

文章编号: 1000-4750(2016)12-0038-06

# 一种改进的 Yeoh 超弹性材料本构模型

李雪冰<sup>1,2</sup>, 危银涛<sup>1</sup>

(1. 清华大学汽车工程系, 北京 100084; 2. 中车青岛四方车辆研究所有限公司减振事业本部, 山东, 青岛 260031)

**摘 要:** 橡胶通常被看作一种不可压缩各向同性的超弹性材料, 其本构模型通常用应变能密度方程表示。针对 Yeoh 模型偏软的特性, 该文提出了一种改进的 Yeoh 超弹性材料本构模型。基于连续介质力学大变形理论, 给出了改进的 Yeoh 模型在三种特殊变形模式下的应力-应变关系, 并与原有的 Yeoh 模型和实验数据进行了对比。结果表明: 改进的 Yeoh 模型在保持 Yeoh 模型体现反“S”形应力-应变关系的前提下, 有效地克服了 Yeoh 模型在预测等双轴拉伸曲线时“偏软”的特性。在较大的应变范围内能够同时准确地预测单轴、平面和等双轴拉伸-压缩的应力-应变关系, 具有较大的工程应用价值。

**关键词:** 橡胶; 超弹性; 本构; 应变能密度; Yeoh 模型

中图分类号: TQ330.1 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2015.05.0388

## AN IMPROVED YEOH CONSTITUTIVE MODEL FOR HYPERELASTIC MATERIAL

LI Xue-bing<sup>1,2</sup>, WEI Yin-tao<sup>1</sup>

(1. Department of Automobile Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Anti-vibration Department, CRRC Qingdao Sifang Rolling Stock Research Institute Co., Ltd. Qingdao, Shandong 266031, China)

**Abstract:** Rubber is generally regarded as incompressible, isotropic, and hyperelastic material whose constitutive model is usually described in terms of strain energy density functions. An improved Yeoh model for hyperelastic material is proposed in this paper to improve the ‘soft’ property of the Yeoh model. The strain-stress relations of three special deformation modes for the proposed model are presented based on the large deformation theory of continuum mechanics, and compared with those obtained by the original Yeoh model and by the experiment data. It is found that: the improved Yeoh model represents an inversed “S” shape of the strain-stress relation, and effectively overcomes the ‘soft’ property of Yeoh model when predicting the strain-stress curve of equibiaxial extension at the same time. The proposed model precisely predicts the strain-stress relations of uniaxial, planar and equibiaxial tension-compression in a large strain range and has great values in engineering application.

**Key words:** rubber; hyperelastic; constitutive law; strain energy function; Yeoh model

橡胶在工程领域被大量使用, 如轮胎、密封件、空气弹簧<sup>[1-2]</sup>和橡胶减振器等。橡胶通常被视为各

向同性不可压缩超弹性材料。在过去的 70 年里, 人们提出了超过 40 种超弹性材料的本构模型<sup>[3-5]</sup>。

收稿日期: 2015-05-08; 修改日期: 2016-07-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(51275265, 51175286)

通讯作者: 李雪冰(1983—), 男, 山东潍坊人, 工程师, 博士生, 主要从事空气弹簧和橡胶构件的研究与开发、橡胶构件的有限元仿真和橡胶材料的本构测试等方面的研究(E-mail: lixuebing@srsri.com).

作者简介: 危银涛(1971—), 男, 湖北北京山人, 教授, 博士, 博导, 主要从事汽车动力学与控制、轮胎力学与复合材料的有限元与优化设计和振动-声学仿真等方面的研究(E-mail: weiyt@tsinghua.edu.cn).

