

doi: 10.3788/gzxb20154404.0422004

# 方形 LED 阵列光斑发散特性的幂函数拟合

刘沁<sup>1</sup>, 刘启能<sup>2</sup>

(1 重庆工商大学 设计艺术学院, 重庆 400067)

(2 重庆工商大学 计算机科学与信息工程学院, 重庆 400067)

**摘 要:** 利用 LED 照度公式推导方形 LED 阵列的光斑半径和发散角公式, 建立了研究方形 LED 阵列光斑发散特性的数值计算方法. 通过拟合得到方形 LED 阵列的光斑半径和发散角随目标距离、 $m$  值及阵列边长变化的幂函数公式. 结果表明, 幂函数拟合方法与数值计算结果吻合, 平均相对误差小于 1%. 该方法弥补了数值计算方法不能对方形 LED 阵列光斑发散特性解析研究的缺陷.

**关键词:** 发光二极管; 方形阵列; 发散特性; 拟合方法; 幂函数

中图分类号: O435; O432.2

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2015)04-0422004-5

## Power Function Fitting Methods of Light Spot Divergence Characteristics of Led Square Array

LIU Qin<sup>1</sup>, LIU Qi-neng<sup>2</sup>

(1 Institute of Design and Art, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

(2 College of Computer Science and Information Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

**Abstract:** Using LED illumination formula, the light spot radius formula and the divergence angle formula of LED square array are deduced. Using fitting method, the power function formula of the spot radius and divergence angle with target distance and  $m$  value and array length are obtained. The results show that the formulas can be quite good agreement with the numerical calculation results which the average relative error is less than 1%. It makes up for the defects that numerical method can't analytical study on the light spot divergence characteristics of LED square array.

**Key words:** LED; Square array; Divergence characteristics; Fitting method; Power function

**OCIS Codes:** 220.0220; 220.2945; 220.4298

## 0 引言

发光二极管 (Light Emitting Diode, LED) 作为一种新型光源, 由于其寿命长、发光效率高、发光方向性好, 已被广泛地应用于各种照明环境, 包括大屏幕显示、背光源、汽车和特种照明灯等等. 因此在理论上对 LED 照明特性的研究也越来越受到业内人士的关注<sup>[1-5]</sup>. 文献[6,7]研究了通过自由曲面来重新配光实现 LED 光源的均匀照明. 文献[8]研究了利用自由曲面透镜来实现 LED 光源的大视场角准直照明.

但由于受生产工艺和生产技术的限制, 单个 LED

芯片的功率较小, 产生的照度不强, 因此限制了单个 LED 芯片在多数照明领域的应用. 为了解决单个 LED 芯片照度不足的问题, 可将多个 LED 芯片组成 LED 阵列用于满足不同照明的需要<sup>[9-11]</sup>. 在 LED 阵列中最为典型的是方形 LED 阵列和圆形 LED 阵列, 文献[12]和文献[13]分别利用粒子群算法和全局优化算法研究了方形 LED 阵列和圆形 LED 阵列照度的均匀性问题, 得出了方形 LED 阵列和圆形 LED 阵列照度的均匀度与阵列结构参量的关系.

本文利用单个 LED 芯片的照度公式推导出方形 LED 阵列的光斑半径和发散角公式, 建立研究方形

基金项目: 重庆市教委科技项目基金资助项目 (No. KJ140641) 资助

第一作者: 刘沁 (1983-), 女, 讲师, 硕士, 主要研究方向为照明设计. Email: liuqinecho@163.com

收稿日期: 2014-10-20; 录用日期: 2014-12-04

<http://www.photon.ac.cn>

LED阵列光斑发散特性的数值计算方法.在此基础上利用拟合方法得出方形LED阵列的光斑半径和发散角随目标距离、随 $m$ 值、随阵列边长变化的幂函数公式.利用幂函数拟合方法研究方形LED阵列照度光斑的发散特性,找出其光斑的发散规律.这一问题的解决将为研究方形LED阵列的光斑发散特性建立了一种新方法,弥补了数值计算方法不能对方形LED阵列的光斑发散特性进行解析研究的缺陷.

