

# 移动无线传感网中恶意软件传播的最优安全策略

曹玉林<sup>1,2</sup>, 王小明<sup>1</sup>, 何早波<sup>1</sup>

(1. 陕西师范大学计算机科学学院, 陕西西安 710062; 2. 青海师范大学计算机学院, 青海西宁 810008)

**摘要:** 移动无线传感器网络的大规模应用依赖于建立起应对恶意软件攻击的安全策略. 一个有效的防护措施就是对传感器节点安装免疫补丁或清除节点中的病毒. 考虑到传感器节点的移动特性, 根据传染病学理论我们建立了恶意软件传播的动力学模型. 基于此模型提出了以易感节点免疫比例与感染节点恢复比例作为优化控制变量的最优目标函数, 使得在任意终止时刻被感染的节点数量最少并且实施安全措施成本最小. 通过平衡点的稳定性分析, 得到了恶意软件传播与否的阈值. 运用庞德里亚金 (Pontryagin) 极大值原理得到了免疫比例与恢复比例的最优控制变量对. 仿真结果表明, 该模型对于建立遏制恶意程序在移动无线传感器网络中扩散传播的安全策略具有指导意义.

**关键词:** 最优控制对; 传染病模型; 基本再生数; 庞德里亚金极大值原理

**中图分类号:** TP393 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)08-1851-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.08.012

## Optimal Security Strategy for Malware Propagation in Mobile Wireless Sensor Networks

CAO Yu-lin<sup>1,2</sup>, WANG Xiao-ming<sup>1</sup>, HE Zao-bo<sup>1</sup>

(1. School of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi 710062, China;

2. Department of Computer Science, Qinghai Normal University, Xining, Qinghai 810008, China)

**Abstract:** It is imperative to take reliable measures against outbreaks of malware to enable large-scale application of mobile wireless sensor networks (MWSNs). An effective measure is through dissemination of security patches to immunize or heal the nodes. Considering the mobile behavior of nodes, a malware propagation dynamic model is proposed based on epidemic theories. We formulate an optimal objective function subject to this model with immunization and heal proportion as optimal control variables. Our goal is to minimize the cost of the two measures and the number of infected nodes. Through stability analysis of equilibrium, we find the threshold whether a malware propagates or dies out. We used Pontryagin's maximum principle to obtain the optimal levels of the two controls. Simulation results show that the model play a significant role in building up the strategies of preventing malware from propagation in MWSNs.

**Key words:** optimal control pair; epidemic model; basic reproduction number; Pontryagin's maximum principle

### 1 引言

无线传感器网络被广泛应用于各种领域, 如智能家居、环境监测等商业和军事领域中<sup>[1,2]</sup>. 但由于传感器节点本身的资源有限, 加之使用无线链路进行数据传输, 很难构建复杂的安全防护机制, 因此其安全问题备受关注. 移动无线传感器网络中节点除了具有传统静态传感器网络节点的感知、计算、存储和通信能力外,

还具有一定的移动特性. 由于节点的动态移动, 节点间拓扑结构也随时间变化而改变, 因此其安全性面临更多的挑战. 当前针对无线传感网的攻击行为复杂多样, 包括蠕虫攻击、后门木马及恶意程序等. 本文将主要研究恶意程序这种能快速传播并引起严重危害的攻击形式. 恶意代码在节点的相互通信中不断扩散传播, 一旦恶意代码注入传感器节点中, 其损耗节点的电量, 阻塞通信信道, 甚至破坏数据的完整性<sup>[3]</sup>. 因此, 如何阻止、

控制恶意软件的进一步传播成为一个关键的问题。

目前,传感器网络中的安全问题已形成一个激烈的研究领域<sup>[4,5]</sup>. 基于经典的 Kermack-Mckendrick 模型的传染病模型已经被广泛地用于分析有线网络中恶意软件的传播,近来在无线网中的应用日趋明显. 通过仿真并结合实际数据做出的分析表明当网络中节点的数量足够大时,传染病模型能够有效地描述恶意软件的动态传播. 同时,时空马尔科夫链、元胞自动机<sup>[6-8]</sup>也被广泛地应用于模拟无线传感网中恶意程序的传播. 文献[6]结合传染病模型与损耗方程研究了恶意程序的攻击行为. 其中以节点通信半径与媒介扫描速率作为优化控制变量,探讨了病毒的最大攻击行为. 文献[7]利用马尔科夫随机机械研究连锁网中恶意软件的传播. 文献[8]基于元胞自动机,分析了病毒在多跳广播协议下的传播行为. 然而,当前的绝大多数研究成果并没有给出优化的病毒防范策略. 文献[9]研究了有限网络中对易感主机进行动态隔离的启发式策略. 有趣的是,基于 Pontryagin 极大值原理的优化控制理论还很少被用于分析网络中的安全策略问题. 在本文中,解决这样一个问题,即如何优化地组合对易感节点的免疫比例与对感染节点的恢复比例,从而使得实施免疫与恢复的成本最小且被恶意软件感染的节点数量最少.