这些模型可以分为两类,一类是基于分子网络的热力学统计理论,如 Neo-hookean<sup>[6]</sup>和 Arruda-Boyce<sup>[7]</sup>模型等;另一类是基于现象学的唯象理论,如 Mooney-Rivlin<sup>[8]</sup>、Yeoh<sup>[9-11]</sup>和 Ogden<sup>[12]</sup>模型等。其中, Yeoh 模型具有形式相对简单、常数可以仅通过单轴拉伸数据获得和能够体现反“S”形应力-应变曲线现象等优点,因此得到大量应用。但 Yeoh 模型在准确预测单轴和平面拉伸拉伸试验应力-应变关系的同时,却在预测等双轴拉伸的应力-应变关系时表现出“偏软”的现象。因此, Yeoh 模型在处理较大变形的复杂应变状态时,会出现较大的偏差。

Rivlin 等<sup>[8]</sup>提出的高阶(如  $N=3$  或更高)多项式模型虽然可以准确的模拟各种变形模式下的应力-应变关系,但该模型复杂,需要通过多个实验获得  $N^2$  个参数,并且随着阶次的增加,材料参数的确定变得比较困难。Ogden 模型<sup>[12]</sup>同样可以准确模拟各种变形模式下的应力-应变关系,但也需要通过多个实验获得 6 个参数。上述模型型式复杂,实际使用时材料常数的确定比较困难。

本文提出了一种只包含 4 个参数的改进的 Yeoh 模型。基于连续介质力学大变形理论,给出了三种特殊变形模式下的应力-应变关系,并与原有的 Yeoh 模型和实验数据进行了对比。结果表明该模型在较大的应变范围内可以同时准确地预测单轴、平面和等双轴拉伸的应力-应变关系,具备预测大变形状态下的复杂应力-应变关系的能力。证明了本文提出的模型的有效性。

## 1 基本理论

橡胶材料通常被视为不可压缩和各向同性超弹性体,其力学特性可以通过不同形式的应变能密度方程描述。应变能密度方程一般通过 Green 方法建立,第二类 Piola-Kirchhoff 应力  $K$  与应变能密度(单位体积的应变能) $W$  的关系为<sup>[13]</sup>:

$$K = 2 \frac{\partial W}{\partial C} \quad (1)$$

其中,  $C$  为右 Cauchy-Green 变形张量,  $C = F^T \cdot F$ ,  $F$  为变形梯度张量。

等温条件下,各向同性超弹性材料的应变能密度方程可以表示成右 Cauchy-Green 变形张量  $C$  的三个不变量的函数,即:

$$W = W(I_C, II_C, III_C) \quad (2)$$

其中:

$$\begin{cases} I_C = \text{tr}C = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ II_C = \frac{1}{2}[(\text{tr}C)^2 - \text{tr}C^2] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ III_C = \det C = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  分别为三个方向的伸长比。

式(1)结合式(2)和式(3)进行复合函数求导,可得:

$$K = 2 \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_C} + I_C \frac{\partial W}{\partial II_C} \right) I - \frac{\partial W}{\partial II_C} C + III_C \frac{\partial W}{\partial III_C} C^{-1} \right] \quad (4)$$

式(4)为第二类 Piola-Kirchhoff 应力  $K$  与右 Cauchy-Green 变形张量  $C$  表示的超弹性体应力-应变关系。

考虑第二类 Piola-Kirchhoff 应力  $K$  与 Cauchy 应力  $\sigma$  之间的关系  $K = JF^{-1} \cdot \sigma \cdot (F^{-1})^T$ , 以及  $C = F^T \cdot F$ 、 $B = F \cdot F^T$ 、 $I_B = I_C$ 、 $II_B = II_C$ 、 $III_B = III_C$  和  $J = (III_B)^{1/2}$ , 并应用 Cayley-Hamilton 定理,式(4)可以转化为:

$$\sigma = 2 \frac{1}{(III_B)^{1/2}} \left[ \left( II_B \frac{\partial W}{\partial II_B} + III_B \frac{\partial W}{\partial III_B} \right) I + \frac{\partial W}{\partial I_B} B - III_B \frac{\partial W}{\partial II_B} B^{-1} \right] \quad (5)$$

式(5)为 Cauchy 应力  $\sigma$  与左 Cauchy-Green 变形张量  $B$  表示的超弹性体应力-应变关系。如果考虑材料的不可压缩性,即  $III_B = III_C = 1$ ,式(5)可写成:

$$\sigma = -pI + 2 \frac{\partial W}{\partial I_B} B - 2 \frac{\partial W}{\partial II_B} B^{-1} \quad (6)$$