## 1 理论与模型

单个LED芯片的光强 $I$ 与视角 $\theta$ 满足关系<sup>[13]</sup>

$$I = I_0 \cos^m \theta \quad (1)$$

式中 $I_0$ 为视角为0方向的光强, $m$ 值由半角 $\theta_{1/2}$ 决定(半角 $\theta_{1/2}$ 是指光强降为中心光强一半时所对应的视角). $m$ 值与半角 $\theta_{1/2}$ 的关系为

$$m = \frac{-\ln 2}{\ln(\cos \theta_{1/2})} \quad (2)$$

设单个LED芯片在点 $(X, Y, 0)$ 处,目标平面上的照明点 $P$ 在 $(x, y, h)$ 处,如图1.则单个LED芯片在 $P$

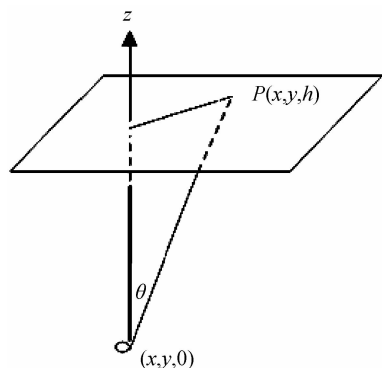


图1 单个LED芯片的照度

Fig.1 A single chip of illuminance

点处产生的照度 $E$ 与光强 $I$ 满足余弦定律<sup>[14]</sup>

$$E(x, y, h) = \frac{I \cos \theta}{r^2} \quad (3)$$

式(3)中的 $r$ 为芯片到 $P$ 点距离.由式(1)和式(3)可得单个LED芯片在 $P$ 点处产生的照度为

$$E(x, y, h) = \frac{I_0 h^{m+1}}{[(x-X)^2 + (y-Y)^2 + h^2]^{(m+3)/2}} \quad (4)$$

如果在平面 $z=0$ 上有 $N$ 个LED芯片,则在 $P$ 点处产生的照度为

$$E(x, y, h) = \sum_{n=1}^N \frac{I_0 h^{m+1}}{[(x-X_n)^2 + (y-Y_n)^2 + h^2]^{(m+3)/2}} \quad (5)$$

式(5)中 $X_n, Y_n$ 为第 $n$ 个LED芯片的坐标.由于式(5)由式(3)的基础上得到的,而式(3)要求目标距离不能太远.因此研究结果适用于方形LED阵列的远场照明问题.

设计的方形LED阵列结构为阵列的每一排上均匀分布有奇数 $M$ 个LED芯片,每一排上相邻两个芯

片的间距为 $d$ ,该方形LED阵列的LED芯片总数 $N=M \times M$ ,其边长为 $a$ .方形阵列在 $z=0$ 平面内,方形阵列中心处的芯片的坐标在 $(0, 0, 0)$ 处,目标平面为 $z=h$ ,如图2.由于该方形LED阵列以 $z$ 轴为对称轴,所以

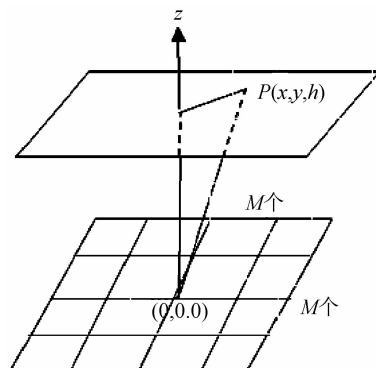


图2 LED方形阵列的照度

Fig.2 LED square array of illumination

该方形LED阵在目标平面产生的照度分布也是以 $z$ 轴为对称轴.由式(5)可得该方形LED阵列在目标平面上 $P$ 点产生的照度为

$$E(x, y, h) = \sum_{i=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} \sum_{j=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} \frac{I_0 h^{m+1}}{[(x-id)^2 + (y-jd)^2 + h^2]^{(m+3)/2}} \quad (6)$$

进一步推导方形LED阵列照射光斑的半径和发散角满足的关系.这里以目标平面上照度 $E$ 大于光斑中心照度 $E_0$ (照度峰值)20%的范围作为照射光斑的范围,即照射光斑的范围满足

$$E \geq 0.2 E_0 \quad (7)$$

设光斑的半径为 $R$ ,由式(7)可以确定光斑的半径.方形LED阵列的照射光斑的发散角 $\phi$ 则满足

$$\tan \phi = \frac{R - a/2}{h} \quad (8)$$

光斑的发散角越大表示照射光斑发散越厉害,因此光斑的发散角就是研究照射光斑发散特性的物理量.利用光斑的发散角式(8)就可以研究方形LED阵列照射光斑的发散规律.

