$ 间变化, 且有 $\gamma - a < \gamma_d, \gamma + a > \gamma_d$, 相应的系统输出即为间歇混沌态. 根据文献[12]的研究结果, 双耦合 Duffing 振子出现间歇混沌的条件为 $|\Delta\omega/\omega| \leq 0.03$, 并据此提出了双耦合间歇混沌振子列方法, 此方法理论上可以实现对未知频率周期信号的检测, 但由于需要设定大量振子来覆盖待测信号所在频段, 且不能将内置信号固定在低频, 所以存在复杂度高和可靠性低的问题.

为了解决上述两个问题, 本文将文献[8]提出的变尺度方法与双耦合型 Duffing 振子相结合, 进而可以只

用一个参数固定的 Duffing 振子实现对未知频率周期信号的检测. 设系统内置信号角频率为 ω_0 , 对于角频率为 ω_1 , 采样频率为 f_s 的待测信号, 常规的系统求解步长为 $1/f_s$, 但是如果将系统求解步长设置为 $\frac{\omega_1}{\omega_0 \cdot f_s}$ 时, 则相当于对待测信号在时间轴上进行了 ω_1/ω_0 倍的变换, 进而使其与内置信号的相对角频率变为了 1:1, 此条件下待测信号对系统输出相态的影响等效于与内置策动力同频的信号. 这意味着对于内置信号角频率为 ω 的双耦合型 Duffing 振子, 可以通过变换系统求解步长使频率不在 $(1 \pm 0.03)\omega$ 范围内的待测信号也能使系统出现间歇混沌现象. 据此本文提出了一种基于双耦合间歇混沌振子的未知频率正弦信号检测方法:

(1) 以 1.03 为公比设定一组能够覆盖待测信号所在频段的系统求解步长序列 a_n .

(2) 通过 MATLAB 软件对 Duffing 系统进行编程仿真实现, 将待测数据加入到 Duffing 系统内置策动力项中, 并采用四阶龙格库塔数值解法对 Duffing 方程输出信号进行求解, 根据步骤 1 所设定的系统求解步长序列依次调整计算步长.

(3) 观察不同计算步长时的系统时域输出信号, 若有某连续两次的时域输出为标准的间歇混沌状态, 则表明在此两个步长对应的频段间存在待测信号.

由于上述变步长双耦合间歇混沌振子的检测准确性不受待测信号初相位的影响, 所以理论上变步长双耦合型间歇混沌振子可以对未知频率具有任意出相位的正弦信号进行有效检测.

2.2 对待测信号的频率估计

根据双耦合型 Duffing 振子的检测系统模型式(1), 当把频率为 $\omega_0 = \omega + \Delta\omega$ 的待测信号加入到检测系统中, 并使系统输出间歇混沌信号时, 系统策动力合力的幅值表达式为式(2), 观察式(2)可知由于频差 $\Delta\omega$ 的存在使得策动力幅值将以 $2\pi/\Delta\omega$ 的周期进行变化, 与之相应的系统输出的间歇混沌信号的周期时长 $T = 2\pi/\Delta\omega$. 如果可以准确的测量系统输出的间歇混沌信号的周期 T , 就可以准确估算出待测信号频率. 对于适应步长型间歇混沌振子, 设采样频率为 f_s 待测信号在步长为 a_0 时可使系统输出间歇混沌信号, 且 Duffing 系统输出的间歇混沌信号的一个周期长为 T (T 可通过测量系统时域输出信号确定), 则待测信号的频率估计值为

$$\omega_1 = a_0 f_s (\omega_0 + 2\pi/T) \quad (3)$$

式(3)中 ω_0 为系统内置信号角频率.

3 对待测信号幅值和相位的估计

为解决待测信号的幅值和相位的估计问题, 本文提出了一种基于相态跃变型混沌振子的待测信号相位

和幅值的同步估计方法,此方法的信号检测模型为

$$\begin{cases} \dot{x}' = \omega y \\ \dot{y}' = \omega(x - 0.5y - x^3 + \gamma_0 \cos(\omega t + \theta) + a \cos(\omega t + \varphi) + n(t)) \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\gamma_0 \cos(\omega t + \theta)$ 为系统内置策动力 (γ_0 略小于系统阈值 γ_d), $a \cos(\omega t + \varphi)$ 为待测信号, $n(t)$ 为噪声, 此时的系统处于混沌临界态, 当有同频信号加入到系统中时, 系统即会跃入到大尺度周期态. 理论上, Duffing 振子进入大尺度周期态的条件为式(4)中的策动力幅值满足下式:

$$\gamma(t) = \sqrt{\gamma_0^2 + 2\gamma_0 a \cos(\theta - \varphi) + a^2} \geq \gamma_d \quad (5)$$

