山 东 大 学

二〇一四年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 825　　　　科目名称 线性代数与常微分方程

（答案必须写在答卷纸上，写在试题上无效）

一、证明题（共 3 题，每题 10 分）

设 A，B 为 n 阶可逆矩阵且 $I+BA^{-1}$ 可逆。证明：

1. $I+A^{-1}B$ 可逆；

2. $(A+B)^{-1}=A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})B^{-1}$；

3. $(I+A^{-1}B)^{-1}=A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})B^{-1}A$.

二 、共 2 题（第 1 题 10 分，第 2 题 20 分）

1. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 n 阶矩阵 A 的特征值，对应的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个多项式，求 $f(A)$ 的特征值与对应的特征向量。

2. 若实矩阵 A 可对角化且 A 的特征值都是非负的，(1)证明存在一个实矩阵 B，使 $A=B^2$.

(2)设 $A=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\-2&3&-1\\2&-2&4\end{pmatrix}$，求 B 使 $A=B^2$.

三 、证明题（共 3 题，每题 10 分）

1. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $m\times 1$ 阶矩阵。证明方程组 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $A^TY=0$ 的任一解向量 Y_0 都是 $B^TY=0$ 的解向量。

2. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，V_1 为 $AX=0$ 的解空间，令 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T,i=1,2,\cdots,m.\ V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$.

证明：$R^n=V_1\oplus V_2$.

3. 已知 n 阶方阵 A 满足 $(A-aI)(A-bI)=0$，其中 $a\neq b$，证明 A 与对角阵相似。

四、计算题（共 3 题，第 1，2 题每题 10 分，第 3 题 20 分）

1. 求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=6\dfrac{y}{x}-xy^2$.

2. 求解微分方程 $x\sqrt{1+y'^2}=y'$.

3. 对微分方程组 $\dfrac{dy}{dt}=Ay+f(t)$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$，$f(t)=\begin{bmatrix}e^t\\1\end{bmatrix}$.

(1) 求其相应的齐次方程组的基解矩阵.

(2) 求该非齐次方程组满足初值条件 $y(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ 的特解.

五、证明题（共 2 题，每题 10 分）

1. 设方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 满足 $\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=Qf(x)-Pg(y)$，其中 $f(x)$，$g(y)$ 分别为 x,y 的连续函数. 证明该方程有积分因子 $\mu=e^{\int f(x)dx+\int g(y)dy}$.

2. 设 $\varphi(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 试证明方程 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi(x)\sin y$ 的所有解的存在区间必为 $(-\infty,+\infty)$.