其中,  $p$  为静水压力。

对于各向同性材料,  $\sigma$ 、 $B$  和  $B^{-1}$  具有相同的主轴,因此在主轴坐标系中,可以得到主应力:

$$\sigma_i = -p + 2 \frac{\partial W}{\partial I_B} \lambda_i^2 - 2 \frac{\partial W}{\partial II_B} \frac{1}{\lambda_i^2} \quad (7)$$

为消除不确定的静水压力项,可以将式(7)写为:

$$\sigma_i - \sigma_j = 2 \frac{\partial W}{\partial I_B} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) - 2 \frac{\partial W}{\partial II_B} \left( \frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{1}{\lambda_j^2} \right) \quad (8)$$

## 2 Yeoh 及改进的 Yeoh 模型

Rivlin 将应变能密度函数表示成  $I_C$  和  $II_C$  的级数展开式,即通常讲的多项式模型<sup>[8]</sup>:

$$W = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} (I_C - 3)^i (II_C - 3)^j, C_{00} = 0 \quad (9)$$

尽管高阶的多项式模型可以精确地模拟超弹性材料的应力-应变关系,但需要确定多个常数,这些常数的确定往往比较困难。特别是在实验数据有限的情况下,很难得到有效的高阶常数。

只保留式(9)的第一项,就可以得到 Neo-Hookean 模型<sup>[6]</sup>,即:

$$W_{NH} = C_{10}(I_C - 3) \quad (10)$$

只保留式(9)的前两项,就可以得到 Mooney-Rivlin 模型<sup>[8,14]</sup>,即:

$$W_{MR} = C_{10}(I_C - 3) + C_{01}(II_C - 3) \quad (11)$$

由于仅保留了有限的项数,Neo-Hookean 和 Mooney-Rivlin 模型均无法准确地反映大变形状态下超弹性材料的应力-应变关系,特别是无法反映反“S”形应力-应变曲线,因此只适用于应变水平较低的情况。

Yeoh 舍弃了式(9)中的  $II_C$  项,并只保留小于等于三阶的项,得到如下表达式<sup>[9-10]</sup>:

$$W_{Yeoh} = C_{10}(I_C - 3) + C_{20}(I_C - 3)^2 + C_{30}(I_C - 3)^3 \quad (12)$$

Yeoh 模型优点在于能够反映不同变形模式下的反“S”形应力-应变曲线。但 Yeoh 模型在准确预测单轴和平面拉伸拉伸试验应力-应变关系的同时,却在预测等双轴拉伸的应力-应变关系时表现出“偏软”的现象(如图 1(c)所示)。因此, Yeoh 模型在处理较大变形的复杂应变状态时,会出现较大的偏差。