式(5)中 γ_d 为系统策动力阈值. 如果用 γ_a 代表系统刚好由混沌态跃变到周期态的内置策动力幅值, 则有

$$\sqrt{\gamma_a^2 + 2\gamma_a a \cos(\theta - \varphi) + a^2} = \gamma_d \quad (6)$$

如果再建立起至少一个关于 a 和 φ 的类似式(6)的方程, 则可通过求解二元函数方程组来对待测信号的幅值和相位进行估算. 基于以上考虑, 本文通过改变内置策动力的初相位来建立起关于 a 和 φ 的二元函数方程组, 进而实现对待测信号幅值和相位的同步估计. 具体方法为: 首先根据待测信号频率估计结果对式(4)的系统参数进行设定, 然后分别将待测信号加入到内置策动力初相位为 0 和 π 的检测系统中, 再通过调整内置策动力幅值, 并观察系统相态变化来确定每个检测系统发生相态跃变时的内置策动力值. 如果用 γ_1 和 γ_2 分别代表初相位为 0 和 π 的检测系统的相态发生跃变时的内置策动力幅值, 则关于相位 φ 和幅值 a 的 2 元 2 次方程组可表示为

$$\begin{cases} \sqrt{\gamma_1^2 + 2\gamma_1 a \cos \varphi + a^2} = \gamma_d \\ \sqrt{\gamma_2^2 - 2\gamma_2 a \cos \varphi + a^2} = \gamma_d \end{cases} \quad (7)$$

对其求解可得

$$\begin{cases} a = \sqrt{\gamma_d^2 - \gamma_1 \gamma_2} \\ \varphi = \arccos\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\sqrt{\gamma_d^2 - \gamma_1 \gamma_2}}\right) \end{cases} \quad (8)$$

式(8)就是相位 φ 和幅值 a 的估计计算式. 观察式(8)可知, 此方法的估计准确度很依赖于检测系统对同频弱信号的灵敏度, 为提高估计精度本文将系统内置信号角频率固定在 0.4 rad/s 处, 此条件下 Duffing 方程对微弱正弦信号的灵敏度最高, 在检测信噪比低至 -37 dB 的情况下仍可以准确分辨出幅度为 0.001 的正弦信号变化.

为了提高这种基于相态跃变型混沌振子的参数估计方法的实时性, 并减少由观察相图产生的主观性及操作不便性, 本文采用系统检测模型式(4)的类 Halmition 系统检测统计量:

$$T_l = \frac{\omega}{N+1} \sum_{t_i=t_0}^{t_s} (y_{t_i}^2/2 + \mu x_{t_i} y_{t_i} - x_{t_i}^2/2 + x_{t_i}^4/4 + F \sin(\omega t_i)/\omega) \quad (9)$$

作为系统相变的判据, 而取代常规的相图观察法. 式(9)由文献[15]提出, 式(9)中 x_{t_i}, y_{t_i} 代表式(4)在 t_i 时刻的系统输出, N 为采样点数, 对于变尺度型 Duffing 振子应满足 $N \geq \frac{2\pi \cdot f_s}{\omega}$, ω 为待测信号频率, f_s 为待测信号采样频率. 文献[15]综合理论分析和仿真实验结果证明了检测系统在不同相态下的类 Halmition 检测统计量值的分布区间具有明显差异. 为了得到准确的系统相变判据, 本文对内置策动力频率为 0.4 rad/s 的变尺度混沌振子的类 Halmition 检测统计量随策动力幅值的变化关系进行了仿真研究. 实验数据中选择了策动力幅值 0.800 到 0.834 段, 并以 0.001 为间隔依次计算了此数据段的检测统计量. 取 $\mu = 0.5$ 、仿真步长为 0.05 、仿真长度为 10000 、检测系统的初始值 $(0, 1)$, 数值计算结果如图 1 所示. 综合观察图 1 和图 2 可知: 变尺度型混沌振子在策动力幅值由 0.825 变为 0.826 时相态由混沌态跃变为周期态, 相应的类 Halmition 检测统计量由 0.43 跳变为 0.63 , 据此可得基于检测统计量式(11)的变尺度型混沌振子的相态跃变判据为: (1) 由混沌态跃变到周期态: 检测统计量由 $T_1 (T_1 \leq 0.43)$ 到 $T_2 (T_2 \geq 0.63)$. (2) 由周期态跃变到混沌态: 检测统计量由 T_2 到 T_1 .