通过安装安全补丁可以对恶意程序的进攻进行反击,一是通过修复节点潜在的漏洞来免疫易感染节点,二是通过治愈已感染节点从而清除病毒<sup>[10,11]</sup>. 然而,持续性地给节点安装免疫包以及高强度的病毒查杀将很大程度上占用有限的通信信道,消耗节点电量,这将加大数据延迟及缩短网络的生命周期. 同时,对大规模的传感网而言,安装安全补丁将耗费大量的人力财力. 因此迫切需要一个优化的安全防御策略,使得不但能够有效地控制恶意软件的扩散传播又使得安全措施的成本最小.

首先用随机方向移动模型来描述节点的移动行为,确切地刻画恶意程序在移动环境下的传播性态. 其次,基于传染病模型构建微分方程模型,有效地描述病毒在网络中传播的时空动力学行为. 通过对微分方程模型的稳定性分析得到决定恶意软件持续传播与否的阈值,基于此可构建相应强度的安全措施,使得在一定时刻感染节点数量最少且安全策略成本最少的目标函数,运用庞德里亚金极大值原理<sup>[12]</sup>,得到了易感节点免疫比例及感染节点恢复比例的最优控制对.

## 2 网络模型

为了维持网络的正常生命周期,新的节点被持续地加入网络中(假设新加入的为易感节点),加入率为  $b$ . 由于传感器节点依靠电池供给能量并且一般配置在

恶劣环境,无人区或敌方阵地中,我们假设节点的死亡率也为  $b$ ,因此网络中的活节点数量维持在一个常数  $N$ . 用  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  分别表示易感节点(Susceptible),感染节点(Infected),免疫节点(Recovered)在任意  $t$  时刻的比例. 显然有:  $S(t) + I(t) + R(t) = 1$ .

所有节点都被部署在一个面积为  $A$  的二维区域中,每个节点的传输半径为  $r$ . 节点的移动行为是基于阶段的,一个阶段(stage)就是节点以特定的速度和方向移动并在其停止的地方停留一段时间的过程,节点在网络中的移动由一系列的阶段构成,在特殊情况下,停留时间为零,模型依然适用. 一个阶段的长度就是节点开始一个阶段时所在的点到结束时所在的点之间的距离,记为  $L$ ,其均值为  $\bar{L}$ . 节点在一个阶段中的速度是均匀分布于区间  $[v_{\min}, v_{\max}]$  的随机变量,均值为  $\bar{V}$ ,显然,一个阶段中节点处于移动状态的平均时间长度记为  $\bar{T}$ . 在移动结束时,节点会随机地选择其停留时间,时间长度均匀分布于区间  $[0, T_{\max}]$ ,其均值为  $\bar{T}_{\text{pause}}$ . 随机方向模型<sup>[13]</sup>是一种常用的基于阶段的移动模型,其定义如下.

在随机方向移动模型中,节点在广阔的二维区域  $A$  中自由移动,其空间分布将收敛于均匀分布<sup>[14]</sup>. 节点从  $[0, 2\pi)$  中随机选择一个值  $\theta$  作为移动方向,移动速度  $v$  是  $[v_{\min}, v_{\max}]$  中均匀分布的随机变量. 它以速度  $v$  沿  $\theta$  方向移动  $T$  单位时间,  $T$  是呈指数分布的随机变量,其均值为  $\bar{T}$ . 移动  $T$  单位时间后,停留一个随机时长  $T_{\text{pause}}$ ,然后重复此过程.

只有节点相互接触,即在彼此的通信范围内时,才能进行数据传输. 在随机方向移动模型下,一个感染节点在单位时间  $t$  内能够接触到的易感节点数记为  $C_s(t)$ ,对于  $C_s(t)$ ,有如下定理.

