

科目代码: 603 科目名称: 高等数学 A 满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效;

③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、选择题 (本大题有 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分)

1. 函数  $f(x) = x|x|$  在点  $x = 0$  处 ( ).

(A) 极限不存在, (B) 极限存在, 但不连续, (C) 连续, 但不可导, (D) 可导.

2. 设函数  $f(x) = \frac{x}{e^{mx} - n}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , 则常数  $m$ 、 $n$  满足 ( ).

(A)  $m < 0, n \leq 0$  (B)  $m > 0, n > 0$  (C)  $m \leq 0, n > 0$  (D)  $m \geq 0, n < 0$

3. 已知  $x = 0$  是函数  $y = \frac{ax - \ln(1+x)}{x + b \sin x}$  的可去间断点, 则常数  $a$ 、 $b$  的取值范围是 ( ).

(A)  $a = 1$ ,  $b$  为任意实数 (B)  $a \neq 1$ ,  $b$  为任意实数  
(C)  $b = -1$ ,  $a$  为任意实数 (D)  $b \neq -1$ ,  $a$  为任意实数

4. 设  $f(x)$  是在  $(-\infty, +\infty)$  内连续的单调增加的奇函数,  $F(x) = \int_0^x (x-2t)f(x-t)dt$ , 则  $F(x)$  是 ( ).

(A) 单调增加的非奇非偶函数 (B) 单调减少的非奇非偶函数  
(C) 单调增加的奇函数 (D) 单调减少的奇函数

5.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2} + \sin^6 x \right) dx = ( ).$

(A)  $\frac{\pi}{16}$  (B)  $\frac{5\pi}{16}$  (C) 0 (D)  $-1$

6. 设  $f(x)$  的一个原函数是  $e^x$ , 则  $\int \frac{f(\ln x)}{x} dx = ( ).$

(A)  $e^x + C$  (B)  $\ln x + C$  (C)  $x + C$  (D)  $\frac{1}{x} + C$

7. 对于函数  $z = xy$ , 原点  $(0,0)$  ( ).

(A) 不是驻点; (B) 是驻点但非极值点;  
(C) 是驻点且为极大值点; (D) 是驻点且为极小值点.

8. 曲线  $y = x(x-1)^2(x-2)$  与  $x$  轴所围图形面积为 ( ).

(A)  $-\int_0^1 x(x-1)^2(x-2)dx + \int_1^2 x(x-1)^2(x-2)dx$  (B)  $\int_0^2 x(x-1)^2(x-2)dx$

(C)  $\int_0^1 x(x-1)^3(x-2)dx - \int_0^2 x(x-1)^3(x-2)dx$  (D) 以上都不是

二、填空题 (本大题有 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3^x + 4^x + 5^x - 1}{3} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 设  $x \neq 0$ , 则  $d\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) = \underline{\hspace{2cm}} d\left(\frac{1}{x}\right)$ .

11. 设  $z = f(x, y)$  且  $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t^3 \end{cases}$ ,  $f(x, y)$  可微, 则  $\frac{dz}{dt} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12.  $\int \frac{e^{3x} + e^x}{e^{4x} - e^{2x} + 1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 交换积分次序: 交换积分次序  $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 微分方程  $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$  的特解可设为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题 (本大题有 9 小题, 满分共计 94 分)

15. (本题 10 分) 计算定积分  $\int_0^1 x(x-1)^{10} dx$

16. (本题 10 分) 设  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上具有一阶连续导函数, 且  $f(0) = 0$ ,

证明: 至少有  $\eta \in [0, 1]$ , 使  $f'(\eta) = 2 \int_0^1 f(x) dx$ .

17. (本题 10 分) 计算  $\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $y = x$  所围区域。

18. (本题 10 分) 求由曲线  $y = \sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$  与  $y = 0$  所围图形

(1). 绕直线  $y = 1$  旋转一周所得的旋转体体积  $V_1$ .

(2). 绕  $y$  轴旋转一周所得的旋转体体积  $V_2$ .

19. (本题 10 分)  $z = f\left(\frac{y}{x}, x + y\right)$ , 其中  $z = f(u, v)$  有连续二阶偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

20. (本题 11 分) 已知  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a\right)\ln x + 2ax$ , 若函数  $f(x)$  在其导函数  $f'(x)$  的单调区间上也是单调的, 求实数  $a$  的取值范围.

21. (本题 11 分) 设函数  $f(x, y)$  可微, 且满足  $\frac{\partial f}{\partial x} = -f$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(0, y + \frac{1}{n})}{f(0, y)} \right]^n = e^{\cot y}$ ,

$f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1$ , 求  $f(x)$ .

22 选做题：报考计算机专业选做 II，报考其它专业选做 I；（本题满分 11+11=22 分）

I. (1) 已知  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x}$ ,  $y(1) = 1$ , 求其特解.

(2) 求曲面  $z = x^2 + 2y^2$  及  $z = 12 - 2x^2 - y^2$  所围成立体的体积.

II. (1) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} x^n$  的和函数.

(2) 空间立体  $\Omega$  的体积  $V$  可用三重积分  $V = \iiint_{\Omega} dx dy dz$  来计算, 据此求由圆锥体  $z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$

和球体  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$  所确定的立体体积.