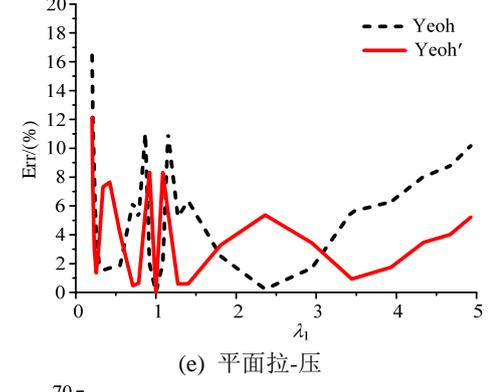
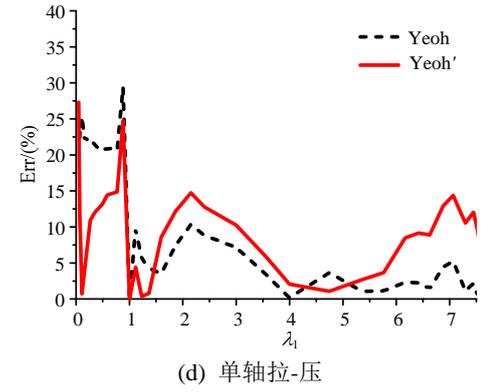
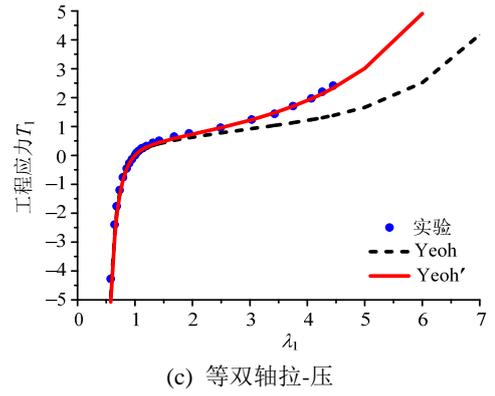
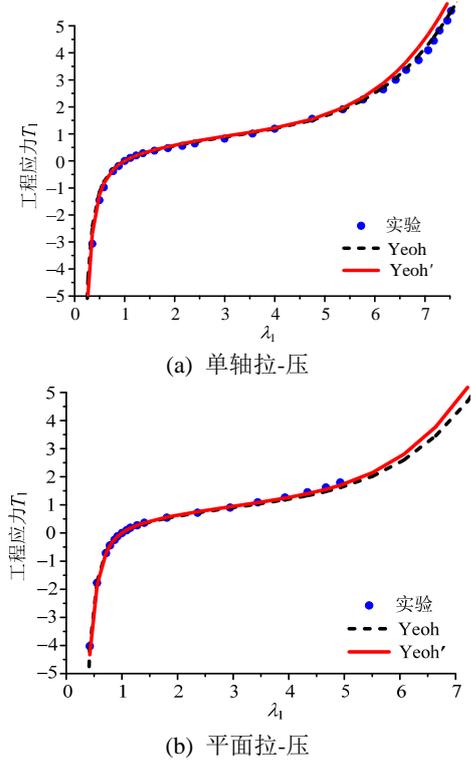


图 1 不同变形模式下 Yeoh 及改进的 Yeoh 模型与实验数据对比

Fig.1 Comparisons among Yeoh, improved Yeoh and test data of different deformation modes

Yeoh 模型在预测等双轴拉伸时的“偏软”现象主要是由于完全舍弃了式(9)中的  $II_C$  项造成的。因此,适当的引入式(9)中的  $II_C$  项将有助于改善 Yeoh

模型的“偏软”现象。基于上述考虑,本文引入了式(9)中  $\Pi_C$  项的第一项,提出如下的应变能方程:

$$W_{\text{Yeoh}'} = C_{10}(\mathbf{I}_C - 3) + C_{20}(\mathbf{I}_C - 3)^2 + C_{30}(\mathbf{I}_C - 3)^3 + C_{01}(\Pi_C - 3) \quad (13)$$

本文中  $\text{Yeoh}'$  均表示改进的  $\text{Yeoh}$  模型相关的量。

### 3 三种特殊的变形模式

单轴拉伸、平面拉伸和等双轴拉伸<sup>[15]</sup>是3种常用的用于测试超弹性材料本构关系的实验,而每种模式的拉伸的实验数据都可以转换成对应模式的压缩数据。给定应变能密度方程后,3种变形模式下的应力-应变关系可通过式(8)获得。

#### 3.1 单轴拉伸-压缩模式

单轴拉伸-压缩模式下,拉伸-压缩方向的名义应力与  $\text{Cauchy}$  应力的关系为  $T_1 = \frac{\sigma_1}{\lambda_1}$ , 与拉伸-压缩

方向垂直的方向的名义应力与  $\text{Cauchy}$  应力为  $T_2 = T_3 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 。在式(8)中,令  $i=1, j=2$ , 并结合式(12)和式(13)可以得到  $\text{Yeoh}$  和改进的  $\text{Yeoh}$  模型的单轴拉伸-压缩应力-应变关系:

$$T_{1\_Yeoh} = 2[C_{10} + 2C_{20}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1}) + 3C_{30}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1})^2](\lambda_1 + 2\lambda_1^{-2}) \quad (14)$$

$$T_{1\_Yeoh}' = 2[C_{10} + 2C_{20}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1}) + 3C_{30}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1})^2 + C_{01}\lambda_1^{-1}](\lambda_1 + 2\lambda_1^{-2}) \quad (15)$$