**定理 1** 在随机方向移动模型中,单位时间  $t$  内一个感染节点能够接触到的易感节点数为:

$$C_s(t) = \frac{(2r\bar{V} + \pi r^2) \cdot t_{\text{unit}} \cdot N}{(\bar{T} + \bar{T}_{\text{pause}}) \cdot A} \cdot S(t) \quad (1)$$

**证明** 假设感染节点  $X$  以 Random Direction 模型为移动方式,其移动轨迹由一系列的阶段组成. 设节点  $X$  在某一阶段中以速度  $v_x$  沿方向  $\theta_x$  移动了时间  $T_x$ ,则在此阶段中  $X$  覆盖的区域面积为  $(2rv_x T_x + \pi r^2)$ ,其中  $2rv_x T_x$  是节点直径  $2r$  与节点在  $T_x$  时间内移动距离  $v_x T_x$  的乘积;  $\pi r^2$  是节点自身通信范围的面积. 当  $X$  停止运动时,在原地停留时间  $T_{x\text{-pause}}$  而不再覆盖新的区域,即在一个阶段内,  $X$  所能覆盖的区域面积为  $(2rv_x T_x + \pi r^2)$ . 因为在单位时间  $t_{\text{unit}}$  内,  $X$  所历经的阶段数为  $t_{\text{unit}} / (T_x + T_{x\text{-pause}})$ ,则在  $t_{\text{unit}}$  内  $X$  覆盖区域的面积为  $(2rv_x T_x + \pi r^2) \cdot t_{\text{unit}} / (T_x + T_{x\text{-pause}})$ . 由于节点在空间上是均匀分布,节点的密度为  $N/A$ . 所以  $t_{\text{unit}}$  时间内,  $X$  能

接触到的节点数为  $\frac{(2rv_x T_x + \pi r^2) \cdot N \cdot t_{\text{unit}}}{(A \cdot (T_x + T_{x-\text{pause}}))}$ . 同时在任意时刻  $t$ , 感染节点比例为  $S(t)$ . 因此,  $X$  在  $t_{\text{unit}}$  时间内接触的感染节点数为  $\frac{(2rv_x T_x + \pi r^2) \cdot N \cdot t_{\text{unit}} \cdot S(t)}{(A \cdot (T_x + T_{x-\text{pause}}))}$ . 由于每个阶段内节点移动的速度, 时间及停留时间均为独立的随机变量, 所以  $X$  在一个阶段中平均接触的感染节点数如式(1)所示.

然而, 易感节点进入感染节点的通信范围并非意味着恶意软件能够成功传播. 感染节点并不熟知网络拓扑结构, 即易感节点的空间位置及邻居节点的状态信息. 因此感染节点以概率  $\rho$  不断发送探测包来搜寻通信范围内的易感节点. 该探测包耗费少量的网络资源并且经过伪装而不易被易感节点辨别. 一旦感染节点发现目标易感节点, 便将伪装注入恶意代码的消息发送给目标易感节点, 从而该易感节点被感染而转换为感染节点. 我们假设消息的传输(感染)过程是一个瞬时行为. 由于通信信道拥塞、节点的物理损害及电量耗尽等意外情形致使探测包及病毒包未必能成功传送. 为刻画这种消息潜伏, 引入变量消息成功递交率  $\alpha$ . 鉴于上述讨论, 可得被感染节点成功感染的易感节点的比例  $\eta$  为:

$$\eta = \alpha \rho \tag{2}$$

因此在单位时间  $t_{\text{unit}}$  内, 被恶意程序成功感染的节点数量  $N_s(t)$  为:

$$N_s(t) = C_s(t) \eta = \frac{(2r\bar{v}T + \pi r^2) \cdot t_{\text{unit}} \cdot N}{(T + T_{\text{pause}}) \cdot A} \cdot \alpha \rho \cdot S(t) \tag{3}$$

我们令  $\lambda = \frac{(2r\bar{v}T + \pi r^2) \cdot t_{\text{unit}} \cdot N \cdot \alpha \rho}{((T + T_{\text{pause}}) \cdot A)}$ , 则:  $N_s(t) = \lambda S(t)$ .

用  $p(t)$ 、 $q(t)$  分别表示在时刻  $t$  被免疫的易感节点与被清除病毒的感染节点的比例. 为简便起见, 用  $S, I, R, D, p$  和  $q$  分别表示  $S(t), I(t), R(t), D(t), p(t)$  和  $q(t)$ . 节点间的状态转换关系如图 1 所示.

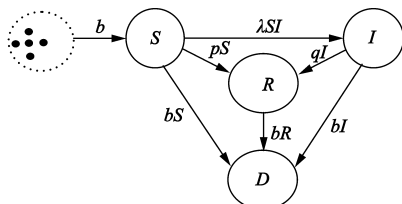


图1 节点间状态转换关系图

### 3 模型的建立与分析

#### 3.1 模型的建立

根据图 1 所示的节点间的状态转换关系, 建立如下的 SIR 传染病模型. 随时间的推移,  $S(t), I(t), R(t)$  收

敛于如下微分方程组的解:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = b - \lambda S(t)I(t) - pS(t) - bS(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \lambda S(t)I(t) - qI(t) - bI(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = pS(t) + qI(t) - bR(t) \end{cases} \tag{4}$$

其中  $t \in [0, t_f]$ . 当  $t=0$  时, 有  $I(0) > 0, S(0) > 0$  以及  $R(0) = 1 > I(0) > S(0)$ .