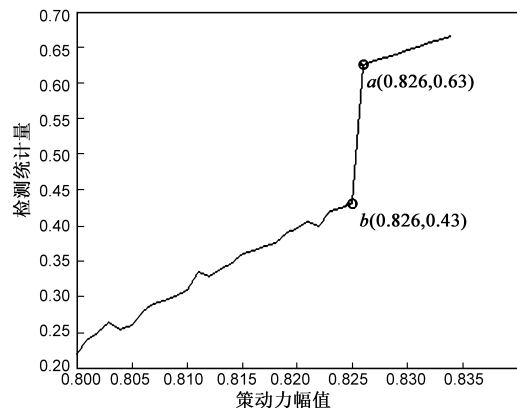


图1 变尺度混沌振子在策动力(0.800 0.834)段对应的检测统计量值

下面以一组仿真实例来对这种基于混沌振子的信号幅值和相位同步估计方法进行说明和验证. 仿真条件: 待测信号为采样频率 1600 Hz 正弦信号 $0.15 \times \cos(10 \times t + \pi/3)$, 噪声为方差是 $\sigma^2 = 1$ 的高斯白噪声, 此时的检测信噪比约为 $\text{SNR} = -10 \lg\left(\frac{0.15^2}{1}\right) \approx -18 \text{ dB}$. 对信号幅值和相位进行估计的步骤为:

(1) 将内置信号角频率固定在 0.4 rad/s , 并将变尺

度系数设定为待测信号频率。

(2)分别将待测信号加入到内置策动力初相位为 0 和 π 的检测系统中,并计算系统检测统计量,判断系统相态。

(3)通过编程实现下述功能:若检测统计量处于 T_1 ,则以 0.001 的变化幅度逐渐增大内置策动力幅值,直至系统检测统计量变为 T_2 ,输出并记下此时的内置策动力幅值 γ ;若系统检测统计量处于若检测统计量处于 T_2 ,则以 0.001 的变化幅度逐渐减小内置策动力幅值,直至系统检测统计量建委若检测统计量处于 T_1 ,输出并记下此时的内置策动力幅值 γ 。

(4)将初相位为 0 的检测系统相态跃变时的内置策动力幅值 γ_1 和初相位为 π 的检测系统跃变时的内置策动力幅值 γ_2 代入公式(8),计算待测信号幅值和相位的估计值。

应用上述方法得到检测步骤 3 的输出为 $\gamma_1 = 0.746, \gamma_2 = 0.886$ 。将 γ_1 和 γ_2 代入公式(8)算得待测信号的幅值和相位的估计值分别为 0.149 和 1.034rad/s, 相对估计误差分别为 0.006 和 0.008。为了可以直观的显示检测系统的检测统计量变化规律,本文根据程序

计算输出结果画出了检测统计量随内置策动力幅值的变化关系图,通过图 3 可明显观察到系统相态发生跃变时对应的的内置策动力幅值。

4 仿真实验

4.1 信号检测与估计

为了验证变尺度双耦合型间歇混沌振子抗噪声干扰能力强、能对多频正弦信号进行准确检测与频率估计,以及混沌振子可以在低信噪比条件下对信号的幅值和相位进行高精度估计,设定仿真信号为

$$s(t) = 0.5 \times \cos(2\pi \times 10t + \pi/6) + 0.02\cos(2\pi \times 50t + \pi/3) + 0.2 \times \cos(2\pi \times 55t + \pi/4) + n(t).$$

仿真信号中包含了 10Hz、50Hz 和 55Hz 三种频率的正弦信号以及方差 $\sigma^2 = 1$ 的高斯白噪声 $n(t)$,待测信号的采样频率为 1600Hz,此条件下 50Hz 谐波的检测信噪比 $SNR = -10\lg(\frac{0.02^2}{1}) \approx -34\text{dB}$ 。图 4 为待测信号的频谱图。首先应用变尺度双耦合间歇混沌振子对待