#### 3.2 平面拉伸-压缩模式

平面拉伸-压缩是一种纯剪切的变形模式,拉伸-压缩方向的名义应力与  $\text{Cauchy}$  应力的关系也为  $T_1 = \frac{\sigma_1}{\lambda_1}$ , 垂直于试样平面方向的名义应力与  $\text{Cauchy}$  应力为  $T_2 = \sigma_2 = 0$ 。在式(8)中,令  $i=1, j=2$ , 并结合式(12)和式(13)可以得到  $\text{Yeoh}$  和改进的  $\text{Yeoh}$  模型的平面拉伸-压缩应力-应变关系:

$$T_{1\_Yeoh} = 2[C_{10} + 2C_{20}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1}) + 3C_{30}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1})^2](\lambda_1 + \lambda_1^{-3}) \quad (16)$$

$$T_{1\_Yeoh}' = 2[C_{10} + 2C_{20}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1}) + 3C_{30}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1})^2 + C_{01}](\lambda_1 + \lambda_1^{-3}) \quad (17)$$

#### 3.3 等双轴拉伸-压缩模式

等双轴拉伸-压缩模式下,拉伸-压缩方向的名义应力与  $\text{Cauchy}$  应力的关系同样为  $T_1 = T_2 = \frac{\sigma_1}{\lambda_1} = \frac{\sigma_2}{\lambda_2}$ , 垂直于试样平面方向的名义应

力与  $\text{Cauchy}$  应力为  $T_3 = \sigma_3 = 0$ 。在式(8)中,令  $i=1, j=3$ , 并结合式(12)和式(13)可以得到  $\text{Yeoh}$  和改进的  $\text{Yeoh}$  模型的平面拉伸-压缩应力-应变关系:

$$T_{1\_Yeoh} = 2[C_{10} + 2C_{20}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1}) + 3C_{30}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1})^2](\lambda_1 + \lambda_1^{-5}) \quad (18)$$

$$T_{1\_Yeoh}' = 2[C_{10} + 2C_{20}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1}) + 3C_{30}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1})^2 + C_{01}\lambda_1^2](\lambda_1 + \lambda_1^{-5}) \quad (19)$$

## 4 模型验证及讨论

为验证改进的  $\text{Yeoh}$  模型的有效性,将式(14)~式(19)的计算结果与  $\text{Treloar}$  的实验数据<sup>[16]</sup>进行对比。为了获得良好的可恢复性,  $\text{Treloar}$  在实验中使用未填充的天然橡胶硫化试样。其单轴拉伸和平面拉伸实验均在相同的拉伸设备上,不同的是单轴拉伸实验时夹具夹持住长条形试样的两端进行拉伸;而平面拉伸实验时夹具加持住矩形试样的两个长边进行拉伸,从而在试样的中心区域获得纯剪切的应变状态。等双轴拉伸试验数据是通过固定在圆形玻璃管端部的橡胶试样进行充气获得的。充气后的橡胶试样变为气球状,气球的极区(对应无应变状态时试样的中心位置)为等双轴的应变状态,而应力可以通过充气的压力与气球状试样的半径计算得到。 $\text{Treloar}$  在文献[16]给出了部分原始数据,对于没有给出的数据均通过读取文献中的曲线得到。 $\text{Yeoh}$  和改进的  $\text{Yeoh}$  模型中的参数见表1,这些参数是通过  $\text{Treloar}$  的单轴拉伸实验数据进行最小二乘拟合<sup>[17]</sup>并考虑关心的应变区域的拟合准确度做适当人为修正确定的。

表1  $\text{Yeoh}$  和改进的  $\text{Yeoh}$  模型常数 /MPa

Table 1 Parameters of Yeoh and improved Yeoh model				
	C10	C20	C30	C01
Yeoh	$1.65 \times 10^{-1}$	$-1.31 \times 10^{-3}$	$3.96 \times 10^{-5}$	—
Yeoh'	$1.70 \times 10^{-1}$	$-1.55 \times 10^{-3}$	$4.61 \times 10^{-5}$	$5.24 \times 10^{-3}$