而式(6)~(8)只能通过计算得出的一系列数据来反映方形LED阵列光斑的发散特征,而不能得出光斑半径和发散角的函数变化规律.因此式(6)~(8)给出的数值计算方法无法对方形LED阵列光斑的发散特性进行解析分析和研究.为了弥补数值计算方法的不足,有必要利用函数拟合法来找出方形LED阵列的光斑半径和发散角的函数变化规律.

通过对方形LED阵列光斑半径和发散角的变化特征进行幂函数拟合、指数函数拟合、三角函数拟合的试探后发现:幂函数拟合不仅函数关系简单,而且能够很好地与数值计算法得到的结果吻合.本文介绍方形LED阵列光斑半径和发散角的幂函数拟合方法.

方形LED阵列的光斑半径和光斑发散角的变化

规律可以用相同形式的幂函数表示

$$y = bx^\beta + c \quad (9)$$

式中:  $y$  为函数(它可以为光斑半径或光斑发散角),  $x$  为自变量(它可以为目标距离  $h$  或  $m$  值或阵列边长  $a$  中的任何一个,  $x$  选不同的量, 式(9)反映光斑半径或光斑发散角随该量的变化规律),  $\beta$  为拟合变量, 通过调整  $\beta$  的大小使式(9)给出的函数曲线与数值计算法得到的数据吻合来确定  $\beta$  的值.  $b$  和  $c$  为待定系数, 由数值计算法得到的初点  $x_1, y_1$  和末点  $x_l, y_l$  数据确定, 其确定方法是将  $x_1, y_1$  和  $x_l, y_l$  代入式(9), 解出  $b$  和  $c$  为

$$\begin{cases} b = \frac{y_l - y_1}{x_l^\beta - x_1^\beta} \\ c = y_1 - bx_1^\beta \end{cases} \quad (10)$$

将式(9)~(10)称为方形 LED 阵列光斑半径和发

表 1  $m=20, a=0.8$  m 时,  $R$  和  $\phi$  的值

Table 1 The values of  $R$  and  $\phi$  with  $m=20, a=0.8$  m

| $h$    | 1 m       | 2 m       | 3 m       | 4 m       | 5 m       | 6 m       | 7 m       |
|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $R$    | 0.616 591 | 0.905 323 | 1.251 38  | 1.617 25  | 1.991 6   | 2.370 3   | 2.751 51  |
| $\phi$ | 12.221°   | 14.179 7° | 15.843 6° | 16.925 6° | 17.657 3° | 18.179 3° | 18.568 7° |

散角 的 幂 函 数 拟 合 法. 该 方 法 能 够 得 到 光 斑 半 径 和 光 斑 发 散 角 的 函 数 变 化 规 律, 弥 补 了 数 值 计 算 方 法 的 不 足.

图 3 中 7 个 黑 圆 点 为 表 1 中 目 标 距 离  $h$  和 对 应 的 光 斑 半 径  $R$  的 7 组 数 据. 再 将 目 标 距 离  $h$  和 光 斑 半 径  $R$  的 初 点 ( $h_1=1$  m,  $R_1=0.616 6$  m) 和 末 点 ( $h_l=7$  m、

散 角 的 幂 函 数 拟 合 法. 该 方 法 能 够 得 到 光 斑 半 径 和 光 斑 发 散 角 的 函 数 变 化 规 律, 弥 补 了 数 值 计 算 方 法 的 不 足.

## 2 光斑的发散特性

利用数值计算法式(6)~(8)和幂函数拟合法式(9)~(10)得出方形 LED 阵列的光斑半径和发散角随目标距离、随  $m$  值、随阵列边长的变化规律.