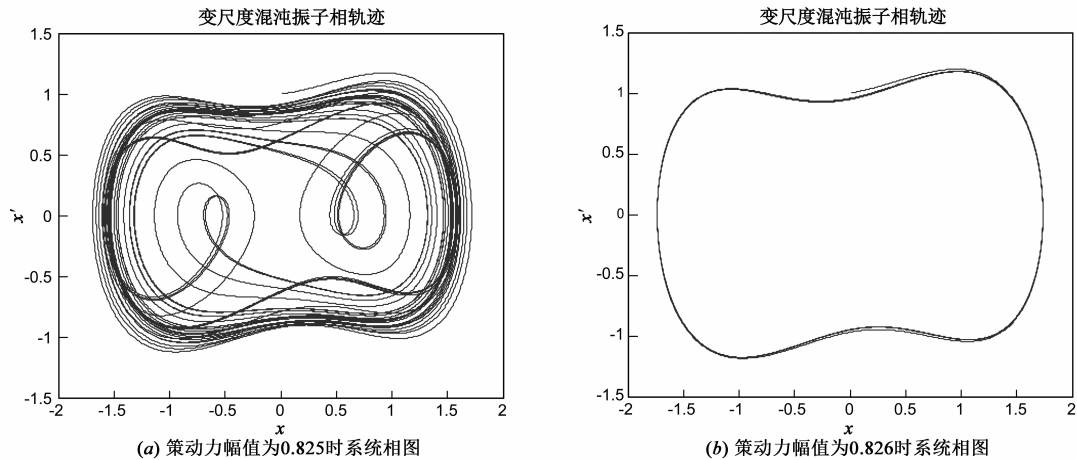


图2 变尺度混沌振子相图

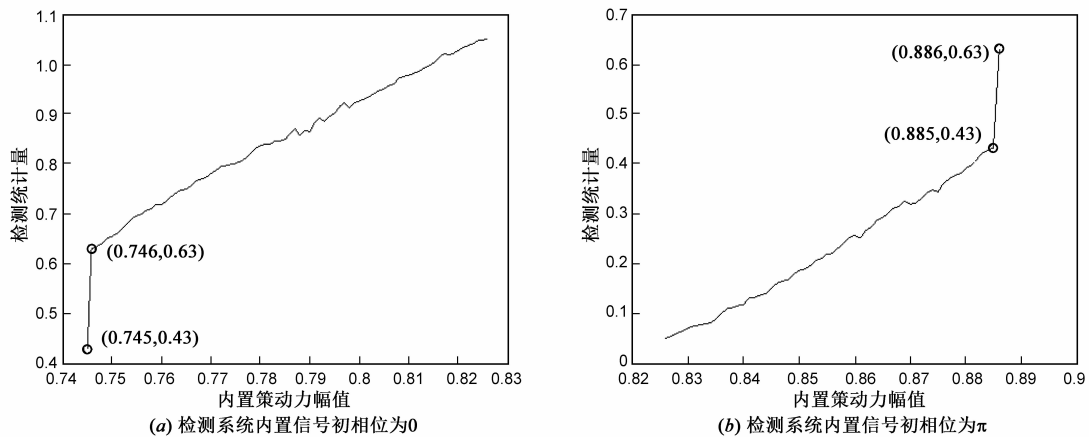


图3 检测系统的类Halmition检测统计量随内置策动力幅值的变化关系图

测信号进行检测和频率估计,具体检测步骤如 2.1 节和 2.2 节所述,其系统求解步长序列为 $a_n = \frac{2\pi \times 1 \times 1.03n^{-1}}{0.4f_s} (1 \times 1.03^{156} \approx 100, n = 1 \sim 157)$ 上述序列可覆盖待测信号频段为 1 ~ 100Hz,如果需要扩大范围可增加 n 的取值上限.

通过观察检测系统在预设的各求解步长处时域的时域输出信号,发现检测系统分别在系统求解步长 a_{78} 和 a_{79} 、 a_{133} 和 a_{134} 、 a_{136} 和 a_{137} 处输出了间歇混沌信号,其他步长均为混沌态输出,信号波形与图 5 输出信号相仿,图 6 ~ 8 为检测过程系统输出的间歇混沌信号.