为量化  $\text{Yeoh}$  与改进的  $\text{Yeoh}$  模型与实验数据的误差,定义如下误差计算公式:

$$\text{Err}_i = \frac{|T_{i\_Theoretical} - T_{i\_Experimental}|}{T_{i\_Experimental}}, i = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

图1(a)~图1(c)给出了  $\text{Yeoh}$  及改进的  $\text{Yeoh}$  模型与  $\text{Treloar}$  的实验数据的对比,图1(d)~图1(f)给出了  $\text{Yeoh}$  及改进的  $\text{Yeoh}$  模型与实验数据的误差。可以发现,改进的  $\text{Yeoh}$  模型和原有的  $\text{Yeoh}$  模型在预测单轴和平面拉伸-压缩曲线时区别不大,两者的误

差也在同一水平上,并无本质区别。这是由于单轴拉伸-压缩的情况下,式(15)比式(14)多了 $C_{01}\lambda^{-1}$ 项,随着 $\lambda$ 的增加 $C_{01}\lambda^{-1}$ 在逐渐减小,并且 $C_{01}$ 本身的值也不大,因此改进的 Yeoh 模型对单轴拉伸-压缩的变形模式下的应力-应变曲线影响有限。在平面拉伸-压缩的情况下,式(17)比式(16)多了 $C_{01}$ 项,由于 $C_{01}$ 的值较小,改进的 Yeoh 模型对平面拉伸-压缩的变形模式下的应力-应变曲线影响同样有限。但改进的 Yeoh 模型比原有的 Yeoh 模型在预测等双轴拉伸-压缩曲线时表现出较大的优势,原有的 Yeoh 模型随着拉伸比的增加越来越表现出“偏软”的特性,而改进的 Yeoh 模型则与实验数据非常接近。这是由于在等双轴拉伸-压缩的情况下,式(19)比式(18)增加了 $C_{01}\lambda^2$ 项,尽管 $C_{01}$ 的值不大,但是随着 $\lambda$ 的增加 $C_{01}\lambda^2$ 在逐步增加,因此由式(19)得到的曲线比式(18)得到的曲线表现出更加明显的“上翘”现象,从而与实验数据吻合较好。

由于本文提及的应变能密度方程均由右 Cauchy-Green 变形张量的不变量表示,由式(3)可知不变量均可以由伸长比表示,结合不可压缩性,应变能密度方程可以表示成两个伸长比的函数,因此,应变能密度方程代表了一个以两个伸长比为变量的空间曲面。对于单轴拉伸实验,图 2 和图 3 分别为 Yeoh 和改进的 Yeoh 模型的应变能密度空间曲面。可以发现,在单轴和平面拉伸-压缩的区域, Yeoh 和改进的 Yeoh 模型的应变能曲面均与实验数据吻合较好。在等双轴拉伸区域, Yeoh 模型的应变能密度曲面明显低于实验数据,而改进的 Yeoh 模型的应变能密度曲面与实验数据能够较好地吻合。

