

赣南师范学院

2011 年硕士研究生招生入学考试试题

专业： 基础数学

科目： 数学分析

共 2 页

注：1、此页为试题纸，答题请使用答题纸，答案写在此页无效。

2、本卷满分为 150 分，答题时间为 3 小时。

一、(共 50 分，每小题 10 分) 计算题

1、 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdots \sqrt[n]{2}$ ;

2、 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ ;

3、已知函数  $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 1+x^2, & x < 0, \end{cases}$  求  $\int_1^3 f(x-2)dx$ ;

4、设  $y = \tan(x+y)$ , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ ;

5、设  $z = \arctan(u+v)$ , 而  $u = e^{x+y}, v = x^2 + y$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 。

二、(15 分) 证明：设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续， $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在，

证明： $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续。

三、(10 分) 设导函数  $f'(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调减，且  $f(0) = 0$ ，证明：从

$[0, +\infty)$  任取两数  $x', x''$  且  $x' \leq x''$ ，均有  $f(x' + x'') \leq f(x') + f(x'')$ 。

四、(15 分) 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续，且  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的函数，证

明：积分  $\int_0^{2\pi} f(x+y)dx$  与  $y$  无关。

五、(15分) 设  $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  , 证明:  $f(x, y)$

在原点  $(0, 0)$  可微。

六、(15分) 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(1) 证明它的和函数在  $\mathbb{R}$  上连续;

(2) 计算积分  $\int_0^{\pi} S(t) dt$ 。

七、(15分) 设  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt, x \geq 0$ . 证明:  $f$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

八、(15分) 设  $L$  为任一不经过原点的闭曲线,  $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ ,

(1) 若  $L$  是一条不含原点的闭区域的边界线并取正向, 则  $I=0$ ;

(2) 若  $L$  是一条以原点为内点的闭区域的边界线并取正向, 则  $I=2\pi$ 。