#### 3.2 平衡点存在性分析

为了进一步研究恶意程序传播的动力学性态, 需要探讨微分系统(4)的平衡解及其稳定性. 由微分方程稳定性定理<sup>[14,15]</sup>, 系统(4)的无病平衡解是指当存活的感染节点全部转换为恢复节点时,  $(S, I, R)$  收敛的稳定值. 此时有  $I=0$ . 如果系统(4)存在无病平衡解且该解是全局稳定的, 那么病毒将最终消亡. 系统(4)的正平衡解即三类节点共存时系统收敛的稳定值, 若正平衡解存在且该解全局稳定, 这意味着在当前的网络环境以及安全措施作用下, 病毒将持续传播. 如前所述, 在任意时刻  $t$ , 总有:

$$S + I + R = 1 \tag{5}$$

显然, 当得到任意时刻  $t$  时  $S$  与  $I$  的值后, 由式(5)可得  $t$  时刻  $R$ , 因此, 只需考虑如下的简化系统:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \lambda SI - pS - bS \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - qI - bI \end{cases} \tag{6}$$

对于系统(6)平衡解的存在性, 首先引入参数  $R_0$ ,  $R_0 = b\lambda / ((p+b)(q+b))$ , 有定理 2.

**定理 2** 当  $R_0 < 1$  时, 系统(6)有唯一的无病平衡解; 当  $R_0 > 1$  时, 系统(6)无病平衡解与正平衡解同时存在.

**证明** 令系统(6)右部等于零, 由系统(6)的 2 式可得  $I_0 = 0$  或  $S_+ = (q+b)/\lambda$ . 把  $I=0$  代入系统(6)的 1 式中, 可得无病平衡解  $E_0(S_0, I_0)$ , 其中  $S_0 = b/(p+b)$ ,  $I_0 = 0$ . 也即  $E_0$  始终是系统(6)的零解. 把  $S_+ = (q+b)/\lambda$  代入系统(6)的 1 式中, 可得:

$$I_+ = \frac{b}{q+b} - \frac{p+b}{\lambda} \tag{7}$$

由式(7)可见, 当且仅当  $R_0 > 1$  时, 有  $I_+ > 0$ , 即此时正平衡解与无病平衡解共存.

#### 3.3 局部稳定性分析

平衡解  $E_0, E_+$  的局部稳定性, 有定理 3.

**定理 3** 在恶意软件的传播过程中, 若  $R_0 < 1$ , 无病平衡解  $E_0$  是局部渐进稳定的.

**证明** 为探讨系统(6)在平衡点  $E_*(S_*, I_*)$  处的稳定性, 其中  $E_0, E_+ \in E_*$ , 将系统(6)线性化, 线性化

结果如式(8)所示.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = J_{11}(S - S_*) + J_{12}(I - I_*) \\ \frac{dI}{dt} = J_{21}(S - S_*) + J_{22}(I - I_*) \end{cases} \quad (8)$$

系统(8)的参数对应于系统(6)的 Jacobian 矩阵如式(9)所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(E_*) &= \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda I - p - b & -\lambda S \\ \lambda I & \lambda S - q - b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

则在无病平衡点处对应的 Jacobian 矩阵为:

$$\mathbf{J}(E_0) = \begin{pmatrix} -p - b & -\frac{b\lambda}{p+b} \\ 0 & \frac{b\lambda}{p+b} - q - b \end{pmatrix} \quad (10)$$

由式(10),  $\text{tr}(E_0) = J_{11} + J_{22} = -(p+b) - (q+b) + (b\lambda)/(p+b)$ ,  $\text{det}(E_0) = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = -b\lambda + (p+b)(q+b)$ .

当  $R_0 < 1$  时, 总有  $\text{tr}(E_0) < 0$ ,  $\text{det}(E_0) > 0$ , 则由 Lyapunov 稳定性判定准则<sup>[15]</sup>, 当且仅当  $R_0 < 1$  时, 无病平衡解  $E_0$  是局部渐进稳定.

