电子科技大学

2014年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：602 高等数学

注：所有答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、 填空题（本题满分 28 分，每小题 4 分）

1. 当 $x \to 0$ 时，$3x - 4\sin x + \sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小量，则 $n = ($ $)$.

2. 设方程 $x^2 + x^3 = y + y^4$ 确定了函数 $x = x(y)$，则 $\frac{dx}{dy} = ($ $)$.

3. 已知 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 4$ 且 $f(x) \ne 0$，则 $\lim\limits_{x \to 0}\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = ($ $)$.

4. 微分方程 $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 2x$ 的特解形式 $y^* = ($ $)$.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} -x - \pi, & x \in [-\pi, 0) \\ x + \frac{\pi}{2}, & x \in [0, \pi) \end{cases}$ 以 2π 为周期，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = 0$ 处收敛于( ).

6. 设流体的流速 $\vec{v} = (x^2 + y^2)\vec{j} + (z - 1)\vec{k}$，$\Sigma$ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \le z \le 1)$，取下侧，则流体穿过曲面 Σ 的体积流量为( ).

7. 将二重积分 $I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$ 化为极坐标系下的二次积分，其中积分区域为：$D = \{(x, y) \mid 1 - x \le y \le \sqrt{1 - x^2},\ 0 \le x \le 1\}$，则 $I = ($ $)$.

二、（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a_i > 0, a_i \ne 1, i = 1, 2, \cdots, n$.

三、（本题满分 10 分）

求微分方程 $y'\sec^2 y + \frac{x}{1 + x^2}\tan y = x$，$y(0) = 0$ 满足初始条件的特解.

四、（本题满分 10 分）

求曲线 $y^2 = 2mx, z^2 = m - x$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线及法平面方程.

五、（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n-1}$ 的收区间与和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)2^n}$ 的和.

六、（本题满分 10 分）

设 $w=f\left(x+y+z,xyz\right)$，$f$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

七、（本题满分 10 分）

设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(设比例系数为 1)，求球体的质量.

八、（本题满分 10 分）

某厂生产两种型号的钢笔，甲种每支售价 10 元，乙种每支 9 元，而生产甲种笔 x 支，乙种笔 y 支的总费用为 $400+2x+3y+0.01(3x^2+xy+3y^2)$，问两种笔的产量各为多少时，利润最大？

九、（本题满分 10 分）

设 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$ （逆时针方向）,计算曲线积分 $\oint_L\dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

十、（本题满分 10 分）

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2\ (z\geq 0)$ 的外侧.

十一、（本题满分 10 分）

试证明：当 $0\leq x\leq\pi$ 时，$\dfrac{1}{2\pi}\left(e^{2\pi}-1\right)+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n e^{2\pi}-1}{4+n^2}\cos nx=e^{2x}$.

十二、（本题满分 11 分）

在平面上求一点，使它到 n 个定点 $(x_1,y_1),(x_2y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 的距离之平方和最小.

十三、（本题满分 11 分）

设在 $[0,a]$ 上 $|f'(x)|\leq M$，且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值，试证

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leq Ma.$$