### 2.1 光斑与目标距离的关系

取  $m=20$ , 单个芯片的  $I_0=4cd$ , 阵列的芯片总数  $N=21 \times 21$ , 边长  $a=0.8$  m. 利用数值计算法计算出目标距离为 1、2、3、4、5、6、7 m 时对应的光斑半径  $R$  值和光斑发散角  $\phi$  值列在表 1 中.

这 表 明 拟 合 幂 函 数 与 数 值 计 算 结 果 吻 合 得 很 好.

式(11)是用幂函数拟合法得到的方形 LED 阵列光斑半径随目标距离的函数变化规律, 通过它能够清晰地反映出光斑半径随目标距离的函数变化关系, 便于对光斑半径随目标距离的变化规律进行解析研究, 这是数值计算方法不能实现的. 因此幂函数拟合法弥补了数值计算方法的不足.

在照明设计中可以利用式(11)十分方便地预测其他不同目标距离对应的光斑半径值. 例如目标距离  $h=20$  m 处对应的光斑半径  $R=8.41$  m.

同样利用表 1 中光斑发散角的数据和最小二乘法能够得到光斑发散角随目标距离的拟合幂函数变化规律. 利用最小二乘法得到最优拟合变量  $\beta=-0.011$ . 将  $\beta=-0.011$  代入式(9)和(10)得光斑发散角随目标距离的幂函数变化规律

$$\phi = -299.8h^{-0.011} + 312.1 \quad (12)$$

式(12)光斑发散角随目标距离的函数关系为图 4 实线, 它能较好地通过 7 个数值计算点, 并且计算出该拟

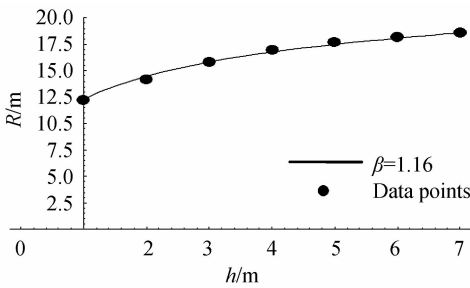


图 3 发散角随目标距离的响应曲线

Fig. 3 Response curves of divergence angle versus target distance

$R_l=2.751 5$  m) 代入式(10), 确定对应的  $b$  和  $c$  为待定系数

$$b = \frac{2.751 5 - 0.616 6}{7^\beta - 1^\beta}, c = 0.616 6 - b1^\beta$$

将  $b$  和  $c$  代入式(9)得光斑半径  $R$  随目标距离  $h$  的拟合幂函数关系

$$R = bh^\beta + c$$

式中光斑半径  $R$  不仅是目标距离  $h$  函数, 而且受拟合变量  $\beta$  的调制. 利用最小二乘法得到最优拟合变量  $\beta=1.16$ . 将  $\beta=1.16$  代入上述两式得光斑半径随目标距离的幂函数变化规律

$$R = 0.249h^{1.16} + 0.367 \quad (11)$$

图 3 实线为式(11)光斑半径随目标距离的函数关系, 它能很好地通过 7 个数值计算点, 并且计算出该拟合幂函数与数值计算结果的平均相对误差为 0.56%.

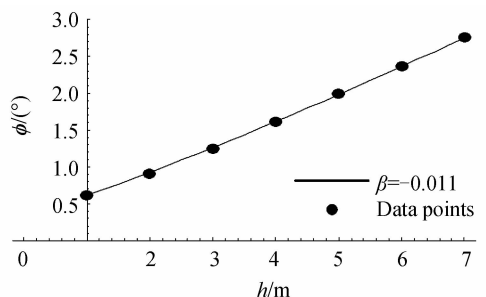


图 4 光斑半径随目标距离的响应曲线

Fig. 4 Response curves of light spot radius versus target distance

合幂函数与数值计算结果的平均相对误差为0.71%。这表明拟合幂函数与数值计算结果吻合得较好。

## 2.2 光斑与 $m$ 值的关系

仍取阵列的芯片总数  $N = 21 \times 21$ 、边长  $a =$

表 2  $a=0.8 \text{ m}$ ,  $h=2 \text{ m}$  时,  $R$  和  $\phi$  值

Table 2 The values of  $R$  and  $\phi$  with  $a=0.8 \text{ m}$ ,  $h=2 \text{ m}$

| $m$               | 10       | 15       | 20        | 25        | 30        | 35        | 40        |
|-------------------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $R/\text{m}$      | 1.163 47 | 1.002 59 | 0.905 323 | 0.839 552 | 0.791 906 | 0.755 727 | 0.727 293 |
| $\phi/(\text{°})$ | 20.893 7 | 16.767 2 | 14.179 7  | 12.395 2  | 11.086 8  | 10.085 4  | 9.293 87  |