**定理 4** 在恶意软件的传播过程中, 若  $R_0 > 1$ , 正平衡解  $E_+$  是局部渐进稳定的.

**证明** 由式(9)可得系统(6)在正平衡点  $E_+$  处的 Jacobian 矩阵为:

$$\mathbf{J}(E_+) = \begin{pmatrix} -\frac{b\lambda}{q+b} & -q-b \\ \frac{b\lambda}{q+b} - p - b & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

由式(11),  $\text{tr}(E_+) = J_{11} + J_{22} = -b\lambda/(q+b)$ ,  $\text{det}(E_+) = b\lambda - (p+b)(q+b)$ .  $\text{tr}(E_+) < 0$  显然成立, 当  $R_0 > 1$ , 有  $\text{det}(E_+) > 0$ . 则由 Lyapunov 稳定性判定准则<sup>[15]</sup>, 当且仅当  $R_0 > 1$  时, 正平衡解  $E_+$  是局部渐进稳定的. 值得指出的是  $R_0 = 1$  是一个关键的临界情况, 其可视为在  $E_0$  与  $E_+$  间跨临界的分叉点. 也即  $R_0$  为我们的病毒防治措施提供了量化的参考.

### 3.4 全局稳定性分析

**定理 5** 如果  $R_0 \leq 1$ , 则无病平衡解  $E_0$  是全局渐进稳定的.

**证明** 当  $R_0 \leq 1$  时, 系统(6)只存在无病平衡点  $E_0$ . 由 Lyapunov 稳定性定理<sup>[15]</sup>, 构造 Lyapunov 函数  $V(S, I)$  为  $V(S, I) = \varepsilon I$ . 其中我们设  $\varepsilon = 1/(q+b)$ . 由于在时间趋于无穷时, 无病平衡解保证了  $S \leq S_0 = b/(p+b)$ , 则  $V$  函数对时间的全导数为:

$$\frac{dV}{dt} = \varepsilon \frac{dI}{dt}$$

$$\begin{aligned} &= \varepsilon(\lambda SI - qI - bI) \\ &\leq \varepsilon\left(\frac{\lambda b}{p+b} - (q+b)\right)I \\ &= \varepsilon(q+b)\left(\frac{\lambda b}{(p+b)(q+b)} - 1\right)I \\ &= (R_0 - 1)I \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

则由 Lyapunov 稳定性判定准则,  $E_0$  是全局渐进稳定的, 这意味着病毒将最终消亡.

**定理 6** 若  $R_0 > 1$ , 则正平衡点  $E_+$  是全局稳定的.

**证明** 由定理 2 知,  $R_0 > 1$  保证正平衡点的存在性. 构造 Lyapunov 函数  $V(S, I)$  如下:  $V(S, I) = \frac{1}{2}(S - S_+)^2 + \varepsilon(I - I_+ - I_+ \ln(\frac{I}{I_+}))$

其中  $\varepsilon = S_+$ , 则  $V$  函数对时间的全导数:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (S - S_+) \frac{dS}{dt} + \varepsilon\left(1 - \frac{I_+}{I}\right) \frac{dI}{dt} \\ &= (S - S_+)(b - \lambda SI - pS - bS) + \varepsilon\left(1 - \frac{I_+}{I}\right)(\lambda SI - qI - bI) \\ &= (S - S_+)(\lambda S_+ I_+ + pS_+ + bS_+ - \lambda SI - pS - bS) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{I}(I - I_+)(\lambda SI - \lambda S_+ I) \\ &= (S - S_+)(-p(S - S_+) - b(S - S_+) - \lambda(SI - S_+ I_+)) \\ &\quad + \lambda \varepsilon(I - I_+)(S - S_+) \\ &= -(p+b)(S - S_+)^2 - \lambda S_+(I - I_+)(S - S_+) \\ &\quad - \lambda I(S - S_+)^2 + \lambda \varepsilon(I - I_+)(S - S_+) \\ &= -(\lambda I + p + b)(S - S_+)^2 + \lambda(\varepsilon - S_+)(I - I_+) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

则由 Lyapunov 稳定性判定准则,  $E_+$  是全局渐进稳定的, 这意味着病毒将持续存在.

### 3.5 最优控制

在实际生活中, 针对传染病采取的防控措施一种是提前对易感个体进行接种免疫; 另一种是针对感染个体进行治疗. 考虑到这两种措施的免疫费用分别与对应个体数量有关, 我们将选取易感节点免疫比例  $p(t)$  及感染节点病毒查杀比例  $q(t)$  作为控制变量 ( $0 \leq p(t) \leq 1, 0 \leq q(t) \leq 1$ ). 目标是既要有效地控制病毒的扩散传播, 又要使得对传感器节点实施免疫及病毒查杀的成本在经济上是可行的. 因此建立如下目标函数:

$$\begin{aligned} G(p, q) &= \min_{p, q} \left\{ I(t_f) + \int_0^{t_f} (c_1 p^2(t) S^2(t) + c_2 q^2(t) I^2(t)) dt \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $c_1$  是实施免疫操作的成本参数, 其与免疫补丁的开发与安装过程, 安装免疫补丁所耗费的网络资源等