综合图 6 提供的系统时域输出和变步长间歇混沌振子的判定标准可知,求解步长 a_{78} 、 a_{79} 间存在待测信号. 由于加入检测系统中的待测信号是经过采样后的离散信号,所以输出信号的横坐标是采样点数,为了便于应用公式(3)对其进行频率估计,需要将其换算为相应的时间长度. 在本例中,对于求解步长为 a_n 、采样长度为 N 的输出信号,其所对应的时间长度 T_N 为

$$T_N = a_n \cdot N \quad (10)$$

每个待测信号对应两个有效检测步长,可任选一

个步长处输出信号对待测信号频率进行估计. 此处以图 6 中(b)图(即系统求解步长为 a_{79} 处的系统输出信号)为例,图 6(b)中为 3 个完整周期的间歇混沌信号,通过观察用 MATLAB 工具放大后的系统时域输出信号测得一个周期的间歇混沌信号的总采样点数约为 5180,将其依次带入式(10)和式(3)计算可得待测信号频率估计值为 10.01Hz.

图 7 和图 8 分别为检测系统在求解步长 a_{78} 和 a_{79} 、 a_{133} 和 a_{134} 、 a_{136} 和 a_{137} 处连续输出的间歇混沌信号,由适应步长型间歇混沌振子的判定标准可知,在此相邻步长之间存在待测信号,并按照对图 7 中待测信号的估计步骤对检测出的信号进行频率估计,待测信号频率估计结果如表 1.

表 1 信号频率估计结果

待测信号频率	频率估计值	相对误差
10Hz	10.01Hz	0.1%
50Hz	49.97Hz	0.6%
55Hz	55.33Hz	0.6%

观察图 6 ~ 8 和表 1 可知,变尺度双耦合振子有效

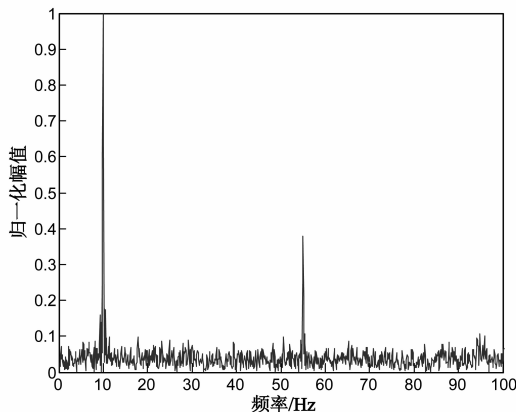


图4 待测信号频谱图

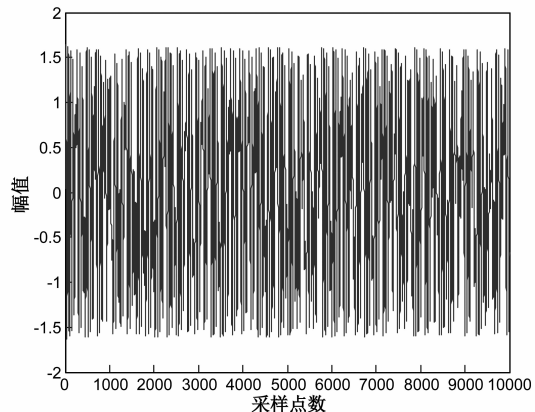
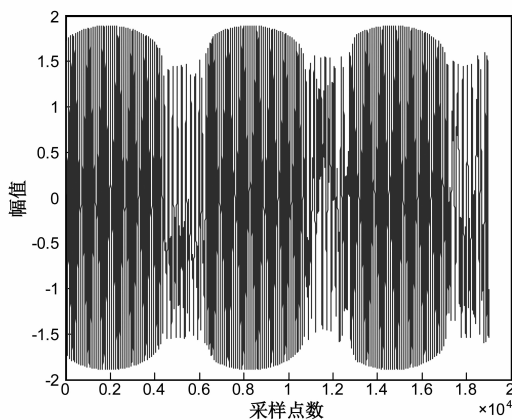
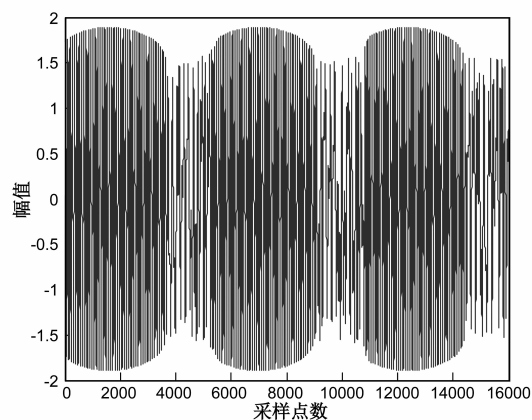