利用表 2 中光斑半径的数据和最小二乘法能够得到光斑半径随  $m$  值的拟合幂函数变化规律。利用最小二乘法得到最优拟合变量  $\beta = -0.53$ 。将  $\beta = -0.53$  代入式(9)和(10)得光斑半径随  $m$  值的幂函数变化规律

$$R = 2.84m^{-0.53} + 0.325 \quad (13)$$

式(13)光斑半径随  $m$  值的函数关系为图 5 实线, 它能很好地通过 7 个数值计算点。并且计算出该拟合幂函数与数值计算结果的平均相对误差为 0.08%。这表明拟合幂函数与数值计算结果吻合得很好。

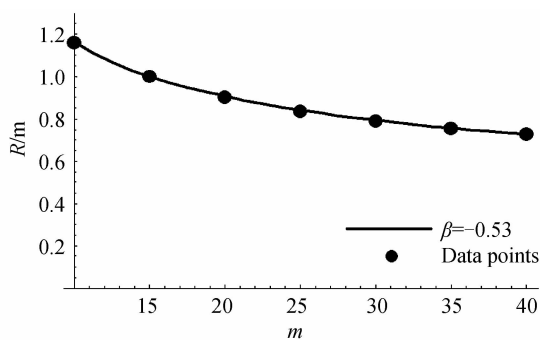


图 5 光斑半径随  $m$  值的响应曲线

Fig. 5 Response curves of light spot radius versus  $m$  value  
在照明设计中可以利用式(13)方便地预测其他不同  $m$  值对应的光斑半径值。例如  $m$  值为 5 时其对应的光斑半径  $R = 1.535 \text{ m}$ 。

同样利用表 2 中光斑发散角的数据和最小二乘法能够得到光斑发散角随  $m$  值的拟合幂函数变化规律。

表 3  $h=2 \text{ m}$ ,  $m=20$  时,  $R$  和  $\phi$  值

Table 3 The values of  $R$  and  $\phi$  with  $h=2 \text{ m}$ ,  $h=20$

| $a$               | 0.6 m    | 0.8 m     | 1 m       | 1.2 m    | 1.4 m    | 1.6 m    | 1.8 m    |
|-------------------|----------|-----------|-----------|----------|----------|----------|----------|
| $R/\text{m}$      | 0.849 63 | 0.905 323 | 0.973 825 | 1.052 85 | 1.140 02 | 1.233 18 | 1.330 54 |
| $\phi/(\text{°})$ | 15.366 4 | 14.179 7  | 13.328 4  | 12.758   | 12.408   | 12.221   | 12.148 7 |

利用表 3 中光斑半径的数据和最小二乘法能够得到光斑半径随阵列边长的拟合幂函数变化规律。利用最小二乘法得到最优拟合变量  $\beta = 1.6$ 。将  $\beta = 1.6$  代入式(9)和(10)得光斑半径随阵列边长的幂函数变化规律

$$R = 0.227a^{1.6} + 0.749 \quad (15)$$

式(15)光斑半径随阵列边长的函数关系为图 7 实线, 它能很好地通过 7 个数值计算点。并且计算出该拟合幂函数与数值计算结果的平均相对误差为 0.13%。

0.8 m, 固定目标距离  $h = 2 \text{ m}$ , 利用数值计算法计算出  $m$  值为 10、15、20、25、30、35、40 时对应的光斑半径  $R$  值和光斑发散角  $\phi$  值, 见表 2。

利用最小二乘法得到最优拟合变量  $\beta = -0.46$ 。将  $\beta = -0.46$  代入式(9)和(10)得光斑发散角随  $m$  值的幂函数变化规律

$$\phi = 70.9m^{-0.46} - 3.7 \quad (14)$$

式(14)光斑发散角随  $m$  值的函数关系为图 6 实线, 它很好地通过 7 个数值计算点。并且该拟合幂函数与数值计算结果的平均相对误差为 0.19%。这表明拟合幂函数与数值计算结果吻合得很好。