相关,  $c_2$  是实施病毒查杀操作的成本参数, 其与病毒扫描软件的开发与运行以及所耗费的网络资源等相关,  $t_f$  表示本文优化控制研究的时刻. 优化控制变量  $p(t)$ ,  $q(t)$  的可行域为:  $U = \{(p(t), q(t)) | 0 \leq p(t) \leq 1, 0 \leq q(t) \leq 1, t \in [0, t_f]\}$ . 基于实际情况, 安全措施的综合成本是  $p(t)S(t)$  与  $q(t)I(t)$  的非线性函数, 因此将成本函数取为二次项形式. 所以积分项  $c_1 p^2(t) S^2(t)$  与  $c_2 q^2(t) I^2(t)$  分别描述了免疫与杀毒的成本. 式(12)表示要通过控制  $p(t)$  和  $q(t)$ , 使得在  $t_f$  时刻感染节点  $I(t_f)$  数量最少, 且在开始时刻到  $t_f$  时刻控制免疫的成本费用最少. 因此我们优化控制目标便转化为在  $U$  内寻找使得目标函数(12)取得最小值的最优控制对  $(p^*(t), q^*(t))$ . 我们应用庞德里亚金极大值原理解决该优化问题, 首先根据该原理构造哈密顿函数如下:

$$H = c_1 p^2(t) S^2(t) + c_2 q^2(t) I^2(t) + \beta_1(t)(b - \lambda SI - p(t)S - bS) + \beta_2(t)(\lambda SI - q(t)I - bI) \quad (13)$$

其中,  $\beta_1(t), \beta_2(t)$  为协态变量, 为表述简单, 分别用  $\beta_1, \beta_2$  表示. 由庞德里亚金极大值原理, 可得协态变量微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S} = -2c_1 p^2(t) S(t) + \beta_1(\lambda I + p(t) + b) - \beta_2 \lambda I \\ \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I} = -2c_2 q^2(t) I(t) + \beta_1 \lambda S - \beta_2(\lambda S - q(t) - b) \end{cases} \quad (14)$$

其中  $t \in [0, t_f]$ . 由目标函数式(12)可见, 在终端时刻  $t_f$ , 我们的优化目标在于  $I(t_f), S(t_f)$  并未出现, 所以可得横截条件如下:

$$\beta_1(t_f) = 0, \beta_2(t_f) = 1 \quad (15)$$

由庞德里亚金极大值原理, 可得优化条件:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p(t)} = 2c_1 p S^2(t) - \beta_1 S = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial q(t)} = 2c_2 q I^2(t) - \beta_2 I = 0 \end{cases} \quad (16)$$

由式(16)可得:

$$p(t) = \frac{\beta_1}{2c_1 S}, q(t) = \frac{\beta_2}{2c_2 I} \quad (17)$$

如前所述,  $p(t)$  与  $q(t)$  是 0 到 1 之间的变量, 所以最终可得优化控制对如下:

$$\begin{aligned} p^*(t) &= \min\left\{\max\left(0, \frac{\beta_1}{2c_1 S}\right), 1\right\} \\ q^*(t) &= \min\left\{\max\left(0, \frac{\beta_2}{2c_2 I}\right), 1\right\} \end{aligned} \quad (18)$$

#### 4 参数设置与仿真分析

首先设置系统参数如表 1.

表 1 系统参数设置

参数	值
仿真空间区域 A	2000m * 2000m
节点数量 N	1000
移动速度 v	[2, 5] m/s
每个阶段的移动时间 T	[0, 200] s
每个阶段的停留时间 $T_{\text{pause}}$	[0, 100] s
节点通信半径 r	10m
节点补充或死亡率 b	0.05
媒介扫描速率 $\beta$	0.63
消息递交率 $\alpha_1$	0.75
单位时间 $t_{\text{unit}}$	150s

由表 1 给出的参数, 我们可得病毒感染率  $\lambda = 0.8640$ . 由定理 2 与 3 可知, 病毒最终消亡与否取决于基本再生数  $R_0$ . 用 Matlab 求解上述最优控制下的微分方程模型. 具体求解方法为前推回代法, 首先给优化控制变量  $p, q$  一个初始猜测值, 然后用龙格库塔 (Runge-Kutta) 法求解微分方程组即系统(6) 状态变量的数值解. 再用求得的状态变量值以及优化变量初始值, 对协态变量微分方程组即系统(16) 进行反向积分求出协态变量的数值解, 最后根据式(18) 求出优化控制变量的值直到该值收敛.