图5 检测系统混沌态时域输出

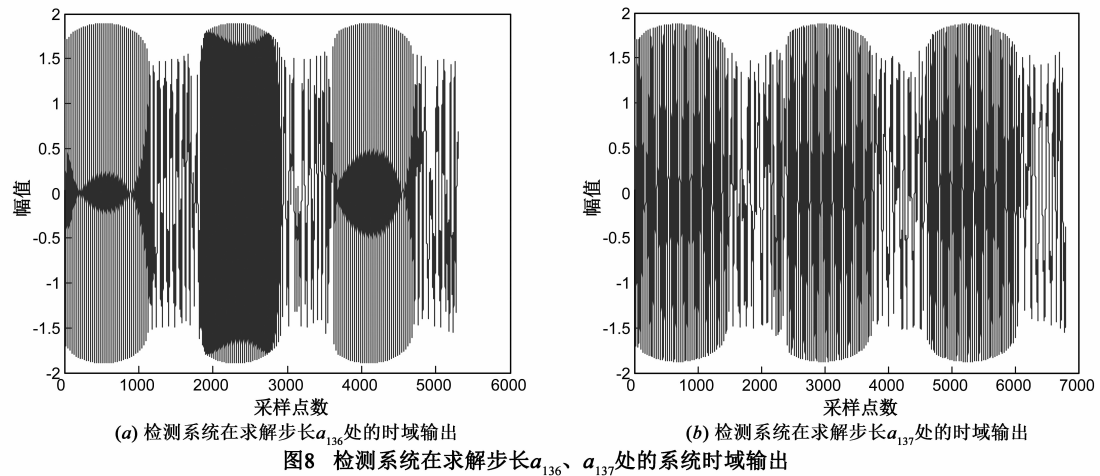
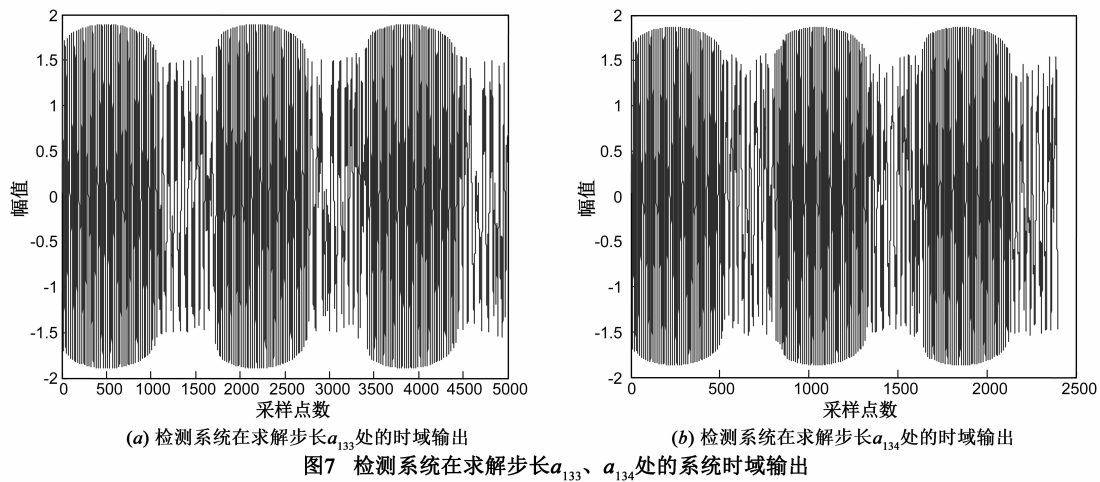


(a) 检测系统在求解步长 a_{78} 处的时域输出



(b) 检测系统在求解步长 a_{79} 处的时域输出

图6 检测系统在求解步长 a_{78} 、 a_{79} 处输出的间歇混沌信号



地检测出了待测信号中所包含的待测信号. 表 1 为应用 2.2 节介绍的频率估计方法对待测信号的频率估计结果,由表中的频率估计结果可知,此方法的频率估计值具有较高的估计精度,在-34dB 条件下频率估计值得相对误差仍可以达到 10^{-3} .