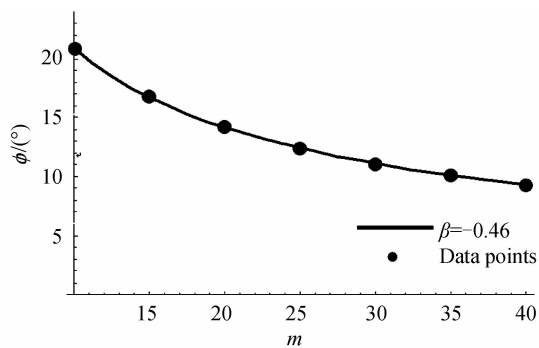


图 6 发散角随  $m$  值的响应曲线

Fig. 6 Response curves of divergence angle versus  $m$  value

## 2.3 光斑与阵列边长的关系

仍取阵列的芯片总数  $N = 21 \times 21$ , 固定目标距离  $h = 2 \text{ m}$ ,  $m = 20$ 。利用数值计算法计算出阵列边长  $a$  为 0.6、0.8、1.0、1.2、1.4、1.6、1.8 m 时对应的光斑半径  $R$  值和光斑发散角  $\phi$  值列在表 3 中。

这表明拟合幂函数与数值计算结果吻合得很好。

在照明设计中可以利用式(15)十分方便地预测其他不同阵列边长对应的光斑半径值。例如阵列边长为  $a = 0.4 \text{ m}$  时其对应的光斑半径  $R = 0.8014 \text{ m}$ 。

同样利用表 3 中光斑发散角的数据和最小二乘法能够得到光斑发散角随阵列边长的拟合幂函数变化规律。利用最小二乘法得到最优拟合变量  $\beta = -1.3$ 。将  $\beta = -1.3$  代入式(9)和(10)得光斑发散角随阵列边长

的幂函数变化规律

$$\phi = 2.18a^{-1.3} + 11.13 \quad (16)$$

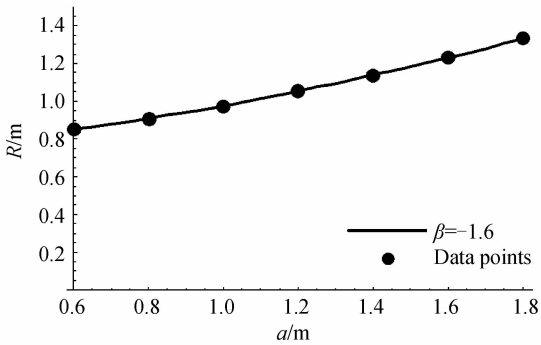


图7 光斑半径随阵列边长的响应曲线

Fig. 7 Response curves of light spot radius versus array length

式(16)光斑发散角随阵列边长的函数关系为图8实线,它能很好地通过7个数值计算点.并且计算出该拟合幂函数与数值计算结果的平均相对误差为0.52%.这表明拟合幂函数与数值计算结果吻合得很好.

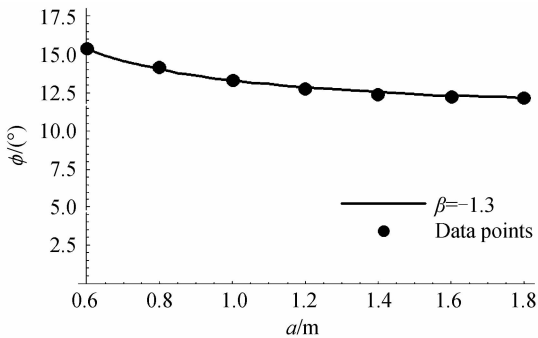


图8 发散角随阵列边长的响应曲线

Fig. 8 Response curves of divergence angle versus array length

### 3 结论

利用单个 LED 芯片的照度公式推导出方形 LED 阵列的光斑半径和发散角公式,建立了研究方形 LED 阵列光斑发散特性的数值计算方法.在此基础上利用拟合方法得出了方形 LED 阵列的光斑半径和发散角随目标距离、 $m$  值、阵列边长变化的幂函数公式.这些幂函数公式不仅函数机构简单,而且能够很好地与数值计算结果吻合,其平均相对误差都小于 1%.利用这些幂函数公式能够十分方便地对方形 LED 阵列的光斑发散特性进行解析研究,加深了对方形 LED 阵列光斑发散特性内在规律的认识.为研究方形 LED 阵列的光斑发散特性建立了一种新方法,弥补了数值计算方法不能对方形 LED 阵列的光斑发散特性进行解析研究的缺陷.