假设仿真终止时间  $t_f = 100$ , 免疫与恢复成本参数分别设为  $c_1 = 1, c_2 = 2$ . 则在目标函数式(12) 的约束下, 优化变量结果如图 2 所示. 对应于图 2 优化变量作用下的基本再生数  $R_0$  如图 3 所示.

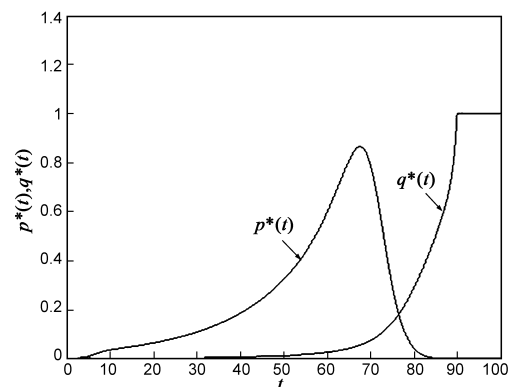


图 2 优化控制变量值

由图 2 可见, 在安全防范措施的前期, 我们应对易感节点的免疫为主, 对感染节点的病毒清除为辅. 因为如前所述病毒清除成本  $c_2$  大于感染节点免疫成本, 这有效地控制了整个安全措施的成本. 在后期, 由于我们的目标是最终控制感染节点数量达到最小, 因此对病毒的查杀清除强度应有所提高. 图 2 的物理形态不仅与实际吻合, 最关键的是提供了具体免疫与查杀比例的

最优组合.

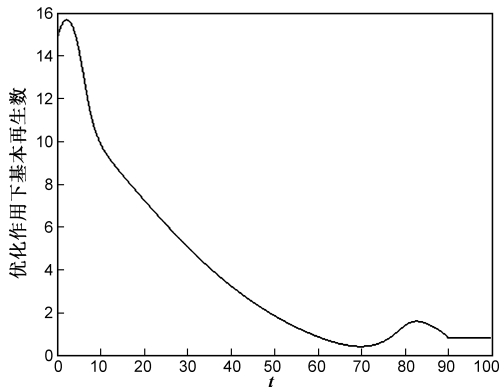


图3 优化作用下的基本再生数 $R_0$ .

由图3可见,在优化控制作用下,基本再生数 $R_0$ 在一段时间内值大于1,即正平衡点是始终存在且全局稳定,这意味着病毒在该时间段内仍呈扩散传播的趋势.然后在一段时间内 $R_0$ 开始小于1,无病平衡点全局稳定,这意味着病毒呈消亡趋势.我们的优化目标之一是使得染病节点在末端时刻数量达到最小.在优化的安全措施下,三类节点的变化情况如图4所示.

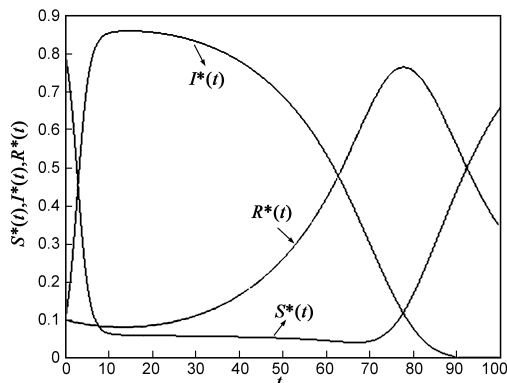


图4 优化作用下三类节点变化

优化目标之二是使恶意软件的扩散传播在可控的范围内并且安全措施的成本最小,这种成本包括安装安全包时占用通信信道、损耗节点的电量或者是安全包的开发维护传播等.作为对比,我们探讨一下在相同的时间内、控制染病节点数量低于相同阈值时,不采取优化措施下的成本.为保持在 $t_f = 100$ 时,染病节点数量达到与优化作用下相同,我们有 $p = 0.1, q = 0.3$ ,此时 $R_0 = 0.8229 < 1$ ,即病毒将最终消亡,其他参数不变.则非优化控制作用下(固定的免疫比例与恢复比例)三类节点变化情况如图5所示.

通过式(12)计算目标函数值可得在优化作用下 $J = 5.01443$ ,在非优化作用下可得 $J = 149.2297$ .可见,最优策略下,不但有效地控制了病毒的扩散传播且使得安全策略的成本最小.