4.2 对待测信号幅值和相位的估计

根据信号检测和频率估计结果再进行幅值和相位估计,具体步骤已在第 3 节进行了详细说明,此处不再重述. 各待测信号幅值和相位参数的估计结果如表 2,观察表中幅值和相位估计结果可知,此方法在噪声强度较高信噪比降到-34dB 时仍可以对谐波信号进行有效检测,且参数估计相对误差可以稳定在 10^{-2} .

表 2 信号幅值和相位估计结果

信号频率	10Hz	50Hz	55Hz
γ_1	0.356	0.817	0.674
γ_2	1.218	0.834	0.956
幅值	0.498	0.019	0.197
相对误差	0.4%	5.0%	0.6%
相位	0.519	1.065	0.790
相对误差	0.1%	1.8%	0.7%

5 结论

本文提出了一种变尺度性双耦合间歇混沌振子,并给出了基于此方法的正弦信号频率估计公式,进而可以只用单个 Duffing 振子实现低信噪比下,对未知频率正弦信号的有效检测和高精度频率估计.

为了完成对信号幅值和相位的估计,本文还提出了一种基于相态跃变型混沌振子的针对已知频率正弦信号的幅值和相位同步估计方法,且为了减少由相图观察法带来的主观性、操作不便性并提高方法的实时性,采用了类 Halmiton 检测统计量作为系统相变判据,并通过仿真实验结果证明了此方法在低信噪比下仍具有较高估计精度.

最后通过一组含有频率相近的正弦信号和低信噪比条件下的正弦信号的仿真数据的实验结果,验证了本文所提出的信号检测方法能够在低信噪比下,对未知频率具有任意初相位的正弦信号进行有效检测,且能有效分辨出频率相近的信号,以及本文所提出的参数估计方法在低信噪比条件下的有效性和高准确度.