### 参考文献

- [1] DING Y, LIU X, ZHENG Z R. Freeform LED lens for uniform illumination[J]. *Optics Express*, 2008, **16**(17): 12958-12966.
- [2] SU Zhou-ping, QUE Li-zhi, ZHU Zhuo-wei. Optical system design of the compact collimator for LED source[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2012, **49**(2): 022203. 苏宙平, 阙立志, 朱焯炜. 用于 LED 光源准直的紧凑型光学系统设计[J]. *激光与光电子学进展*, 2012, **49**(2): 022203.
- [3] SUN C C, CHEN C Y, HE H Y. Precise optical modeling for silicate-based white LEDs[J]. *Optics Express*, 2008, **16**: 20060.
- [4] SUN C C, CHIEN W T, MORENO I. Analysis of the far-field region of LEDs[J]. *Optics Express*, 2009, **17**(12): 13918-13922.
- [5] WANG K, LIU S, CHEN F, *et al.* Freeform LED lens for rectangularly prescribed illumination[J]. *Journal of Optics A-Pure and Applied Optics*, 2009, **11**(10): 105501-105505.
- [6] DING Yi, GU Pei-fu. Freeform reflector for uniform illumination[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(3): 540-544. 丁毅, 顾培夫. 实现均匀照明的自由曲面反射器[J]. *光学学报*, 2007, **27**(3): 540-544.
- [7] DING Yi, ZHENG Zhen-rong, GU Pei-fu. Freeform lens design for LED illumination[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(6): 1486-1490. 丁毅, 郑臻荣, 顾培夫. 实现 LED 照明的自由曲面透镜设计[J]. *光子学报*, 2009, **38**(6): 1486-1490.
- [8] LUO Xiao-xia, LIU Hua, LU Zhen-wu, *et al.* Automated optimization of free-form surface lens for LED collimation[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(9): 1351-1355. 罗晓霞, 刘华, 卢振武, 等. 实现 LED 准直照明的优化设计[J]. *光子学报*, 2011, **40**(9): 1351-1355.
- [9] WHANG A J W, CHEN Y Y, TENG Y T. Designing uniform illuminance systems by surface-tailored lens and configurations of LED arrays[J]. *Journal of Dispersion and Technology*, 2009, **5**: 94-103.
- [10] QIN Z, WANG K, CHEN F. Analysis of condition for uniform lighting generated by array of light emitting diodes with large view angle[J]. *Optics Express*, 2010, **18**: 17460-17476.
- [11] SU Zhou-ping, XUE Dong-lin, JI Zhi-cheng. Designing LED array for uniform illumination distribution by simulated annealing algorithm[J]. *Optics Express*, 2012, **20**(S6): 843-855.
- [12] WANG Jia-wen, SU Zhou-ping, YUAN Zhi-jun, *et al.* Study on uniformity of LED array illumination distribution on target plane[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2014, **43**(6): 919-924. 王加文, 苏宙平, 袁志军, 等. LED 阵列模组化中的照度均匀性问题[J]. *光子学报*, 2014, **43**(6): 919-924.
- [13] ZHAO Zhi-pu, JI Ling-yan, SHEN Yan-xia, *et al.* Research of illumination uniformity for LED arrays based on PSO algorithm[J]. *Chinese Journal of Luminescence*, 2013, **34**(12): 1677-1681. 赵芝璞, 季凌燕, 沈艳霞, 等. 基于 PSO 粒子群算法的 LED 照明系统光照均匀性研究[J]. *发光学报*, 2013, **34**(12): 1677-1681.
- [14] 姚家祎. 照明设计手册[M]. 中国电力出版社, 2006, 187-188.