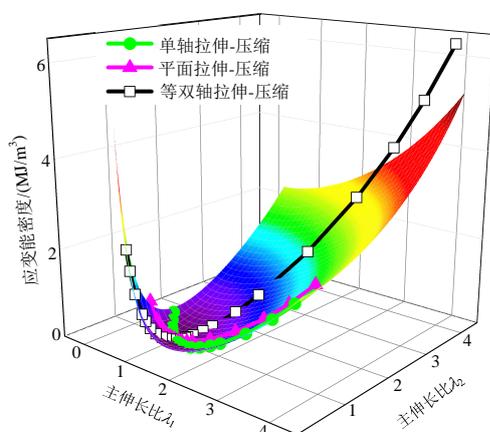


图 2 Yeoh 模型应变能密度空间曲面

Fig.2 Spatial surface of Yeoh strain energy density

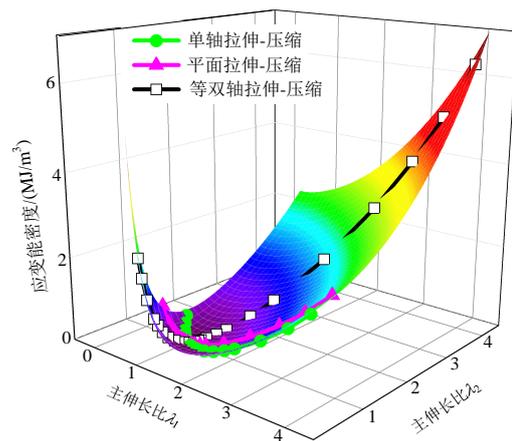


图 3 改进的 Yeoh 模型应变能密度空间曲面

Fig.3 Spatial surface of improved Yeoh strain energy density

## 5 结论

本文提出了一种改进的 Yeoh 超弹性材料模型,由该模型得到的 3 种变形模式的应力-应变关系与原有的 Yeoh 模型和实验数据进行了对比,结果表明改进的 Yeoh 模型能够很好地预测不同变形模式的应力-应变关系。经过分析发现,通过在原有的 Yeoh 模型中添加了 1 阶的 $(II_C - 3)$ 项,在保持 Yeoh 模型能够体现出反“S”形应力-应变关系的前提下,有效地改进了 Yeoh 模型在预测等双轴拉伸曲线时“偏软”的特性。虽然本文只将改进的 Yeoh 模型与未填充的天然胶的三种拉伸实验结果进行了对比,但不同类型和不同填充量的橡胶材料的拉伸曲线具有相似的反“S”形状<sup>[18]</sup>,改进的 Yeoh 模型同样适用于其他超弹性材料。因此,改进的 Yeoh 模型具备预测超弹性材料大变形复杂应变状态的应力-应变关系的能力,具有较大的工程应用价值。

## 参考文献:

- [1] Li Xuebing, Li Tian. Research on vertical stiffness of belted air springs [J]. *Vehicle System Dynamics*, 2013, 51(11): 1655–1673.
- [2] Li Xuebing, He Yuan, Liu Wanqiang, Wei Yintao. Research on vertical stiffness of rolling lobe air spring [J]. *Journal of Rail and Rapid Transit*, 2016, 230(4): 1172–1183.
- [3] 龚科家, 危银涛, 叶进雄. 填充橡胶超弹性本构参数试验与应用[J]. *工程力学*, 2009, 26(3): 193–198. Gong Kejia, Wei Yintao, Ye Jinxiong. Constitutive parametric experiment of tire rubber hyperelastic laws with application [J]. *Engineering Mechanics*, 2009, 26(3): 193–198. (in Chinese)
- [4] 危银涛, 方庆红, 金状兵, 冯希金. 填充橡胶本构模型研究进展[J]. *高分子通报*, 2014(5): 15–21. Wei Yintao, Fang Qinghong, Jin Zhuangbing, Feng Xijin. Research progress on constitutive model of filled rubber

- [J]. *Polymer Bulletin*, 2014(5): 15–21. (in Chinese)
- [5] Leonardo Hoss, Rogério J, Marczak. A new constitutive model for rubber-like materials [J]. *Mecánica Computacional*, 2010, XXIX: 2759–2773.
- [6] Treloar L R G. The elasticity of a network of long-chain molecules I [J]. *Transactions of the Faraday Society*, 1943, 39: 36–41.
- [7] Arruda Ellen M, Boyce Mary C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993, 41(2): 389–412.
- [8] Rivlin R S, Saunders D W. Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1951, A243: 251–288.
- [9] Yeoh O H. Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates [J]. *Rubber Chemistry and Technology*, 1990, 63(5): 792–805.
- [10] Yeoh O H. Some forms of the strain energy function for rubber [J]. *Rubber Chemistry and Technology*, 1993, 65(5): 754–771.
- [11] 危银涛, 杨挺青, 杜星文. 橡胶类材料大变形本构关系及其有限元方法[J]. *固体力学学报*, 1999, 20(4): 281–289.  
Wei Yintao, Yang Tingqing, Du Xingwen. On the large deformation rubber-like materials: Constitutive laws and finite element method [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1999, 20(4): 281–289. (in Chinese)
- [12] Ogden R W. Large deformation isotropic elasticity—On the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids [J]. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1972, A326: 565–584.
- [13] 秦世伦, Hutter K. 连续体热—力学引论[M]. 成都: 成都科技大学出版社, 1998: 60–77.  
Qin Shilun, Hutter K. Introduction of continuum mechanics and thermodynamics [M]. Chengdu: Chengdu University of Science and Technology Press, 1998: 60–77. (in Chinese)
- [14] Mooney M. A theory of large elastic deformation [J]. *Journal of Applied Physics*, 1940, 11: 582–592.
- [15] Miller K. Testing elastomers for hyperelastic material models in finite element analysis [M]. *Rubber Technology International*. UK: UK & International Press, 1999: 65–72.
- [16] Treloar L R G. Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation [J]. *Transactions of the Faraday Society*, 1944, 40(2): 813–825.
- [17] Ogden R W, Saccomandi G, Sgura I. Fitting hyperelastic models to experimental data [J]. *Computational Mechanics*, 2004, 34(6): 484–502.
- [18] Li Xu, Li Ziran, Xia Yuanming. Test and calculation of the carbon black reinforcement effect on the hyper-elastic properties of tire rubbers [J]. *Rubber Chemistry and Technology*, 2015, 88(1): 98–116.