参考文献

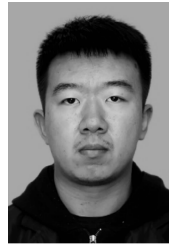
- [1] Guanyu Wang, Wei Zheng, Sailling He. Estimation of amplitude and phase of a weak signal by using the property of sensitive dependence initial conditions of a nonlinear oscillator[J]. *Signal Processing*, 2002, 82:103 – 115.
- [2] 王冠宇,陶国良,陈行,等.混沌振子在强噪声背景信号检测中的应用[J]. *仪器仪表学报*, 1997, 18(2):209 – 212.
Wang Guan-yu, Tao Liang-xing, Chen Xing, et al. Application of chaotic oscillators in the strong background noise in signal detection [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 1997, 18(2):209 – 212. (in Chinese)
- [3] 李月,石要武,马海涛,杨宝俊.湮没在色噪声背景下微弱微弱信号的混沌检测方法[J]. *电子学报*, 2004, 32(1):87 – 90.
Li Yue, Shi Yaowu, Ma Haitao, Yang Baojun. Chaotic detection method for weak square wave signal submerged in colored noise [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2004, 32(1):87 – 90. (in Chinese)
- [4] 代理,李建,郑豫,孙涛.基于双耦合 Duffing 振子的随机相位正弦信号检测[J]. *成都信息工程学报*, 2008, 23(1):50 – 53.
Dai Li, Li Jian, Zheng You, Sun Tao. Detection of phase randomly distributed weak sinusoidal based on double coupled Duffing oscillators[J]. *Journal of Chengdu University of Information Technology*, 2008, 23(1):50 – 53. (in Chinese)
- [5] 李月,路鹏,杨宝俊,赵雪平.用一类特定的双耦合 Duffing 振子系统检测强噪声背景下的周期信号[J]. *物理学报*, 2006, 55(4):1672 – 1677.
Li Yue, Lu Peng, Yang Baojun, Zhao Xueping. Applying a special kind of two coupled Duffing oscillator to detect periodic signals under the background of strong colored noise [J]. *Acta Physics Sinica*, 2006, 55(4):1672 – 1677. (in Chinese)
- [6] 丛超,李秀坤,宋阳,一种基于新型间歇混沌振子的舰船线谱检测方法[J]. *物理学报*, 2014, 63(6):064301 – 064311.
Cong Chao, Li Xiukun, Song Yang. A ship line spectrum detection method based on intermittent chaotic oscillator model[J]. *Acta Physics Sinica*, 2014, 63(6):064301 – 064311. (in Chinese)
- [7] 杨涛,陈治纲,邵惠鹤.一种可完全线性化的不同类型混沌系统同步方法[J]. *电子学报*, 2002, 30(10):1 – 3.
Yang Tao, Chen Zhi-gang, Shao Hui-he. Synchronization of fully linearizable different chaotic systems[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2002, 30(10):1-3. (in Chinese)
- [8] 赖智慧,冷永刚,孙建桥,范胜波.基于 Duffing 振子的变尺度微弱特征信号检测方法研究[J]. *物理学报*, 2012, 61(5):1 – 9.
Lai Zhihui, Leng Yonggang, Sun Jianqiao, Fan Shengbo. Study on detection method for weak signal based on variable scale Duffing oscillator[J]. *Acta Physics Sinica*, 2012, 61(5):1 – 9. (in Chinese)
- [9] 刘海波,吴德伟.基于 Duffing 振子大尺度周期态相轨迹的频率测量方法[J]. *电子学报*, 2013, 41(10):2010 – 2015.
Liu Haibo, Wu Dewei. A new frequency measuring method by using Duffing oscillator's phase trajectory in great periodic motion[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2013, 41(10):2010 – 2015. (in Chinese)
- [10] 葛晓慧,黄进.利用 Duffing 振子估计多频信号参数[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2008, 42(6):954 – 959.
Ge Xiaohui, Huang Jin. Parameter estimation of multi-frequency signal by using Duffing oscillator[J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2008, 42(6):954 – 959. (in Chinese)
- [11] 姜万禄,吴胜强,张建成. Duffing 振子的两种信号检测微弱信号的方法及区别[J]. *燕山大学学报*, 2002, 26(2):114 – 118.
Jiang Wan-lu, Wu Sheng-qiang, Zhang Jian-cheng. Two methods of weak signal detection of Duffing oscillator and their differences [J]. *Journal of Yanshan University*, 2002, 26(2):114 – 118. (in Chinese)
- [12] 杨东升,李乐,杨珺,汪刚.基于双耦合混沌振子的未知频率信号检测[J]. *东北大学学报(自然科学版)*, 2012, 33(9):1726 – 1730.
Yang Dongsheng, Li Yue, Yang Jun, Wang Gang. Detection of the weak signal with unknown frequency based on the coupled chaos oscillator [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2012, 33(9):1726 – 1730. (in Chinese)
- [13] 芮国胜,张洋,苗俊,等.联合增益递推的 Duffing 系统弱信号检测算法[J]. *电子学报*, 2012, 40(6):1269 – 1273.
Rui Guo-sheng, Zhang Yang, Miao Jun, et al. A weak signal detection method by Duffing system with the gain [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2012, 40(6):1269 – 127. (in Chinese)
- [14] Kennedy M K. Digital communications using chaos [J]. *Signal Processing*, 2000, 80:1307 – 1320.
- [15] 牛德智,陈长兴. Duffing 振子微弱信号检测盲区消除及检测统计量构造[J]. *物理学报*, 2015, 64(6):060503.
Niu Dezhi, Chen Changxing. Blind angle elimination method in weak signal detection with Duffing oscillator and construction of detection static[J]. *Acta Phys Sinica*, 2015, 64(6):060503. (in Chinese)

- [16] 韩建群. 一种减小 Duffing 系统可检测断续正弦信号频率范围的方法[J]. 电子学报, 2013, 41(4): 733 - 738.
Han Jian-qun. A method of narrowing frequency range of intermittent sine signal detected by Duffing system[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(4): 733 - 738. (in Chinese)
- [17] Haykin S, Li X B. Detection of signals in chaos[J]. Processing of IEEE, 1995, 83(1): 95 - 122.
- [18] 邓东虎, 张群. Duffing 振子在低信噪比雷达目标微弱特征提取中的应用[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(2): 453 - 458.
Deng Donghu, Zhang Qun. The application of Duffing oscillators to micro-motion feature extraction of radar target under low SNR[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2014, 36(2): 453 - 458. (in Chinese)

作者简介



王慧武 男, 1968 年出生, 高级工程师, 从事电能质量测试分析、电能计量的相关研究。
E-mail: c150484@126.com



丛超 男, 1989 年出生, 硕士, 从事基于混沌理论的弱信号检测的研究。
E-mail: congchao_hrb@126.com