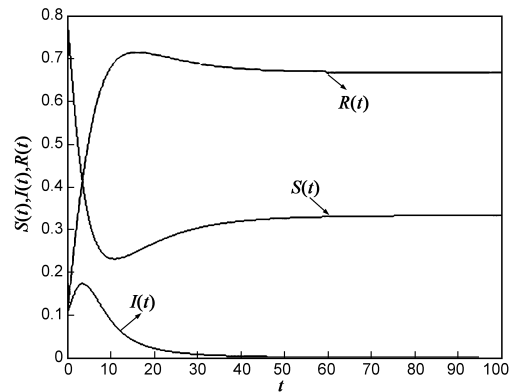


图5 非优化作用下三类节点变化

## 5 结束语

本文研究了在移动无线传感网中,通过优化组合易感节点免疫比例与感染节点恢复比例从而使得实施安全防护的成本最小,并且被恶意软件感染的节点数量最少的最优安全策略.结合节点的随机移动模型,应用传染病学理论建立了恶意软件扩散传播的微分方程模型.通过分析模型的平衡点及其稳定性得到了病毒持续传播与否的阈值,应用庞德里亚金极大值原理得到了满足目标函数的最优控制对.仿真结果表明相比于传统的常数比例安全策略,基于优化控制的免疫恢复策略提供了可量化的参考值,其不但有效地控制了病毒的扩散传播且使得成本达到最小.

## 参考文献

- [1] Zhu D, Guo J, Cho C, et al. Wireless mobile sensor network for the system identification of a space frame bridge [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2012, 17(3): 499 - 507.
- [2] Ehsan S, Bradford K, Brugger M, et al. Design and analysis of delay-tolerant sensor networks for monitoring and tracking free-roaming animals [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2012, 11(3): 1220 - 1227.
- [3] Rasheed A, Mahapatra R N. The three-tier security scheme in wireless sensor networks with mobile sinks [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2012, 23(5): 958 - 965.
- [4] Agrawal D P, Xie B. Encyclopedia on Ad Hoc and Ubiquitous Computing: Theory and Design of Wireless Ad Hoc, Sensor, and Mesh Networks [M]. World Scientific Publishing Co Inc, 2009.
- [5] Song Y, Jiang G P. Model and dynamic behavior of malware propagation over wireless sensor networks [A]. Complex Sciences [M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2009. 487 - 502.

- [6] Khouzani M H R, Sarkar S. Maximum damage battery depletion attack in mobile sensor networks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(10): 2358 – 2368.
- [7] Karyotis V. Markov random fields for malware propagation; the case of chain networks [J]. IEEE Communications Letters, 2010, 14(9): 875 – 877.
- [8] Song Y, Jiang G P. Modeling malware propagation in wireless sensor networks using cellular automata [A]. 2008 International Conference on Neural Networks and Signal Processing [C]. IEEE, 2008. 623 – 627.
- [9] C Zou, W Gong, D Towsley. Worm propagation modeling and analysis under dynamic quarantine defense [A]. Proceedings of the 2003 ACM Workshop on Rapid Malcode [C]. USA: ACM, 2003. 51 – 60.
- [10] Yao Y, Feng X, Yang W, et al. Analysis of a delayed Internet worm propagation model with impulsive quarantine strategy [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014, (1): 759 – 765.
- [11] Yao Y, Xie X W, Guo H, et al. Hopf bifurcation in an Internet worm propagation model with time delay in quarantine [J]. Mathematical & Computer Modelling, 2013, 57: 2635 – 2646.
- [12] Kirk D. Optimal Control Theory; An Introduction [J]. Englewood Cliffs Prentice Hall, 1970.
- [13] Bettstetter C. Mobility modeling in wireless networks; categorization, smooth movement, and border effects [J]. ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review, 2001, 5(3): 55 – 66.
- [14] Groenevelt R, Nain P, Koole G. The message delay in mobile ad hoc networks [J]. Performance Evaluation, 2005, 62(1): 210 – 228.
- [15] Lyapunov A M. Stability of Motion [M]. New York: Academic Press, 1966.

#### 作者简介



**曹玉林** 男, 1970 年 8 月生, 青海化隆人. 教授、CCF 高级会员. 1994 年、2006 年分别在青海师范大学和西北工业大学获理学学士和工学硕士. 现为陕西师范大学博士, 主要研究方向为无线传感器网络、社会网络、机会网络.  
E-mail: caoyulin@126.com



**王小明** 男, 1964 年生, 甘肃天水人. 教授, 博士生导师. 现为陕西师范大学计算机科学学院院长, 主要研究方向为无线传感器网络、机会网络等.  
E-mail: wangxm@snnu.edu.cn



**何早波** 男, 1988 年 8 月生, 陕西汉中. 2014 年毕业于陕西师范大学计科院获工学硕士, 现为美国佐治亚州立大学博士.  
E-mail: hezaobo@126.com