(上接第 37 页)

- [4] Ma H M, Gao X L, Reddy J N. A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory [J]. *Acta Mech*, 2011, 220(1): 217–235.
- [5] Reddy JN, Kim J. A nonlinear modified couple stress based third-order theory of functionally graded plates [J]. *Composite Structures*, 2012, 94(3): 1128–1143.
- [6] 李安庆, 周慎杰, 周莎莎. 双层微梁固有特性的尺寸效应[J]. *工程力学*, 2014, 31(7): 223–228.  
LI Anqing, Zhou Shenjie, Zhou Shasha. The size-dependent inherent property of bilayered micro-beams [J]. *Engineering Mechanics*, 2014, 31(7): 223–228. (in Chinese)
- [7] Jung W Y, Han S C, Park W T. A nonlinear modified couple stress theory for buckling analysis of S-FGM nanoplates embedded in Pasternak elastic medium [J]. *Composites: Part B*, 2014, 60(2): 746–756.
- [8] Shaat M, Mahmoud F F, Gao X L, Faheem A F. Size-dependent bending analysis of Kirchhoff nano-plates based on a modified couple-stress theory including surface effects [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, 79(1): 31–37.
- [9] Chen Wanji, Li Li, Ma Xu. A modified couple stress model for bending analysis of composite laminated beams with first order shear deformation [J]. *Composite Structures*, 2011, 93(11): 2723–2732.
- [10] Chen Wanji, Ma Xu, Li Li. A model of a modified couple stress theory for composite laminated Reddy plate [J]. *Composite and Structures*, 2012, 94(8): 2143–2156.
- [11] Chen Wanji, Li Xiaopeng. Size-dependent free vibration analysis of composite laminated Timoshenko beam based on new modified couple stress theory [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2012, 83(3): 431–444.
- [12] Chen Wanji, Li Xiaopeng. A new modified couple stress theory for anisotropic elasticity and micro-scale laminated Kirchhoff plate model [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2014, 84(3): 323–341.
- [13] 李莉, 陈万吉, 郑楠. 基于修正偶应力理论的层合薄板的稳定性分析[J]. *工程力学*, 2013, 30(5): 9–15.  
Li Li, Chen Wanji, Zheng Nan. Model of composite laminated thin plate base on modified couple stress theory and buckling analysis of scale effects [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(5): 9–15. (in Chinese)
- [14] Yang S Q, Chen W J. On hypotheses of composite laminated plates based on new modified couple stress theory [J]. *Composite Structures*, 2015, 133(1): 46–53.
- [15] Chen Wanji, Yang Shengqi, Li Xiaopeng. A study of scale effect of composite laminated plates based on new modified couple stress theory by finite-element method [J]. *Multi-scale Computational Engineering*, 2014, 12(6): 507–527.
- [16] Pagano N J. Exact solutions for rectangular bi-directional composites [J]. *Composite Materials*, 1970, 4(1): 20–34.